M. Kreuzer
A. Fischer

Sommersemester 02

Übungsaufgaben
zur Vorlesung "Lineare Algebra I" für Lehramt

Blatt 9 **Abgabe bis 18.6.02 um 10.00 Uhr**

Aufgabe 1

Sei V ein euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie die Parallelogrammgleichung
$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ für $v, w \in V$.

Aufgabe 2

Sei $n \geq 2$.
a) Beweisen Sie, dass durch $\|\ \ \|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\|(a_1, ..., a_n)\|_\infty := \max\{|a_i| : 1 \leq i \leq n\}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.
b) Zeigen Sie, dass es kein Skalarprodukt $<\ ,\ >$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt mit $\|v\|_\infty = \sqrt{< v, v >}$ für $v \in \mathbb{R}^n$.

(Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 1)

Aufgabe 3

Sei V ein euklidischer Vekrorraum und sei $f : V \longrightarrow V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Für zwei Vektoren $v, w \in V \setminus \{0\}$ heißt $\angle(v, w) := \arccos \frac{<v,w>}{\|v\| \cdot \|w\|}$ der Winkel zwischen v und w. Die Abbildung f heißt winkeltreu, wenn f injektiv ist und für alle $v, w \in V \setminus \{0\}$ gilt $\angle(f(v), f(w)) = \angle(v, w)$.
Beweisen Sie, dass f winkeltreu ist, wenn es eine orthogonale $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g : V \longrightarrow V$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ gibt mit $f = \lambda \cdot g$.

Aufgabe 4 Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $f : V \longrightarrow V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) f ist orthogonal.
b) Für alle $v \in V$ gilt $\|f(v)\| = \|v\|$.
c) Ist $\mathcal{V} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V, so gilt $< f(v_i), f(v_j) >=< v_i, v_j >$ für $i, j = 1, ..., n$.

Aufgabe 5

Schreiben Sie eine Maple Prozedur "SchmidtoV ($\mathcal{V}$)", die ausgehend von einer Basis $\mathcal{V}$ des $\mathbb{R}^n$ mit Hilfe des Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bzgl. des Standardskalarprodukts berechnet.
Wenden Sie Ihre Funktion "SchmidtoV ($\mathcal{V}$)" in den folgenden Fällen an:
a) Beispiel 13.11 der Vorlesung
b) $\mathcal{V}$ bestehe aus den Spalten der Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & n \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 3 \\ & & & \ddots & 2 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$