Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: 15.11.2002, 9.00 Uhr

Lineare Algebra I

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (P): (Ein Ring, sie zu knechten, sie alle zu finden, ins Dunkel zu treiben und ewig zu binden.)
Sei R ein Integritätsring mit Einselement. Besitzt R nur endlich viele Elemente, so ist $(R\backslash\{0\},\cdot)$ eine Gruppe.

Aufgabe 2 (P): (Das also war des Pudels Kern! Ein fahrender Skolast? Der Casus macht mich lachen.)
Seien R, S zwei kommutative Ringe mit Einselement, und sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

a) Zeigen Sie, dass der **Kern** von f, also die Menge $\mathrm{Kern}(f) = \{a \in R \mid f(a) = 0\}$ ein Ideal in R ist.

b) Beweisen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ gilt.

Aufgabe 3 (P): (Ringhomomorphismus = die irrationale Hoffnung, Karten für die Bayreuther Festspiele zu ergattern.)
Gegeben sei eine positive ganze Zahl n.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ a \mapsto a + n\mathbb{Z} \end{array}$ einen Ringhomomorphismus definiert. Ist φ injektiv? Ist φ surjektiv? Was ist der Kern von φ?

b) Für welche Zahlen $m \in \mathbb{N}_+$ gibt es einen von der Nullabbildung verschiedenen Ringhomomorphismus $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?

   Tipp: Untersuchen Sie zuerst die Fälle $m = 2n$ und $m = n + 1$.

Aufgabe 4 (D+L): (In der Theorie gibt es keinen Unterschied zwischen Theorie und Praxis. In der Praxis jedoch gibt es ihn.)

a) Schreiben Sie ein Maple–Programm `Euklid` (a, b), das den größten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Zahlen a, b mit Hilfe des euklidischen Algorithmus berechnet. Wenden Sie Ihr Programm an mindestens zehn selbst gewählten Beispielen an und demonstrieren Sie so seine korrekte Funktion.

b) Bauen Sie in Ihr Programm `Euklid` (a, b) einen Zähler ein, der protokolliert, wie oft die Division mit Rest in Schritt 6 aufgerufen wurde. Finden Sie dann die zwei Zahlen a, b zwischen 1 und $N = 40$, für die der euklidische Algorithmus die meisten Schritte braucht.

c) Wiederholen Sie Teil b) mit $N = 80$ und $N = 160$. Fällt Ihnen etwas auf? Formulieren Sie eine Vermutung und geben Sie möglichst schlagkräftige Argumente dafür an.

Aufgabe 5 (D): (Buch 7, Proposition 2: Antenaresis)
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Betrachten Sie die folgenden Instruktionen:

1) Ist $a = b = 0$, so gib $(0, 0, 0)$ aus und stoppe.
   Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, so gib $\left(0, \frac{|b|}{b}, |b|\right)$ aus und stoppe.
   Ist $a \neq 0$ und $b = 0$, so gib $\left(\frac{|a|}{a}, 0, |a|\right)$ aus und stoppe.

2) Bilde die Tripel $(c_0, d_0, e_0) = \left(\frac{|a|}{a}, 0, |a|\right)$ und $(c_1, d_1, e_1) = \left(0, \frac{|b|}{b}, |b|\right)$.

3) Prüfe, ob $e_1 \leq e_0$ gilt. Falls nicht, so vertausche (c_0, d_0, e_0) und (c_1, d_1, e_1) miteinander.

4) Schreibe e_0 in der Form $e_0 = qe_1 + r$ mit $q \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r < e_1$. Bilde dann das Tripel $(c_2, d_2, e_2) = (c_0 - qc_1, d_0 - qd_1, r)$.

5) Ersetze (c_0, d_0, e_0) mit (c_1, d_1, e_1) und (c_1, d_1, e_1) mit (c_2, d_2, e_2).

6) Wiederhole die Schritte 4) und 5) solange, bis $e_1 = 0$ gilt. Dann gib das Tripel (c_0, d_0, e_0) aus und stoppe.

   a) Beweisen Sie, dass dies einen Algorithmus definiert, der ein Tripel (c, d, e) berechnet, so dass $e = \mathrm{ggT}(a, b)$ und $ac + bd = e$ gilt.

   b) Schreiben Sie eine Maple–Funktion `Ext Euklid` (a, b), die diesen Algorithmus implementiert. Wenden Sie Ihre Funktion in mindestens 10 Fällen an, und demonstrieren Sie so ihre korrekte Funktionsweise.

How do you make Windows faster?
Throw it harder!