Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: 22.11.2002, 9.00 Uhr

Lineare Algebra I

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (P): (Was ist das Ergebnis von $(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-z)$?)

a) Gegeben seien ganze Zahlen a, b, c. Zeigen Sie, dass die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ genau dann eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ besitzt, wenn $\mathrm{ggT}(a, b)$ die Zahl c teilt.

b) Folgern Sie aus a), dass das Ideal $\{a \cdot x + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ das von $\mathrm{ggT}(a, b)$ erzeugte Hauptideal ist.

Aufgabe 2 (P): (Algebraische Symbole werden verursacht, wenn man nicht weiß, worum es geht.)
Beweisen Sie, dass man die Menge $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, a, b\}$ auf genau eine Art zu einem Körper machen kann.

Aufgabe 3 (D+L): ("Im Rechnen bin ich gut, da bekomme ich immer mehr heraus als die anderen.")
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Beschreiben Sie alle Ideale des Rings $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und zeigen Sie, dass er ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 4 (L): (Haben Sie die Wahl zwischen zwei Theorien, so wählen Sie die lustigere!)
Erläutern Sie die Zusammenhänge zwischen den folgenden Begriffen: Abbildung, Gruppe, Gruppenhomomorphismus, Ideal, Menge, Ring, Ringhomomorphismus, Teilmenge, Untergruppe. Entwickeln Sie eine geeignete schematische Darstellung dieser Zusammenhänge und untersuchen Sie auch die Frage, welche Begriffe Spezialfälle anderer Begriffe sind.

Aufgabe 5 (D): (In der Kürze liegt die Würze.)
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = 1$. Zeigen Sie, dass man den Bruch $\frac{a+b}{c+d}$ nicht weiter kürzen kann.

Aufgabe 6 ($\star$): (Hab' Erdöl im Garten, ob's stürmt oder schneit, und mit dem Ersparten üb' Treu und Redlichkeit.)
Ein irakisches Erdölfeld ist 144 km breit. Das Explorationsteam einer amerikanischen Ölfirma weiß aus theoretischen Modellen, dass die Dicke vom

Rand bis zur dicksten Stelle monoton zunimmt und dann wieder monoton abnimmt. Es soll die dickste Stelle mit möglichst wenigen Bohrungen bis auf 1 km genau finden. Wie ist dabei vorzugehen?

(Tipp: $89 + 55 = 144$)

Aufgabe 7 ($\star$): (Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte ...)
Was hat das folgende Bild mit der Vorlesung bzw. mit den Übungsaufgaben zu tun?