Prof. Dr. M. Kreuzer — Abgabetermin: 13.12.2002, 9.00 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (P):
(Bei einer Spiegelung dreht sich mir der Magen um.)

a) Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Nullpunkt um einen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi[$. Zeigen Sie, dass φ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung ist.

b) Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an einer Geraden G, die durch den Nullpunkt geht. Beweisen Sie, dass ψ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung ist.

Aufgabe 2 (D+L):
(Was ist nahrhaft und kommutiert? Eine abelsche Suppe.)

a) Sei K ein Körper und V ein K–Vektorraum. Beweisen Sie, dass $\mathrm{End}_K(V)$ ein Ring mit Einselement ist. Geben Sie das Nullelement und das Einselement explizit an.

b) Zeigen Sie, dass der Ring $\mathrm{End}_K(V)$ im Allgemeinen nicht kommutativ ist. Verwenden Sie dazu die beiden Abbildungen φ und ψ aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (P): (LGS = LandesGartenSchau)
Berechnen Sie Parameterdarstellungen der Lösungsmengen der folgenden LGS über $\mathbb{Q}$. Beweisen Sie die Korrektheit ihrer Lösung jeweils, indem Sie sie in das LGS einsetzen.

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 6x_3 & = & -8 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 4 (D+L):
(Was sagt ein LGS zu seinen betrunkenen Variablen?
Ich werfe euch gleich alle raus!)
Finden Sie heraus, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ die folgenden LGS über $\mathbb{R}$ lösbar sind. Berechnen Sie in diesem Fall die Lösungsmenge und verifizieren Sie Ihre Antwort durch Einsetzen.

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & = & a \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & b \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & a \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 5 ($\star$): (Wetten, dass ...?)

Eine Zahlenanordnung

a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_7	a_8
a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

mit $a_1, a_2, \ldots, a_{16} \in \mathbb{Q}$ heißt ein **magisches Quadrat**, wenn die Summe der Zeilen, der Spalten und der beiden Diagonalen jeweils die gleiche Zahl ergibt.

a) Beweisen Sie, dass die Menge der magischen Quadrate $q = (a_1, \ldots, a_{16})$ ein $\mathbb{Q}$–Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{16}$ ist.

b) Finden Sie ein magisches Quadrat q_1, in dem 12 Nullen und 4 Einsen vorkommen.

c) Finden Sie ein magisches Quadrat q_2, in dem nur paarweise verschiedene positive ganze Zahlen vorkommen.

d) Erklären Sie, wie man mit b) und c) zu jeder ganzen Zahl d ein magisches Quadrat $q \in \mathbb{Z}^{16}$ finden kann, dessen Zeilen–, Spalten– und Diagonalsummen gleich d sind.

e) Zeigen Sie, dass man bei einem magischen Quadrat auch verlangen kann, dass die vier Ecken sowie die vier mittleren Felder die gleiche Summe haben. Kann man weitere Bedingungen verlangen? Wie viele?