Musterlösung zu Blatt 1, Aufgabe 6, LinA I, WS 2002/03

Aufgabe 6:

Zwei Cowboys treiben gemeinsam ihre x Kühe in die Stadt und verkaufen sie zu je x Dollar. Für den Erlös erwerben sie eine ungerade Anzahl von Schafen zu je 12 Dollar, und der Rest reicht gerade noch für ein Lamm. Dem Cowboy, der beim Teilen das Lamm erhält, schenkt der andere zum Ausgleich seine Mundharmonika. Was kostet die Mundharmonika?

Antwort: Die Mundharmonika kostet 4 Dollar!

Beweis.

Wie schon in der Globalübung vorgestellt, ergeben sich aus obigem Text die folgenden Gleichungen:

$$x^2 = (2k-1) \cdot 12 + y \tag{1}$$

$$y = 12 - 2z, \tag{2}$$

wobei $2k-1$ mit $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ die ungerade Anzahl von Schafen, y den Preis für ein Lamm (also $1 \leq y \leq 11$) und z den Wert der Mundharmonika bezeichnen sollen.
Einsetzen von (2) in (1) liefert außerdem die Gleichung

$$x^2 = 24k - 2z \tag{3}$$

Rechnen modulo 12 liefert für Gleichung (1):

$$x^2 \equiv y \mod 12,$$

also $\underline{y \in \{1,\, 4,\, 9\}}$ $\quad$ ($y = 0$ ist nicht möglich wegen $1 \leq y \leq 11$).
Mit Gleichung (2) folgt dann daraus sofort, daß $\underline{2z \in \{3,\, 8,\, 11\}}$.
Wenn man nun zeigen könnte, daß $2z$ gerade ist – z.B. mit Hilfe von Gleichung (3) –, so wäre natürlich $2z = 8$ die einzig mögliche Lösung und wir wären fertig...
Problem: Man kann sich nicht sicher sein, ob z eine natürliche Zahl ist. Man kann also nicht einfach Gleichung (3) durch 2 teilen und dann genauere Aussagen modulo 12 bekommen...
Deshalb benötigen wir noch eine weitere Vorüberlegung:

Bemerkung: *Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$x^2 \equiv 0 \mod 4 \quad \textit{oder} \quad x^2 \equiv 1 \mod 4.$$

Beweis (der Bemerkung): Sei also $x \in \mathbb{Z}$.
Ist x gerade, also von der Form $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, so folgt $x^2 = (2k)^2 = 4k^2 \equiv 0 \mod 4$.
Ist x ungerade, also von der Form $x = 2k-1$, $k \in \mathbb{Z}$, so folgt $x^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4 \cdot (k^2 - k) + 1 \equiv 1 \mod 4$. $\square$

Betrachten wir nun Gleichung (3) modulo 4: (beachte: $-2z \equiv 2z \mod 4$)

$$x^2 \equiv 2z \mod 4$$

Mit der eben gezeigten Bemerkung folgt also

$$2z \equiv 0 \mod 4 \quad \textit{oder} \quad 2z \equiv 1 \mod 4,$$

also $\underline{2z \in \{0,\, 1,\, 4,\, 5,\, 8,\, 9\}}$.
Zusammen mit dem schon gezeigten $2z \in \{3,\, 8,\, 11\}$ bleibt also als einzige mögliche Lösung $2z = 8$, d.h. die Mundharmonika kostet 4 Dollar.

$\square$