Lineare Algebra I
Übungsblatt 15

Aufgabe 1 ($\star$): (Kleiner Fundamentalsatz der Esoterik: Die Transformation des Duals ist die Inverse der Transposition.)
Sei K ein Körper, V ein endlich–dimensionaler K–Vektorraum, und seien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ zwei Basen von V. Zeigen Sie:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{W}^\star}^{\mathcal{V}^\star} = \left(\left(\mathcal{T}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} \right)^{tr} \right)^{-1}$$

Aufgabe 2 ($\star$): (Klein φ macht auch Mist!)
Sei K ein Körper, sei V ein K–Vektorraum, und sei $U \subseteq V$ ein K–Untervektorraum. Finden Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Restklassenvektorraums einen Isomorphismus

$$\varphi : \mathrm{Ann}_{V^\star}(U) \to (V/U)^\star.$$

Aufgabe 3 ($\star$): (Ein paradoxer Vektorraum!)
Sei K ein Körper und sei $V = K^{(\mathbb{N})}$ der K–Vektorraum der endlichen Folgen von Elementen aus K (vgl. Beispiel 7.8).

a) Zeigen Sie, dass die Elemente $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i\text{–te Stelle}}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, 0, \ldots)$ mit $i \geq 1$ eine K–Basis von V bilden.
b) Beweisen Sie, dass für jedes $i \geq 1$ der Untervektorraum $U_i = \langle e_i, e_{i+1}, \ldots \rangle$ von V isomorph zu V ist.
c) Sei $U \subseteq V$ ein endlich–dimensionaler Untervektorraum. Beweisen Sie, dass V/U isomorph zu V ist.

Aufgabe 4 ($\star$): (Emmy Noether forever!)
Sei K ein Körper, V ein K–Vektorraum, und seien $U, W \subseteq V$ zwei Untervektorräume mit $U \subseteq W \subseteq V$.

a) Zeigen Sie, dass man W/U in natürlicher Weise als Untervektorraum von V/U betrachten kann, d. h. finden Sie eine kanonische injektive K–lineare Abbildung.
b) Konstruieren Sie einen Isomorphismus von K–Vektorräumen

$$(V/U) \big/ (W/U) \xrightarrow{\sim} V/W.$$

Dieses Resultat heißt der **1. Noethersche Isomorphiesatz**.

Aufgabe 5 ($\star$): (Beweis durch Delegation ...)
Sei K ein Körper und seien V, W zwei K–Vektorräume. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(W^\star, V^\star)$ mit $\Phi(f) = f^\star$ ein Isomorphismus von K–Vektorräumen ist.

Aufgabe 6 ($\star$): (Annihilistische Rechenregeln)
Sei K ein Körper, seien V, W zwei K–Vektorräume, seien U, U' zwei K–Untervektorräume von V, und sei W' ein Untervektorraum von W.

a) Für jede K–lineare Abbildung $f : V \to W$ gilt
$f^\star(\mathrm{Ann}_{W^\star}(W')) = \mathrm{Ann}_{V^\star}(f^{-1}(W'))$.

b) Es gilt $\mathrm{Ann}_{V^\star}(U + U') = \mathrm{Ann}_{V^\star}(U) \cap \mathrm{Ann}_{V^\star}(U')$.

c) Es gilt $\mathrm{Ann}_{V^\star}(U \cap U') = \mathrm{Ann}_{V^\star}(U) + \mathrm{Ann}_{V^\star}(U')$.

Aufgabe 7 ($\star$): (Großer Fundamentalsatz der Esoterik: Das Dual der Komposition mit dem Inversen ist die Komposition des Duals mit dem Dual der Inversen — die Identität.)
Sei K ein Körper, seien V, W, U drei K–Vektorräume, und seien $f : V \to W$ sowie $g : W \to U$ zwei K–lineare Abbildungen.

a) Es gilt $(g \circ f)^\star = f^\star \circ g^\star$.

b) Es gilt $(id_V)^\star = id_{V^\star}$.

c) Ist f invertierbar, so gilt $(f^{-1})^\star = (f^\star)^{-1}$.

Aufgabe 8 ($\star$): (Die Dualität von Yin und Jang)
Sei K ein Körper, seien V, W zwei K–Vektorräume, und sei $f : V \to W$ eine K–lineare Abbildung.

a) Genau dann ist f injektiv, wenn $f^\star$ surjektiv ist.

b) Genau dann ist f surjektiv, wenn $f^\star$ injektiv ist.

Aufgabe 9 ($\star$): (Das Fünferlemma)
Sei K ein Körper, seien $V_1, \ldots, V_5, W_1, \ldots, W_5$ K–Vektorräume und sei

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & V_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & V_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & V_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & V_5 \arrow[d, "f_5"] \\
W_1 \arrow[r] & W_2 \arrow[r] & W_3 \arrow[r] & W_4 \arrow[r] & W_5
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von K–linearen Abbildungen mit exakten Zeilen.

a) Sind f_2, f_4 injektiv und ist f_1 surjektiv, so ist f_3 injektiv.

b) Sind f_2, f_4 surjektiv und ist f_5 injektiv, so ist f_3 surjektiv.

c) Sind f_1, f_2, f_4, f_5 bijektiv, so ist auch f_3 bijektiv.

Aufgabe 10 ($\star$): (Die Eulersche Gleichung)
Sei K ein Körper und sei

$$0 \xrightarrow{f_0} V_0 \xrightarrow{f_1} V_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_n} V_n \xrightarrow{f_{n+1}} 0$$

ein Komplex endlich–dimensionaler K–Vektorräume. Für $i = 0, \ldots, n$ sei $H_i = \mathrm{Kern}(f_{i+1})/\mathrm{Bild}(f_i)$ die i–**te Homologie** des Komplexes. Beweisen Sie die Formel

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_K(V_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_K(H_i).$$