Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: 5. Mai 2003, 12:00 Uhr

Lineare Algebra II
Übungsblatt 1

Aufgabe 1: (Neue Werte braucht das Land)

Bestimmen Sie alle (komplexen) Eigenwerte der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \tag{1}$$

Aufgabe 2: (Aus Eins mach keins)

Eine Matrix $A \in Mat_n(K)$ heißt nilpotent, wenn ein $r \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^r = 0$. Zeigen Sie:
a) Eine nilpotente Matrix hat 0 als einzigen Eigenwert.
b) Eine Matrix $A \in Mat_n(K)$ ist nilpotent, wenn A ähnlich ist zu einer Matrix der Gestalt $B = (\beta_{\mu\nu}) \in Mat_n(K)$ mit $\beta_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \geq \nu$, d.h.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \beta_{(n-1)n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(sogenannte echte obere Dreiecksmatrix)

Aufgabe 3:

Beweisen oder widerlegen Sie:
a) Für eine Matrix $A \in Mat_n(K)$ gilt $A^2 = I_n$ genau dann, wenn A ähnlich ist zu einer Diagonalmatrix mit Diagonalelementen 1 oder -1. (Tipp: Betrachten Sie $x - Ax$ für $x \in K^n$)
b) Die Eigenwerte von A^2 mit $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ sind nicht-negativ.
c) Jede Matrix $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ mit $A^2 = -I_n$ ist diagonalisierbar.

Aufgabe 4: (Konstruktion von Eigenräumen – Eigenheimzulage?)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+3i & 1-i & 1-i & 1-i \\ 1-i & 1+3i & 1-i & 1-i \\ 1-i & 1-i & 1+3i & 1-i \\ 1-i & 1-i & 1-i & 1+3i \end{pmatrix} \tag{3}$$

Aufgabe 5: (*)

Sei V ein reeller Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $f \circ f = f$ und $f \neq 0$. Bestimmen Sie die Menge S_f aller Eigenwerte von f und zeigen Sie

$$V = \bigoplus_{\lambda \in S_f} \mathrm{Eig}(f, \lambda)\ . \tag{4}$$