Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: Montag, 21. Juli 2003, 12:00 Uhr

Lineare Algebra II - Übungsblatt 11

Aufgabe 1: Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f\colon \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ die affine Abbildung $v \mapsto v_0 + g(v)$ mit $v_0 \in V$ und dem Endomorphismus $g\colon V \to V$. Sei weiter 1 kein Eigenwert der Abbildung g. Zeigen Sie, dass f genau einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 2: Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Eine affine Abbildung f heißt *Dilatation*, wenn es ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ gibt mit $f(v) = v_0 + \lambda v$. Zeigen Sie, dass f die Identität sein muss, wenn f wenigstens zwei Fixpunkte besitzt.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die Seitenhalbierenden eines Dreiecks sich im Verhältnis 1 : 2 schneiden.

Aufgabe 4: Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ wird mit folgenden Definitionen zu einer sogenannten *projektiven Ebene*: Ein *projektiver Punkt* entspricht einem ein-dimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, eine *projektive Gerade* einem zwei-dimensionalen Untervektorraum. Zeigen Sie:
1. Zwei projektive Punkte $P \neq Q$ sind enthalten in einer und nur in einer projektiven Gerade.
2. Zwei projektive Geraden $g \neq h$ schneiden sich in einem und nur in einem projektiven Punkt.
Statt *sind enthalten* oder *schneiden sich* sagt man auch *sind inzident mit*. Was passiert mit den Aussagen 1 und 2, wenn man die Konzepte Punkt und Gerade vertauscht? Welche Bedeutung hat *Parallelität* in dieser projektiven Ebene?

Aufgabe 5: (*) Beim Aufräumen des Dachbodens von Oma Störtebecker fand Martin einen vergilbten Brief: Liebe Lisa, auf der Insel Rügen habe ich unseren Schatz vergraben. Gehe vom Galgen zum Eichenbaume und zähle dabei die Schritte, drehe Dich dann nach links und gehe dieselbe Anzahl Schritte. Merke Dir den Punkt, an dem Du ankommst. Starte dann erneut vom Galgen und gehe auf den Fichtenbaum zu, zähle die Schritte und drehe Dich am Fichtenbaume nach rechts. Gehe dann dieselbe Anzahl Schritte. Von dort gehe den halben Weg auf den gemerkten Punkt zu - dort findest Du unseren Schatz. Dein Klaus.

Martin fährt zur Insel Rügen. Den Galgen gibt es nicht mehr, aber er findet noch die Eiche und die Fichte. Wie kann er die Stelle finden, an der der Schatz vergraben wurde?

Aufgabe 6: (*) Eine *abstrakte affine Ebene* besteht aus einer Menge, deren Elemente *Punkte* heißen, und aus nichtleeren Teilmengen, den *Geraden*, so dass die folgenden Axiome gelten:
1. Zwei Punkte $P \neq Q$ sind in einer und nur in einer Geraden enthalten.
2. Zu jeder Geraden g und jedem Punkt $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade h, die P enthält und die parallel zu g ist. (Zwei Geraden sind *parallel*, wenn sie identisch bzw. disjunkt sind.)
3. Es gibt drei Punkte, die nicht in einer Gerade enthalten sind.
Beantworten Sie die folgenden Fragen.
a) Kann es Geraden geben, die nur aus einem Punkt bestehen?
b) Enthalten zwei verschiedene Geraden dieselbe Anzahl Punkte? (Gibt es eine Bijektion zwischen den Geraden?)
c) Wenn alle Geraden jeweils aus n Punkten bestehen, wie viele Punkte gibt es in der abstrakten affinen Ebene?
Geben Sie bei jedem Schritt der Begründungen explizit an, welches Axiom Sie verwenden.

(Es kann hilfreich sein, zu einer Geraden g das Geradenbündel aus allen dazu parallelen Geraden zu untersuchen.)