Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: Montag, 28. Juli 2003, 12:00 Uhr

Lineare Algebra II - Übungsblatt 12

Aufgabe 1: (Was ist ein Polarbär? - Ein rechteckiger Bär nach einer Koordinatentransformation) Zeigen Sie:
a) Die Ellipsengleichung

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(Koordinatenursprung im linken Brennpunkt; Abstand der Brennpunkte $2c$.) ist äquivalent zur *Brennpunktsgleichung*

$$x^2(1-e^2) - 2e^2sx + y^2 = e^2s^2 \ ,$$

wobei $e = \frac{c}{a}$ (*Exzentrizität*) und $s = \frac{b^2}{c}$ (Abstand zwischen Leitlinie und Brennpunkt).
b) In Polarkoordianten, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$, vereinfacht sich die Brennpunktsgleichung zunächst zu

$$r = e(x+s) \qquad \text{falls } x \geq -s$$

und schließlich zu

$$r = \frac{e\,s}{1 - e\cos\varphi} \ .$$

Warum ist die Einschränkung $x \geq -s$ unwesentlich? Zeichnen Sie die Ellipse für $a = 2, b = 1$ (Wie groß ist c?) und deuten Sie in der Zeichnung an, wie die Polarkoordinaten gemessen werden.

Aufgabe 2: (Was ist schwarz-weiß und füllt die ganze Ebene? - Eine Piano-Kurve) Beschreiben Sie die geometrische Gestalt der Kurve

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + axy + y^2 = 1\}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: (Das Dreieck - eine nur in der Mathematik harmlose Konstruktion) Zeigen Sie, dass jede Gleichung einer Quadrik im $\mathbb{C}^n$ sich durch Hauptachsentransformation auf eine der folgenden Gestalten bringen lässt:

$$\begin{aligned} y_1^2 + \ldots + y_m^2 &= 0 \\ y_1^2 + \ldots + y_m^2 &= 1 \\ y_1^2 + \ldots + y_m^2 + 2y_{m+1} &= 0 \ . \end{aligned}$$

Dabei ist $m \leq n$.

Aufgabe 4: (Treffen sich zwei Geraden im Unendlichen. „Jetzt mach' aber mal einen Punkt.“)
a) Sei g eine projektive Gerade in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es einen eindeutig bestinmmten projektiven Punkt $P(g) = (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ gibt mit

$$g = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\} \ .$$

Zeigen Sie auch, aus $g \neq h$ folgt $P(g) \neq P(h)$.
b) Zeigen Sie: Wenn die paarweise verschiedenen projektiven Geraden $g_1, g_2, g_3 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ einen gemeinsamen Punkt haben, so liegen die projektiven Punkte $P(g_1), P(g_2), P(g_3)$ auf einer projektiven Geraden. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

[Aufgabe 5 auf Seite 2]

Aufgabe 5: (*) (Treffen sich zwei Geraden im Unendlichen. „Das nächste Mal gibst Du einen aus.") Eine *abstrakte projektive Ebene* besteht aus einer Menge, deren Elemente *Punkte* heißen, und aus nichtleeren Teilmengen, den *Geraden*, so dass die folgenden Axiome gelten:
1. Zwei Punkte $P \neq Q$ sind in einer und nur in einer Geraden enthalten.
2. Zwei Geraden $g \neq h$ enthalten einen und nur einen gemeinsamen Punkt.
3. Es gibt drei Punkte, die nicht in einer Gerade enthalten sind.
4. Jede Gerade enthält mindestens drei Punkte.
Beantworten Sie die folgenden Fragen.
a) Enthalten zwei verschiedene Geraden dieselbe Anzahl Punkte? (Gibt es eine Bijektion zwischen den Geraden?)
b) Wenn alle Geraden jeweils aus n Punkten bestehen, wie viele Punkte gibt es in der abstrakten projektiven Ebene?
c) Kann es eine abstrakte projektive Ebene mit weniger als sieben Punkten geben? d) Gibt es eine abstrakte projektive Ebene mit genau sieben Punkten? Geben Sie bei jedem Schritt der Begründungen explizit an, welches Axiom Sie verwenden.

(Es kann hilfreich sein, zu einem Punkt P das Geradenbüschel aus allen Geraden durch P zu untersuchen.)