Lineare Algebra II - Übungsblatt 2

Aufgabe 1: (Die Karten werden neu gemischt.)
Sei σ eine beliebige Permutation der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass die Diagonalmatrizen

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \delta_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \tag{1}$$

ähnlich sind.

Aufgabe 2: (Mathematiker können Hinrichtungen rückgängig machen.)
Sei $A \in Mat_n(K)$ nilpotent, $r := \min\{k \in \mathbb{N} \mid A^k = 0\}$ und $v \in K^n$ mit $A^{r-1}v \neq 0$. Zeigen Sie
a) Die Familie $\mathcal{V} := (v, Av, \ldots, A^{r-1}v)$ ist linear unabhängig.
b) Der Unterraum $U := \langle v, Av, \ldots, A^{r-1}v \rangle$ ist A-invariant.
c) Nach Aufgabenteil b) induziert die Matrix A einen Endomorphismus $A' \colon U \to U$. Berechnen Sie die darstellende Matrix von A' bezüglich $\mathcal{V}$.

Aufgabe 3: (Der Unterschied zwischen Polynomen und Menschen? Jedes Polynom hat Charakter.)
Beweisen oder widerlegen Sie:
a) Ist λ ein Eigenwert einer invertierbaren Matrix $A \in Mat_n(K)$, so ist $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} ist ein Eigenwert von A^{-1}.
b) Die obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
c) Das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

ist $\det(\lambda I_n - A) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$.
d) Die Ableitung $D(f) := f'$ definiert einen Endomorphismus $D \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[x])$, der genau einen Eigenwert besitzt.

Aufgabe 4: (Einen Eigenwert bitte - gerührt, nicht geschüttelt.)
a) Was ist eine Drehung des dreidimensionalen Raums? Erklären Sie die Begriffe *Achse* und *Drehwinkel*.
b) Durch welche Matrizen werden Drehungen im $\mathbb{R}^3$ beschrieben, deren Drehachse die x_3-Achse ist?
c) Welche Eigenwerte und Eigenräume hat eine Drehmatrix aus Aufgabenteil b)? Unterscheiden Sie die beiden Fälle, ob der Drehwinkel 180° beträgt oder nicht.

Aufgabe 5: (*) (Why do you call a TV program a medium? It is neither rare nor well done.)
Programmieren Sie den Trigonalisierungsalgorithmus 16.22 in MAPLE.