Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: 19. Mai 2003, 12:00 Uhr

Lineare Algebra II - Übungsblatt 3

Aufgabe 1: (Spieglein, Spieglein an der Wand - Welche Basis ist die schönste im ganzen Land?) Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Endomorphismus mit $f \circ f = id$.
a) Beschreiben Sie die Abbildung geometrisch (Tipp: Unterscheiden Sie die Fälle Identität, Punktspiegelung am Ursprung und Schrägspiegelung an einer Geraden durch den Ursprung).
b) Geben Sie für jeden der drei Fälle eine Basis an, in der die darstellende Matrix eine möglichst einfache Gestalt hat. Geben Sie auch die Matrizen an.

Aufgabe 2: (Formbeispiel für ein mathematisches Theorem: Wenn etwas klein, rund und rot ist mit einem Kirschkern im Innern, dann ist es eine Kirsche.)
Sei V ein K-Vektorraum und $\phi: V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie
a) Die Abbildung $\Phi: K[x] \to \mathrm{End}_K(V), f \mapsto f(\phi)$, insbesondere $1 \mapsto id_V$, ist K-linear und ein Ring-Homomorphismus.
b) $K[\phi] := \{f(\phi) \mid f \in K[x]\}$ ist ein kommutativer Unterring von $\mathrm{End}_K(V)$.
c) Sei nun insbesondere $\dim_K V = n < \infty$. Dann existiert ein normiertes Polynom p vom Grad höchstens n^2 mit $p(\phi) = 0$ (Tipp: Betrachten Sie $id, \phi, \phi^2, \ldots, \phi^{n^2}$.)

Aufgabe 3: (Ein Mathe-Prof ist ein Mensch, der im Schlaf anderer Leute spricht.)
Die Spur von $A = (a_{ij}) \in Mat_n(K)$ ist definiert als $\mathrm{Spur}\,(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Zeigen Sie
a) Die Spur ist eine Linearform $Mat_n(K) \to K$.
b) Für $A, B \in Mat_n(K)$ gilt $\mathrm{Spur}\,(A\,B) = \mathrm{Spur}\,(B\,A)$.
c) Folgern Sie für invertierbares B, dass $\mathrm{Spur}\,(A) = \mathrm{Spur}\,(B\,A\,B^{-1})$.
d) Ist $\mathrm{Spur}\,(A\,B) = 0$ für alle $B \in Mat_n(K)$, so folgt $A = 0$.

Aufgabe 4 (*): ($1+1=3$ for sufficiently large one's.)
Sei $A \in Mat_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass die unendliche Reihe

$$\exp(A) := I + A + \frac{A^2}{2} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots$$

im folgenden Sinne konvergiert: Sei A_{ij}^k die (i,j)-te Komponente der Matrix A^k. Für jedes Indexpaar (i,j) konvergiert die Zahlenreihe

$$I_{ij} + A_{ij} + \frac{A_{ij}^2}{2} + \ldots + \frac{A_{ij}^k}{k!} + \ldots$$

(Tipp: Die Exponentialreihe konvergiert für die Zahl $\|A\| := \sum_{i,j} |a_{ij}|$. Zeigen Sie $A_{ij}^k \leq \|A\|^k$.)
Damit ist $\exp(A)$ für jedes $A \in Mat_n(\mathbb{C})$ eine wohldefinierte Matrix.

Aufgabe 5: (The number you have dialed is imaginary. Please rotate your phone by 90 degress and try again.) Verwenden Sie die Definition aus Aufgabe 4.
a) Berechnen Sie $\exp(A)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B) = \exp(B)\exp(A)$ für alle $A, B \in Mat_n(\mathbb{C})$ mit $A\,B = B\,A$.
c) Geben Sie Matrizen an mit $\exp(A)\exp(B) \neq \exp(B)\exp(A)$.