Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: Dienstag, 10. Juni 2003, 12:00 Uhr

Lineare Algebra II - Übungsblatt 6

Aufgabe 1: (Sohn: Vati, kannst Du meine Mathe-Hausfgaben machen? V: Das wäre nicht richtig! S: Du kannst es ja wenigstens versuchen.)
Sei $\Phi\colon K^2 \times K^2 \to K$ die durch $\Phi(\binom{a}{b}, \binom{c}{d}) = ad - bc$ definierte Abbildung.
a) Zeigen Sie, dass Φ eine Bilinearform ist.
b) Geben Sie die Gramsche Matrix von Φ bzgl. der Standardbasis an.
c) Beweisen Sie, dass Φ nicht ausgeartet ist.
d) Zeigen Sie, dass $\Phi(v,v) = 0$ für alle $v \in K^2$.

Aufgabe 2: (Ein Mathe-Übungsblatt zum anderen: Stör mich nicht - ich habe selbst genug Probleme.)
Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie, dass jede Bilinearform $\Phi\colon V \times V \to K$ eine eindeutige Zerlegung

$$\Phi = \Phi_{sym} + \Phi_{anti}$$

besitzt, wobei Φ_{sym} eine symmetrische und Φ_{anti} eine schiefsymmetrische Bilinearform ist.

Aufgabe 3: (Uni-Verwaltung zu den Chemikern: Warum braucht Ihr immer so teure Labors? Die Mathematiker brauchen nur Papier, Stifte und Abfalleimer... oder die Philosophen - die brauchen nur Papier und Stifte...)
Die Vektoren $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in K^3 \setminus \{0\}$ definieren die Linearformen $\varphi, \psi\colon K^3 \to K$ gemäß $\varphi((c_1, c_2, c_3)) := a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3$ und $\psi((c_1, c_2, c_3)) := b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3$.
a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi\colon K^3 \times K^3 \to K$ mit $\Phi(v,w) := \varphi(v) \cdot \psi(w)$ eine Bilinearform ist.
b) Bestimmen Sie die Gramsche Matrix von Φ bzgl. der Standardbasis des K^3.
c) Für welche $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in K^3 \setminus \{0\}$ ist Φ nicht ausgeartet?

Aufgabe 4: (Prof: Bevor ich dieses Thema beende, möchte ich Ihnen noch etwas Interessantes erzählen.)
Sei V ein euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \qquad \text{für alle } v, w \in V$$

Aufgabe 5: ("Unless x is a banana or some other such object that commutes with a.")
Sei $n \geq 2$.
a) Beweisen Sie, dass durch $\| \;\; \|_\infty\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\|(a_1, ..., a_n)\|_\infty := \max\{|a_i| : 1 \leq i \leq n\}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.
b) Zeigen Sie, dass es kein Skalarprodukt $<\,,\,>$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt mit $\|v\|_\infty = \sqrt{<v,v>}$ für $v \in \mathbb{R}^n$.
(Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 4)

Der Abgabetermin für die folgenden Aufgaben ist Montag, der 16. Juni 2003.

Aufgabe 6: Sei $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ein Endomorphismus. Wie in der Vorlesung wird durch $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(v,w) := <f(v), w>$ eine Bilinearform von $\mathbb{R}^4$ definiert.
Geben Sie ein f an, so dass Φ ein Skalarprodukt ist und seine Gramsche Matrix nur positive Einträge hat.

Aufgabe 7: Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\Phi\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform.
a) Zeigen Sie, dass $R := \{v \in V \mid v^\perp = V\}$ ein K-Untervektorraum von V ist. Er heißt *Radikal von* Φ.
b) Sei $\mathcal{V} := (v_1, ..., v_n)$ eine Basis. Bestimmen Sie das Radikal der Bilinearform $\Phi\colon V \times V \to K$ mit

$$\mathcal{G}_{\mathcal{V}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: Schreiben Sie eine MAPLE-Prozedur *SchmidtOV* ($\mathcal{V}$), die aus der vorgegebenen Basis $\mathcal{V}$ des $\mathbb{R}^n$ mit Hilfe des Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bzgl. des Standardskalarproduktes berechnet.
Wenden Sie *SchmidtOV* ($\mathcal{V}$) auf die folgenden Beispiele an:
a) Beispiel 19.13 der Vorlesung
b) $\mathcal{V}$ bestehe aus den Spalten der Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 6 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 3 \\ & & & \ddots & 2 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$