Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: Montag, 23. Juni 2003, 12:00 Uhr

Lineare Algebra II - Übungsblatt 7

Aufgabe 1: Sei V ein euklidischer Vektorraum. Für zwei Vektoren $v, w \in V \setminus \{0\}$ ist

$$\angle(v,w) := \arccos \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

der *Winkel zwischen v und w*. Eine Abbildung $f\colon V \to V$ heißt *winkeltreu*, wenn

$$f \quad \text{injektiv ist und} \qquad \angle(f(v), f(w)) = \angle(v,w) \quad \text{für alle } v, w \in V \setminus \{0\}$$

gilt.

Beweisen Sie, dass f winkeltreu ist, wenn es eine orthogonale $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g\colon V \to V$ und ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit $f = \lambda \cdot g$.

Aufgabe 2: Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $f\colon V \to V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) f ist orthogonal.

b) Für alle $v \in V$ gilt $\|f(v)\| = \|v\|$.

c) Für eine beliebige Basis $\mathcal{V} = (v_1, ..., v_n)$ von V gilt

$$\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle \qquad \text{für } i, j = 1, ..., n.$$

Aufgabe 3: Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Abbildung. Beschreiben Sie f geometrisch. (vgl. Beispiel 20.6 der Vorlesung.)

Aufgabe 4: Vervollständigen Sie den Beweis des *Satzes vom Fussball* (s. Korollar 20.7): Ist $f\colon S^2 \to S^2$ längentreu, so ist $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(v) := \|v\|\, f(v/\|v\|)$ für $v \neq 0$ und $F(0) := 0$ linear und längentreu.

Aufgabe 5: (*) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine längentreue Abbildung in dem Sinne

$$\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\| \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n \ .$$

Zusätzlich gelte $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|f(v)\| = \|v\|$ (vgl. *längentreu* in der Vorlesung).

(b) Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$.

(c) Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|f(v+w) - f(v) - f(w)\|^2 = 0$.

(d) Die Abbildung f ist $\mathbb{R}$-linear.

Aufgabe 6: (*) Implementieren Sie den Algorithmus aus Korollar 21.7 der Vorlesung als MAPLE-Prozedur ONBEV(M). Wenden Sie die Prozedur auf die Matrizen

$$M_1 := \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -14/15 & 2/15 \\ 2/3 & 2/15 & -11/15 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_2 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

an und vergleichen Sie die Ausgabe mit Beispiel 21.8 der Vorlesung.