Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: Montag, 7. Juli 2003, 12:00 Uhr

Lineare Algebra II - Übungsblatt 9

Aufgabe 1: Ein binärer Code $C \subseteq \mathbb{F}_2^6$ sei gegeben durch die Generatormatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Erstellen Sie das sogenannte *Standard Array* - das ist eine Tabelle, in der aller Wörter des $\mathbb{F}_2^6$ aufgelistet sind - nach folgenden Instruktionen:
1. In die erste Zeile schreiben Sie die Codewörter, wobei $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ganz links stehen soll.
2. Beginnen Sie die nächste Zeile mit einem Wort, das unter allen noch nicht aufgelisteten Wörtern ein minimales Hamming-Gewicht aufweist. (erster Eintrag der zweite Zeile z.B. $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$)
3. Vervollständigen Sie die Zeile: Der Eintrag in der j-ten Spalte ist die Summe des ersten Wortes derselben Zeile und des ersten (Code-)Wortes derselben Spalte.
4. Wiederholen Sie die Schritte 2 und 3 bis alle Wörter in der Tabelle aufgelistet sind.

Bei richtiger Durchführung liefert dieses Verfahren eine (rechteckige) Tabelle, in der jedes Wort genau einmal aufgelistet ist. Warum gibt es keine doppelten Einträge? Warum ist die Tabelle rechteckig? Welche linear algebraische Struktur besitzt die Menge der Wörter der ersten Zeile? Welche algebraische Struktur besitzt die Menge der Wörter einer anderen Zeile? Wie kann man mit dieser Tabelle decodieren, wenn man annimmt, dass *weniger Bitfehler wahrscheinlicher sind als mehr Bitfehler*?

Decodieren Sie die empfangenen Nachrichten
a) (1,1,0,1,0,1)
b) (0,1,1,0,1,1)
c) (0,1,1,1,0,0)

Aufgabe 2: Sei $C \subseteq \mathbb{F}_3^3$ ein linearer Code mit Generatormatrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Beschreiben Sie die Geometrie von $\mathbb{F}_3^3$: Wieviele Punkte gibt es? Wieviele Punkte liegen auf einer Geraden? Wieviele Geraden durch den Nullpunkt gibt es?
b) Stellen Sie C graphisch dar.
c) Beschreiben Sie den dualen Code von C sowohl algebraisch als auch geometrisch.
d) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt einen nichttrivialen Ringhomomorphismus $\mathbb{F}_3^3 \to \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3:
a) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ und sei $\mathcal{V}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die duale Basis von V^*. Sei $\phi_\mathcal{V}\colon V \to V^*$ die lineare Abbildung, die durch $v_i \mapsto v_i^*$, $1 \le i \le n$ definiert ist. Zeigen Sie, dass $\phi_\mathcal{V}$ von der Basiswahl abhängt. Mit anderen Worten, es gibt eine zweite Basis $\mathcal{W}$ mit $\phi_\mathcal{V} \neq \phi_\mathcal{W}$.
b) Sei nun zusätzlich auf V ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\phi_\mathcal{V} = \phi_\mathcal{W}$ für alle Orthonormalbasen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ gilt.
c) Teil a) besagt, dass i.a. $\phi_\mathcal{V}$ erst definiert werden kann, nachdem eine Basis $\mathcal{V}$ gewählt worden ist. Dahingegen besagt Teil b), dass im Falle eines euklidischen Vektorraums die Abbildung $\phi_\mathcal{V}$ unabhängig von der Wahl einer Orthonormalbasis $\mathcal{V}$ ist. Definieren Sie $\phi = \phi_\mathcal{V}$ ohne eine Orthonormalbasis zu erwähnen.

Aufgabe 4: Sei $K = \mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen.
a) Aus wie vielen Vektoren besteht der Vektorraum K^n?
b) Wie viele verschiedene Linearkombinationen kann man aus i linear unabhängigen Vektoren in K^n bilden?
c) Wie viele invertierbare Matrizen gibt es in $Mat_K(n)$?

Aufgabe 5: (*) (Auch für MAPLE-Anfänger geeignet!!! Programm auf der LinA-II-Homepage.) Verwenden Sie das MAPLE-Programm BSC, dass den binären symmetrischen Kanal simuliert. Ein binärer symmetrischer Kanal überträgt ein Bit nach dem anderen (Eingabe: 0 oder 1, Ausgabe: 0 oder 1). Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bit fehlerhaft übertragen wird ($0 \mapsto 1$ bzw. $1 \mapsto 0$) sei p.
a) Studieren Sie die Prozedur *kanaltest(n,p)*. Testen Sie MAPLEs Zufallszahlengenerator, indem Sie 10.000 Binärsymbole durch den Kanal mit Bitfehlerwahrscheinlichkeit $p = 0,1$, $p = 0,15$, $p = 0,2, \ldots$, $p = 0,45$ senden. Wie viele der empfangenen Bits sind fehlerhaft? (Tipp: Entfernen Sie die ersten beiden *print*-Befehle bevor Sie größere Bit-Anzahlen verwenden.)
b) Senden Sie 10.000 Datenbits durch den Kanal mit Hilfe des Wiederholungscodes $1 \mapsto 111$, $0 \mapsto 000$; d.h. es werden 30.000 Codebits durch den Kanal gesendet. Decodieren Sie die empfangenen Dreierblöcke mit einer Mehrheitsentscheidung (z.B. $aaa \mapsto a$,$aba \mapsto a$, $abb \mapsto b$). Welcher Anteil der decodierten Datenbits ist fehlerhaft? Verwenden Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten $p = 0,1, \ldots, p = 0,45$. (Tipp: Prozedur *kanal3codiert*)
c) Wie Aufgabenteil b), aber mit dem Wiederholungscode $1 \mapsto 11111$.
Stellen Sie die Ergebnisse in einem (!) Diagramm graphisch dar.