Algebra I
Übungsblatt 1

The quantitative analysis of symmetry is called group theory.
(Encyclopaedia Britannica: symmetry in physics)

Der Begriff der Gruppe, einer der ältesten und tiefsten mathematischen Begriffe überhaupt, ist durch Abstraktion hervorgegangen aus dem der Transformationsgruppe.
(Hermann Weyl: Gruppentheorie und Quantenmechanik)

Aufgabe 1: Sei G eine multiplikative Gruppe mit einer geraden Anzahl von Elementen. Zeigen Sie: Es gibt ein Element $1 \neq g \in G$, das zu sich selbst invers ist. (Mit anderen Worten, es gibt mindestens zwei selbstinverse Elemente. Kann man noch etwas mehr über die Anzahl der selbstinversen Elemente sagen?)

Aufgabe 2: Sei G eine multiplikative Gruppe mit 12 Elementen, darunter die Elemente a und b sowie das neutrale Element e. Es gelte

$$a^k \neq e \quad \text{für } 1 \leq k < 6 , \quad a^6 = b^2 = e , \quad a\,b = b\,a^{-1} .$$

Stellen Sie die Gruppentafel auf.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass eine Gruppe nicht die Vereinigung zweier echter Untergruppen sein kann.

Definition. Sei $F \subseteq \mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$ eine Punktmenge im affinen Raum. Eine **Symmetrie** von F ist eine orthogonale Abbildung $f\colon \mathbb{A}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$, so dass $f(F) = F$.

Aufgabe 4: Sei P eine Ecke eines Würfels. Beschreiben Sie die sechs Symmetrien eines Würfels, die den Fixpunkt P besitzen. Zeigen Sie, dass ein Würfel genau 48 Symmetrien besitzt.

Aufgabe 5:

a) Beschreiben Sie die Menge D_3 aller Symmetrien des regelmäßigen Dreiecks mit Ecken $(1,0)$, $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ und $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ in $\mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie, dass D_3 eine Untergruppe aller othogonalen Abbildungen ist. Geben Sie die Verknüpfungstafel an.

b) Geben Sie einen Isomorphismus $D_3 \cong S_3$ an.

c) Formulieren Sie zwei Verallgemeinerungen der Aufgabenstellung a).