Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabe: Briefkasten 63, 6. Januar 2004, 12:00 Uhr

Algebra I
Übungsblatt 10

*However, Dedekind was disappointed in the low enthusiasm for ideals shown by other mathematicians, and in 1877 he attempted a more popular approach. Dedekind (1877) [*Theory of Algebraic Integers*] is nearly perfect for the modern reader–clear, concise, and well motivated–but apparently it was still too abstract for his contemporaries. The theory of ideals did not really catch on until it was given a new exposition by Hilbert (1897) [*Zahlbericht, in Gesammelte Abhandlungen*], ...*

In the meantime, Dedekind made several other great contributions to mathematics that were slowly taking root:

- *the theory of real numbers as "Dedekind cuts,"*
- *the theory of Riemann surfaces as algebraic function fields,*
- *the characterization of natural numbers as an "inductive set."*

What these contributions had in common, and what made them hard for Dedekind's contemporaries to grasp, was the idea of treating infinite sets as mathematical objects. Dedekind actually started doing this in 1857, when he treated congruence modulo n as the arithmetic of residue classes

$$\begin{aligned} 0 \bmod n &= \{0, \pm n, \pm 2n, \ldots\}, \\ &\vdots \\ n-1 \bmod n &= \{n-1, n-1 \pm n, n-1 \pm 2n, \ldots\} \end{aligned}$$

... The idea of adding and multiplying sets by adding or multiplying representatives transfers directly to Dedekind cuts and, with some modification, to ideals and Riemann surfaces. Dedekind hoped that his cornucopia of applications would convince his colleagues of the value of the idea that "mathematical objects are sets," but it was a hard idea to sell. At first he was joined only by Cantor, who took up the theory of infinite sets as enthusiastically as Dedekind took up the applications.

(John Stillwell: *Mathematics and its History*)

Aufgabe 1: Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{Z}_2[x]$ vom Grad 1,2,3 oder 4.

Aufgabe 2: Sei $\varphi_n\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $c \mapsto [c]_n$, der kanonische Epimorphismus. Dann ist

$$\psi_n\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_n[x] \quad , \quad \sum_{k=0}^{d} c_k x^k \mapsto \sum_{k=0}^{d} [c_k]_n x^k \ ,$$

ein Ringhomomorphismus.

a) Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ mit $\deg f = d$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $[c_d]_n \neq 0$. Welche der folgenden Kombinationen sind möglich, welche unmöglich?

	f reduzibel	f irreduzibel
$\psi_n(f)$ reduzibel		
$\psi_n(f)$ irreduzibel		

b) Sei $f(x) = x^4 + 15x^3 + 7 \in \mathbb{Z}[x]$. Ist $\psi_3(f)$ irreduzibel? Ist $\psi_5(f)$ irreduzibel? Ist f irreduzibel?

Aufgabe 3: Wahr oder falsch?

a) Jedes Polynom über einem Körper K hat eine Nullstelle in K.

b) Jedes Polynom, das irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist, ist auch irreduzibel über $\mathbb{R}$.

c) Jedes Polynom, das irreduzibel über $\mathbb{Z}$ ist, ist auch irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

d) Lineare Polynome sind irreduzibel.

e) Es gibt unendlich viele irreduzible Polynome über $\mathbb{Q}$.

f) Gilt $(f, g) = 1$ für zwei Polynome, so haben sie unterschiedlichen Grad.

g) Jedes Polynom mit Primzahlgrad ist irreduzibel.

h) Jedes Polynom, dessen Grad keine Primzahl ist, ist reduzibel.

Aufgabe 4: Richard Dedekind (1831–1916) führte Ideale und Teilbarkeit von Idealen ein, um die eindeutige Zerlegung in Primfaktoren in einigen Ringen zu gewinnen (vgl. Einführung imaginärer Zahlen, um den Hauptsatz der Algebra zu gewinnen). Seien dazu I und J Ideale eines Integritätsrings R; das Ideal I *teilt* J per Definition genau dann, wenn I das Ideal J enthält. Zeigen Sie:

a) Für $a, b \in R$ gilt $a \mid b$ genau dann, wenn für die Hauptideale $(a) \supseteq (b)$ gilt.

b) Berechnen Sie das Hauptideal einer Einheit. Was gilt für die Hauptideale zweier assozierter Elemente?

c) Was ist das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Ideale?

d) Zeigen Sie, dass die Summe zweier Ideale,

$$I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\} \ ,$$

einen größten gemeinsamen Teiler von I und J darstellt.

Aufgabe 5: Schmücken Sie Ihren Weihnachtsbaum mit einem Christbaumdodekaeder: Es besteht aus 12 regelmäßigen Fünfecken. Hinweis zum Schnittmuster: Beginnen Sie mit einem Fünfeck und den fünf angrenzenden. Basteln Sie das Dodekaeder entweder aus zwei dieser Teilmuster oder überlegen Sie sich an welcher Kante diese Teilmuster zu verbinden sind, um ein zusammenhängendes Schnittmuster zu bekommen. Wie viele Ecken, Kanten und Flächen besitzt das Dodekaeder? Vergleichen Sie diese Zahlen mit denen des Ikosaeders. Beschreiben Sie die 60 Symmetriedrehungen des Dodekaeders (vgl. Diskussion des Ikosaeders in der Übung).

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!