Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabe: Briefkasten 63, 13. Januar 2004, 12:00 Uhr

Algebra I
Übungsblatt 11

The central role played by $\mathbb{C}$ in nineteenth-century algebra can be gleaned from the fact that during this period the result that $\mathbb{C}$ is algebraically closed was called "the fundamental theorem of algebra." We still retain this terminology but only out of respect for the past, since the theorem no longer plays a central role in algebra. For one thing, we are interested also in fields of characteristic $p \neq 0$ (for example, because of their usefulness in number theory) and these can not be imbedded in $\mathbb{C}$.

(Nathan Jacobson: *Basic Algebra I*)

Aufgabe 1:

(a) Für welche $n \in \mathbb{Z}$ ist $3x^2 + 2n\,x + 12$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$?

(b) Beweisen Sie den *Rationale-Nullstellen-Test*: Ist $z/n \in \mathbb{Q}$ Nullstelle von $a_k x^k + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, so gilt $z|a_0$ und $n|a_k$.

(c) Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel über $\mathbb{Q}$?

(i) $x^3 + 2x^2 + 8x + 2$
(ii) $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$
(iii) $x^3 + x^2 + x + 1$
(iv) $x^2 + 5x + 25$
(v) $x^9 - \frac{41}{5}$
(vi) $5x^5 + 30x^4 + 42x^3 + 6x + 12$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$. Geben Sie eine $\mathbb{Q}$-Basis an.

Aufgabe 3: Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung und $\phi\colon L \to L$ ein K-Homomorphismus.

(a) Zeigen Sie, für alle $a \in L$ ist $\phi(a)$ Nullstelle des Minimalpolynoms μ_a.

(b) Bestimmen Sie alle $\mathbb{Q}$-Homomorphismen $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

(c) Bestimmen Sie alle $\mathbb{Q}$-Homomorphismen $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Aufgabe 4: Sei $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}$ nicht endlich ist.

Aufgabe 5: Zeigen Sie:

(a) Jedes Polynom in $\mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ besitzt höchstens endlich viele reelle Nullstellen.

(b) Die Menge $\mathbb{Q}[x]$ der Polynome mit rationalen Koeffizienten ist abzählbar.

(c) Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar.

(d) Es gibt transzendente Zahlen in $\mathbb{R}$.