Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabe: Briefkasten 63, 28. Oktober 2003, 12:00 Uhr

Algebra I
Übungsblatt 2

Many [problems] are introduced not so much to be solved as to be tackled. The value of a problem is not so much in coming up with the answer as in the ideas and attempted ideas it forces on the would-be solver. ... Problems, which for some reason or other seem hard to me, are often starred (sometimes with two stars). However, even here there will be no agreement among mathematicians; many will feel that some unstarred problems should be starred and vice versa.)

(I. N. Herstein: Topics in Algebra)

Aufgabe 1: In beiden (voneinander unabhängigen) Aufgabenteilen sei G eine multiplikative Halbgruppe.

a) Es gebe ein linksneutrales Element e, d.h. $e\,a = a$ für alle $a \in G$, und zu jedem $a \in G$ gebe es ein linksinverses Element a', also $a'\,a = e$. Zeigen Sie, dass dann G eine Gruppe ist.

b) Die Gleichungen $a\,x = b$ und $y\,c = d$ seien für alle $a, b, c, d \in G$ eindeutig lösbar. Zeigen Sie, dass dann G eine Gruppe ist.

(Tipp: Formulieren Sie jeweils zunächst genau, was zu zeigen ist.)

Aufgabe 2:

a) Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass die Ordnung von H die Ordnung von G teilt.

b) Sei G eine Gruppe und H eine endliche Teilmenge von G, die bezüglich der Gruppenverknüpfung abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe ist.

Aufgabe 3: Basteln Sie ein Modell des Oktaeders (vgl. Anleitung in der Übung). Wieviele Symmetrien besitzt das Oktaeder?

Aufgabe 4: Sei $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe.

a) Seien $a, b \in G$ mit endlichen, teilerfremden Ordnungen k bzw. l. Zeigen Sie, dass $a \cdot b$ die Ordnung $k\,l$ besitzt.

b) Sei $a \in G$ und p ein Primteiler der Ordnung von a. Zeigen Sie, dass es ein Element mit Ordnung p gibt.

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie die Ordnung jedes Elements von $\mathbb{Z}/(12\mathbb{Z})$.

b) Bestimmen Sie die Ordnung jedes Elements der Kleinschen Vierergruppe.

c) (*) Sei $(G, \cdot)$ eine endliche abelsche Gruppe. Weiter habe für jede positive ganze Zahl k die Gleichung

$$x^k = 1$$

höchstens k Lösungen in G. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.