Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabe: Briefkasten 63, 11. November 2003, 12:00 Uhr

Algebra I
Übungsblatt 4

Two groups may be essentially alike even though they are not equal. For example, consider the groups Eng $= \{\ldots, one, two, three, \ldots\}$ *and Ger* $= \{\ldots, eins, zwei, drei, \ldots\}$ *under addition. There is an obvious 1-1 function T from Eng onto Ger [...] Furthermore, if, for example, one adds one and two and translates the result into German the result is the same as when one first translates and then adds (in German). The above facts will be expressed by saying that Eng is isomorphic to Ger and that the translation function T is an isomorphism of Eng onto Ger [...] A more general type of function, a homomorphism, is of still greater importance.*

(W.R. Scott: Group Theory)

[...] isomorphisms enable us to talk of an abstract group and [...] to establish links between apparently different situations. Practically, isomorphisms offer us no simplification; what they do offer is an economy of effort and a choice of situation in which to work.

On the other hand, homomorphisms offer us a chance of simplification. Because a homomorphism is a many-one mapping, we may be able to deal with a set of, say, four objects instead of twelve. Of course, there is always a price to pay for simplification – some of the detail is lost – but because we have a morphism we do still hang on to the structure. Homomorphisms can help us to get an idea of the wood without inspecting all the trees.

(The Open University [Britische Fernuniversität]: Groups II)

Aufgabe 1: Seien H und K Untergruppen einer multiplikativen Gruppe G. Zeigen Sie, dass die Menge $H\,K$ genau dann zu einer Untergruppe von G gehört, wenn $H\,K = K\,H$ gilt.

Aufgabe 2:

a) Basteln Sie ein Modell des Ikosaeders (vgl. Anleitung in Übung). Bestimmen Sie die Anzahl der Symmetrien des Ikosaeders.

b) Bestimmen Sie alle Automorphismen der Kleinschen Vierergruppe.

c) Warum passen die Aufgabenstellungen a) und b) zusammen?

Aufgabe 3: Geben Sie die Diedergruppe D_n, d.h. die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks in der affinen Ebene durch Erzeugende und Relationen an (vgl. Blatt 1, Aufgaben 2 und 5). Beschreiben Sie die Symmetrien, die Sie als erzeugende Elemente verwenden, und prüfen Sie, dass diese tatsächlich die von Ihnen angegebenen Relationen erfüllen. Welche Ordnung besitzt D_n?

Definition. Seien $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschiedene Zahlen. Die Permutation $\alpha \in S_n$ mit $\alpha(k) = k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$ und mit

$$\alpha(i_1) = i_2\ , \dots \alpha(i_{r_1}) = i_r\ ,\ \alpha(i_r) = i_1$$

heißt r-**Zykel** bzw. **Zykel**. Schreibweise: $\alpha = (i_1\ i_2\ \dots i_r)$. Zwei Zykel $(i_1 \dots i_r)$ und $(j_1 \dots j_s)$ heißen **disjunkt**, falls $\{i_1, \dots, i_r\} \cap \{j_1, \dots, j_s\} = \emptyset$.

Aufgabe 4: Sei $\langle\sigma\rangle \subset S_9$ die zyklische Untergruppe, die von

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 8 & 7 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Sie operiert auf der Menge $M := \{1, \dots, n\}$ vermöge der Abbildung

$$\langle\sigma\rangle \times M \to M \quad , \quad (\sigma^k, m) \mapsto \sigma^k(m)\ .$$

a) Bestimmen Sie die Bahnen für jedes $m \in M$ und stellen Sie sie bildlich dar.

b) Schreiben Sie σ als Produkt disjunkter Zykel.

c) Berechnen Sie eine disjunkte Zykeldarstellung des konjugierten Elements $\gamma\sigma\gamma^{-1}$ mit $\gamma := (1\ 6\ 8)$. Stellen Sie eine Vermutung auf, wie man allgemein die Konjugation einer Permutation in disjunkter Zykeldarstellung berechnet.

Aufgabe 5: Sei G eine Gruppe und p der kleinste Primteiler der Ordnung von G. Sei weiter U eine Untergruppe von G mit Index p. Dann ist U ein Normalteiler. Vervollständigen Sie den Beweis:

Die Gruppe G operiert auf der Menge ihrer Untergruppen $\mathcal{C}$ durch Konjugation. Die Elemente der Bahn GU haben die Gestalt ______________. Es gilt U _____ $G_{\{U\}}$ und nach Satz 3.4 der Vorlesung ist $\#GU = [G : G_{\{U\}}]$. Somit besteht die Konjugationsklasse GU entweder aus _____ oder aus _____ Elementen. Im ersten Fall ist U ein Normalteiler.
Widerspruchsannahme: Die Konjugationsklasse GU bestehe aus _____ Elementen.

Dann ist $U = G_{\{U\}}$, da U _____ $G_{\{U\}}$ und $[G : U]$ _____ $[G : G_{\{U\}}]$. Die Gruppe G operiert auf der Bahn GU durch Konjugation. D.h. es gibt einen Homomorphismus

$$\Phi\colon G \to \mathrm{Bij}(GU, GU)\ ,\ g \mapsto (hUh^{-1} \mapsto ghUh^{-1}g^{-1})\ .$$

Nach dem ersten Isomorphiesatz und dem Satz von Lagrange ist $[G : \ker\Phi]$ ein Teiler von $\#\mathrm{Bij}(GU, GU) =$ _____. Insbesondere sind alle Primteiler von $[G : \ker\Phi]$ __________ _____ p. Es gilt $\ker\Phi = \bigcap_{h\in G} G_{\{hUh^{-1}\}} \subseteq G_{\{U\}} = U$ und

$$[G : \ker\Phi] = [G : U] \cdot [U : \ker\Phi] = p \cdot [U : \ker\Phi]\ .$$

Damit sind alle Primteiler von $[U : \ker\Phi]$ ______________ als p. Nach dem Satz von Lagrange teilt $[G : \ker\Phi]$ die Ordnung von G; alle Primteiler von $[U : \ker\Phi]$ sind damit auch __________ _____ p. Mithin $[U : \ker\Phi] = 1$, also $U = \ker\Phi$. Da der Kern eines Gruppenhomomorphismus ein Normalteiler ist, enthält die Konjugationsklasse GU nur ___ __________ im Widerspruch zur obigen Annahme.