Algebra I
Übungsblatt 6

The theory of abelian groups is a branch of algebra which deals with commutative groups. Curiously enough, it is rather independent of general group theory: its basic methods bear only a slight resemblance to the noncommutative case, and there are reasons to believe that no other condition on groups is more decisive for the group structure than commutativity.

(László Fuchs: Infinite Abelian Groups)

In abelian groups, topology can be introduced in various ways which are natural in one sense or another. These topologies are not necessarily Hausdorff; some of them do not even make the group operations contiuous. The importance of topologies in abelian groups will be evident from subsequent developments.

(László Fuchs: Infinite Abelian Groups)

Aufgabe 1: Sei G eine Gruppe und n eine natürliche Zahl. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Gilt $(ab)^2 = a^2b^2$ für alle $a, b \in G$, so ist G abelsch.

b) Gilt $(ab)^i = a^ib^i$ für alle $a, b \in G$ und $i \in \{n, n+1, n+2\}$, so ist G abelsch.

Aufgabe 2: Beweisen Sie, dass die Gruppe der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ *lokal-zyklisch* ist, d.h. jede endlich erzeugte Untergruppe ist zyklisch. Ist $\mathbb{Q}$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe?

Aufgabe 3: Sei p eine Primzahl. Die (Abstraktion der) Untergruppe $Z(p^\infty) := \langle \frac{1}{p^k} : k \in \mathbb{N} \rangle \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ heißt *quasizyklische Gruppe* zur Primzahl p.

a) Zeigen Sie, dass $Z(p^\infty)$ eine unendliche p-Gruppe ist. Ist sie zyklisch?

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $Z(p^\infty)$. Welche davon sind zyklisch?

c) Bestimmen Sie alle Faktorgruppen von $Z(p^\infty)$.

d) Ist $Z(p^\infty)$ lokal-zyklisch (vgl. Aufgabe 2)? Zeigen Sie, dass $Z(p^\infty)$ eine abelsche Gruppe ist, die nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 4: Berechnen Sie das Zentrum der Diedergruppe D_n. Geben Sie eine nicht-kommutative p-Gruppe an.

Aufgabe 5: Eine Gruppe $G \neq \{e\}$ heißt *einfach*, wenn $\{e\}$ und G ihre (einzigen) Normalteiler sind (vgl. Primzahldefinition).

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Konjugationsklassen der alternierenden Gruppe A_5 (Tipp: disjunkte Zykeldarstellung).

2. Zeigen Sie, ein Normalteiler ist eine Untergruppe, die Vereinigung von Konjugationsklassen ist.

3. Zeigen Sie, dass A_5 einfach ist.