Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabe: Briefkasten 63, 2. Dezember 2003, 12:00 Uhr

Algebra I
Übungsblatt 7

Lagrange's theorem tells us that the order of a subgroup of a finite group is a divisor of the order of that group. The converse , however, is false. There are very few thoerems which assert the existence of subgroups of prescribed order in arbitrary finite groups. The most basic, and widely used, is a classic theorem due to the Norwegian mathematician Sylow. ... a very elegant and elementary proof... appeared in the journal Archiv der Mathematik, Vol. 10 (1959), pages 401–402.

(Israel Herstein: Topics in Algebra)

6.16 This is a five-part exercise.

(a) Go to your local airport and get on a plane.

(b) Get off at Madrid and take a bus to Granada.

(c) Find the Alhambra Palace and go inside.

(d) Take pictures of the many friezes to be seen there.

(e) Compare your results with the diagrams in Fig. 6.3.

(D.L. Johnson: Symmetries)

Aufgabe 1: Geben Sie für S_3 und S_4, Normalreihen an, deren Quotienten Primzahlordnung besitzen.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 56 gibt. (Tipp: Verwenden Sie die Sylow-Sätze und zählen Sie Elemente.)

Aufgabe 3: (Primärzerlegung einer abelschen Gruppe) Sei G eine endliche abelsche Gruppe mit Ordnung $|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, wobei $p_1, \ldots, p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen seien. Sei $T_{p_i}(G)$ die p_i-Torsion von G (vgl. Satz 6.11 der Vorlesung). Zeigen Sie,

$$G \cong T_{p_1}(G) \times \cdots \times T_{p_r}(G) \ .$$

Mit anderen Worten, eine endliche abelsche Gruppe ist isomorph zum direkten Produkt ihrer Sylow-Untergruppen.

Aufgabe 4: Sei G eine Gruppe und $G^{(1)} := G'$ ihre Kommutatorgruppe. Definiere induktiv $G^{(n+1)} := (G^{(n)})'$ für $n \geq 1$. Daraus ergibt sich die Inklusionskette

$$G \supseteq G' \supseteq G^{(2)} \supseteq G^{(3)} \supseteq \ldots$$

a) Sie N ein Normalteiler von G. Zeigen Sie, $(G/N)' = G'N/N$.

b) Zeigen Sie, dass G genau dann auflösbar ist, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $G^{(k)} = \{e\}$.

c) Sei H ein Normalteiler von G, so dass H und G/H auflösbar sind. Zeigen Sie, dass dann auch G auflösbar ist.

Aufgabe 5: Beschreiben Sie alle Gruppen der Ordnung 21 bis auf Isomorphie.