Algebra I
Übungsblatt 9

Indem Kummer sich mit dem Fermatschen Satze von der Unlösbarkeit der Gleichung

$$z^n = x^n + y^n \qquad \text{für } n > 2$$

in ganzen Zahlen befaßte, den man auch schreiben kann

$$z^n \neq (x+y)(x+\epsilon y)\cdots(x+\epsilon^{n-1}y) \qquad , \epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

wurde er naturgemäß dazu geführt, sich mit der Faktorenzerlegung derjenigen Zahlen zu beschäftigen, die sich aus den n-ten Einheitswurzeln aufbauen.

Er gelangt (...) zu dem Resultat, das seinen Ruhm begründete: Der Satz von der Eindeutigkeit der Zerlegung in Primfaktoren gilt für die Zahlen des Körpers $K(\epsilon)$ nicht mehr; er kommt aber wieder zum Vorschein, wenn man geeignete algebraische Zahlen, die dem $K(\epsilon)$ nicht angehören und die Kummer darum **ideale Zahlen** *nennt, hinzunimmt.*

...

Dedekind nimmt dabei eine Wende zum Abstrakten, welche die Sache im Prinzip sehr vereinfacht ...

Statt nämlich vom (realen oder idealen) Faktor zu sprechen, redet er von der Gesamtheit der ganzen Zahlen des vorgelegten Körpers, die durch den Faktor teilbar sind.

Statt des Faktors 2 würde er bei der natürlichen Zahlenreihe alle Zahlen 2m betrachten, ...

Der Vorteil dabei ist, daß man von den willkürlichen arithmetischen Einheiten frei wird, der Nachteil, daß man sich daran gewöhnen muß, das Produkt zweier Zahlen durch das Verhalten der korrespondierenden Gesamtheiten auszudrücken.

...

Unangenehm ist mir nur immer Dedekinds Terminologie gewesen, welche aller Anschaulichkeit entbehrt. Er nennt diese Gesamtheiten **Ideale***, und wenn ein „wirklicher" gemeinsamer Faktor vorhanden ist,* **Hauptideale***!*

(Felix Klein: Entwicklung der Mathematik)

Aufgabe 1: (Vorbereitung der Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks) Sei $\zeta = a + i\,b = e^{2\pi i/5}$ die primitive fünfte Einheitswurzel. Zeigen Sie unter Verwendung der folgenden Anleitung, dass $a = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ gilt.

a) Geben Sie die komplexen Linearfaktoren von $x^4+x^3+x^2+x+1 = \frac{x^5-1}{x-1}$ an. Berechnen Sie ihr Produkt in Abhängigkeit von a und b.

b) Führen Sie einen Koeffizientenvergleich durch und lösen Sie das entstehende Gleichungssystem.

Aufgabe 2: Geben Sie jeweils eine Zirkel-und-Lineal-Konstruktion an:

a) Für den Punkt $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, 0)$.

b) Für das regelmäßige Fünfeck mit Ecken $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ (vgl. Aufgabe 1).

Aufgabe 3: Leiten Sie die Cardanosche Formel gemäß folgender Anleitung her. (**Achtung:** Schreibfehler in Vorlesung - die richtige Diskriminante lautet $d = -4p^3 - 27q^2$.)

a) Setzen Sie den Ansatz $x = u + v$ in die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ ein.

b) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem $u^3 + v^3 = -q$ und $u^3 \cdot v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$ eine Lösung der Gleichung aus Aufgabenteil a) liefert.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem aus Aufgabenteil b).

Aufgabe 4: Sei R ein Integritätsring, in dem der Teilerkettensatz für Elemente gilt. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

a) R ist ein faktorieller Ring.

b) In R ist jedes irreduzible Element Primelement.

c) Jede Nichteinheit $r \in R \setminus \{0\}$ besitzt eine *eindeutige* Faktorisierung in irreduzible Elemente, d.h. sind

$$a_1 \cdots a_k = r = b_1 \cdots b_l$$

Faktorisierungen in irreduzible Elemente $a_1, \ldots, a_k$ und $b_1, \ldots, b_l$, so gilt $k = l$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_k$, so dass jedes a_i assoziiert ist zu $b_{\sigma(i)}$.

Aufgabe 5: Sei $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] := \{a + \sqrt{-3}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ein Unterring der komplexen Zahlen ist.

b) Geben Sie in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ zwei wesentlich verschiedene Faktorisierungen von 4 in irreduzible Elemente an. (vgl. Aufgabe 4)