Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (vgl. B.L. van der Waerden: Algebra, §8) Für eine (Unter-)gruppe G gelten die Mengenbeziehungen $GG = G$ und $G^{-1} = G$.

Sei HK eine Untergruppe. Wegen der Abgeschlossenheit unter Inversen gilt, $HK = (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$.

Sei nun umgekehrt $HK = KH$. Es ist $e \in H \cap K$, also $e = e\,e \in HK$ und $HK \neq \emptyset$. Weiter gilt $(HK)(HK) = H(KH)K = H(HK)K = (HH)(KK) = HK$ (Abgeschlossenheit der Verknüpfung) und $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH = HK$ (Abgeschlossenheit unter Inversen). Also ist HK eine Untergruppe.

Aufgabe 2. b) Sei $V := (\{e, a, b, c\}, \cdot)$ die multiplikativ geschriebene Kleinsche Vierergruppe. Ein Automorphismus $\sigma\colon V \to V$ muss $\sigma(e) = e$ erfüllen, und die Gruppenordnung jedes Urbildelements muss mit der seines Bildelements übereinstimmen. Letzteres bedeutet für V keine wesentliche Einschränkung, da a, b und c alle die Ordnung zwei besitzen. Damit sind zunächst einmal alle bijektiven Abbildungen $\sigma\colon V \to V$ mit $\sigma(e) = e$ mögliche Automorphismen. Sie entsprechen den sechs Permutationen der dreielementigen Menge $\{a, b, c\}$. Es bleibt zu zeigen, dass alle diese Abbildungen auch die Homomorphieeigenschaft besitzen: Für das Produkt zwei gleicher Elemente gilt

$$\sigma(x)\sigma(x) = e = \sigma(e) = \sigma(x\,x) \quad , \quad x \in \{e, a, b, c\}.$$

Weiter gilt

$$\sigma(x)\sigma(e) = \sigma(x)e = \sigma(x) = \sigma(x\,e) \quad , \quad x \in \{e, a, b, c\} \;,$$

und für $x \neq y \in \{a, b, c\}$ erhalten wir schließlich

$$\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(z) = \sigma(x\,y) \;.$$

Letzteres gilt, da in V das Produkt zweier von e verschiedener, paarweise verschiedener Elemente gerade das dritte von e verschiedene Element ist und weil σ eine bijektive Abbildung ist.

Es folgt insbesondere $Aut(V) \cong S_3$.

Aufgabe 3. [*Achtung, dieser Aufgabentyp (Präsentation durch Erzeugende und Relationen) wird oft unterschätzt! Er ist viel schwieriger als er zunächst aussieht. Bei Gelegenheit werde ich in der Übung nochmal darauf eingehen. Insbesondere muss man beweisen, dass man weder zu viele noch zu wenige Relationen angibt. Da der von den Relationen erzeugte Normalteiler unübersichtlich groß werden kann, gibt man leicht zu viele Relationen an.*]

Vorbereitung: Ich bezeichne die Ecken des n-Ecks gegen den Uhrzeigersinn mit 1,2,. . . ,n. Sei R die Rotation des n-Ecks, $n \geq 3$, um seinen Mittelpunkt mit Winkel $2\pi/n$. Sie entspricht dem n-Zykel $(1\,2\ldots n)$. Sei S die Achsenspiegelung an der Geraden durch die Ecke 1 und den Mittelpunkt; die Spiegelung S entspricht dem Produkt von Transpositionen $(2, n)(3, n-1)\ldots(n/2-1, n/2+1)$, falls n gerade ist, beziehungsweise der Permutation

$(2,n)(3,n-1)\dots\big((n-1)/2,(n+1)/2\big)$, falls n ungerade ist. In beiden Fällen hat S die Ordnung 2.

Erzeugende: Die Rotation R und die Spiegelung S erzeugen D_n, die Symmetriegruppe des n-Ecks. Zum Beweis sei T eine beliebige Symmetrie des n-Ecks. Sie bilde die Ecke 1 auf die Ecke $T(1) =: k$ ab. Also bildet die zusammengesetzte Symmetrie $R^{-k}T$ die Ecke 1 auf sich selbst ab. Da eine Symmetrie benachbarte Ecken auf benachbarte Ecken abbilden muss, bildet $R^{-1}T$ die Ecke 2 entweder auf sich selbst ab oder auf die Ecke n ab. Im ersten Fall gilt $R^{-k}T = id$, im zweiten Fall, $R^{-k}T = S$. Damit ist gezeigt, dass jede Symmetrie des n-Ecks einem der folgenden $2n$ Produkte gleich ist:

$$id, R, \dots, R^{n-1}, S, R\,S, \dots, R^{n-1}\,S \ . \tag{$\dagger$}$$

Diese $2n$ Produkte sind auch paarweise verschieden, denn zum Einen gilt $R^k(1) = k$, also $|\langle R\rangle| = n$, und zum Anderen besteht die obige Liste aus den verschiedenen Nebenklassen $\langle R\rangle$ und $\langle R\rangle S$.

Da D_n von zwei Elementen erzeugt wird, betrachten wir die freie Gruppe über einem Alphabet mit zwei Buchstaben, $F(\{r,s\})$. Die Mengenabbildung $r \mapsto R, s \mapsto S$ lässt sich aufgrund der universellen Eigenschaft der freien Gruppe zu einem eindeutig bestimmten Homomorphismus fortsetzen,

$$\varphi\colon F(\{r,s\}) \to D_n \quad , \quad r \mapsto R,\ s \mapsto S \ .$$

Da $D_n = \langle R, S\rangle$ gilt, ist der Homomorphismus φ surjektiv.

Relationen: Wir wollen die Relationen, d.h. ein Erzeugendensystem von $\ker\varphi$, bestimmen. Da $R^n = id = S^2$ gilt, sind r^n und s^2 in $\ker\varphi$. Würde man nur diese Relationen verwenden, so bestünde die Gruppe noch aus den unendlich vielen [!] Elementen der Form

$$R^{i_1}\,S\,R^{i_2}\dots S\,R^{i_k} \ , \tag{$\ddagger$}$$

wobei $k \in \mathbb{N}$, $i_1, i_k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ und $i_2,\dots,i_{k-1} \in \{1,\dots,n-1\}$ gilt. Wir brauchen also noch eine weitere Relation. Es gilt

$$S\,R = R^{n-1}\,S \quad \text{, d.h. } S\,R\,S\,R = id \ .$$

Damit lässt sich jedes Produkt der Form ($\ddagger$) in eine der Formen ($\dagger$) transformieren:

$$\begin{aligned}
R^{i_1}\,S\,R^{i_2}\dots S\,R^{i_k} &= R^{i_1}\,S\,R^{i_2}\dots S\,R^{i_{k-1}}\,R^{n-1}\,S\,R^{i_k-1}\\
&= \dots\\
&= R^{i_1}\,S\,R^{i_2}\dots S\,R^{i_{k-1}+i_k(n-1)}\,S\\
&= \dots\\
&= R^{i_1+i_2(n-1)+\dots i_k(n-1)^{k-1}}\,S^{k-1}\\
&= R^i\,S^j \quad \text{mit } i \in \{0,1,\dots,n-1\}, j \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Also gilt $\ker\varphi = \langle\langle r^n, s^2, s\,r\,s\,r\rangle\rangle$.

Aufgabe 5: [*Asche auf mein Haupt. Leider habe ich zwei Verweise falsch angegeben: 1. Satz 3.4 in meinem Vorlesungsskript hat bei Euch eine andere Nummer. Gemeint ist der Satz, der die Anzahl der Bahnelemente mit dem Index der Isotropiegruppe in Verbindung bringt. 2. Ich hatte in den USA den Homomorphiesatz unter der Bezeichnung erster Isomorphiesatz kennengelernt. Die Bezeichnungen gemäß Vorlesung sind allerdings besser, da sie auf das Algebra-Buch von B.L. van der Waerden zurückgehen. Es war das erste Lehrbuch der Algebra im heutigen Sinne, und darf bei Bezeichnungen als Algebra-Duden angesehen werden: Maßgebend in Zweifelsfällen. – Ich werde also umlernen.*]

Sei G eine Gruppe und p der kleinste Primteiler der Ordnung von G. Sei weiter U eine Untergruppe von G mit Index p. Dann ist U ein Normalteiler. Vervollständigen Sie den Beweis:

Die Gruppe G operiert auf der Menge ihrer Untergruppen $\mathcal{U}$ durch Konjugation. Die Elemente der Bahn GU haben die Gestalt $\underline{gUg^{-1},\ g \in G}$. Es gilt $U \underline{\subseteq} G_{\{U\}}$ und nach Satz 3.? der Vorlesung [s.o.] ist $\#GU = [G : G_{\{U\}}]$. Somit besteht die Konjugationsklasse GU entweder aus $\underline{\ 1\ }$ oder aus $\underline{\ p\ }$ Elementen. Im ersten Fall ist U ein Normalteiler. Widerspruchsannahme: Die Konjugationsklasse GU bestehe aus $\underline{\ p\ }$ Elementen.

Dann ist $U = G_{\{U\}}$, da $U \underline{\subseteq} G_{\{U\}}$ und $[G : U] \underline{=} [G : G_{\{U\}}]$. Die Gruppe G operiert auf der Bahn GU durch Konjugation. D.h. es gibt einen Homomorphismus

$$\Phi\colon G \to \mathrm{Bij}(GU, GU)\ ,\ g \mapsto (hUh^{-1} \mapsto ghUh^{-1}g^{-1})\ .$$

Nach dem Homomorphiesatz [s.o.] und dem Satz von Lagrange ist $[G : \ker \Phi]$ ein Teiler von $\#\mathrm{Bij}(GU, GU) = \underline{\ p!\ }$. Insbesondere sind alle Primteiler von $[G : \ker \Phi]$ $\underline{\text{ kleiner gleich }}$ p. Es gilt $\ker \Phi = \bigcap_{h \in G} G_{\{hUh^{-1}\}} \subseteq G_{\{U\}} = U$ und

$$[G : \ker \Phi] = [G : U] \cdot [U : \ker \Phi] = p \cdot [U : \ker \Phi]\ .$$

Damit sind alle Primteiler von $[U : \ker \Phi]$ $\underline{\text{ kleiner }}$ als p. Nach dem Satz von Lagrange teilt $[G : \ker \Phi]$ die Ordnung von G; alle Primteiler von $[U : \ker \Phi]$ sind damit auch $\underline{\text{ größer gleich }}$ p. Mithin $[U : \ker \Phi] = 1$, also $U = \ker \Phi$. Da der Kern eines Gruppenhomomorphismus ein Normalteiler ist, enthält die Konjugationsklasse GU nur $\underline{\text{ 1 Element }}$ im Widerspruch zur obigen Annahme.