Lösungen zu Übungsblatt 8

Aufgabe 3: Bestimmen Sie alle Ringe mit der Eigenschaft, dass jede additive Untergruppe bereits ein Ideal ist. (Tipp: Betrachten sie in dem zu untersuchenden Ring den Primring.)

Es gilt die Generalvoraussetzung, dass - weil nichts anderes explizit gesagt wird - die Ringe kommutativ sind mit Einselement.

Sei R ein Ring, so dass jede additive Untergruppe ein Ideal ist. Sein Primring $P := \{k \cdot 1_R \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine additive Untergruppe, also nach Voraussetzung ein Ideal. Da $1_R \in P$ gilt, folgt $R = P$. Damit ist gezeigt, dass nur Primringe in Frage kommen. Es bleibt zu prüfen, ob alle Primringe die geforderte Eigenschaft haben.

1. Fall. $R = \mathbb{Z}$.

Die Untergruppen von $\mathbb{Z}$ sind von der Gestalt $k\mathbb{Z}$ für $k \in \mathbb{N}$. Diese Untergruppen sind auch Ideale.

2. Fall. $R = \mathbb{Z}_n$.

Betrachte den kanonischen Ringhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$. Jede Untergruppe U von $\mathbb{Z}_n$ hat eine Untergruppe $\varphi^{-1}(U)$ von $\mathbb{Z}$ als Urbild. Nach dem ersten Fall ist $\varphi^{-1}(U)$ ein Ideal. Da φ surjektiv ist, ist auch $U = \varphi(\varphi^{-1}(U))$ ein Ideal.

Folglich haben genau die Primringe die angegebene Eigenschaft.

Aufgabe 5: Sei Q die Menge aller Symbole $\alpha := \alpha_0 + \alpha_1\, i + \alpha_2\, j + \alpha_3\, k$, wobei $\alpha_0, \ldots, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ seien. Definiere die Addition

$$\alpha + \beta := (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)i + (\alpha_2 + \beta_2)j + (\alpha_3 + \beta_3)k$$

und die Multiplikation

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta \;\; := \;\; & (\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3) + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)i \\ & + (\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)j + (\alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)k \;.\end{aligned}$$

Mit diesen Verknüpfungen bildet Q den *reellen Quaternionenring.*

a) Zeigen Sie, dass Q ein Einselement besitzt.

b) Zeigen Sie durch Aufstellen der Gruppentafel, dass $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ eine 8-elementige multplikative Untergruppe bildet (*Quaternionengruppe*). Ist der Ring Q kommutativ?

c) Zeigen Sie, dass jedes von 0 verschiedene Element invertierbar ist.

a) Sei $1_Q := 1_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}i + 0_{\mathbb{R}}j + 0_{\mathbb{R}}k$. Es gilt

$$\begin{aligned}\alpha \cdot 1_Q \;\; = \;\; & (\alpha_0 1_{\mathbb{R}} - \alpha_1 0_{\mathbb{R}} - \alpha_2 0_{\mathbb{R}} - \alpha_3 0_{\mathbb{R}}) + (\alpha_0 0_{\mathbb{R}} + \alpha_1 1_{\mathbb{R}} + \alpha_2 0_{\mathbb{R}} - \alpha_3 0_{\mathbb{R}})i \\ & + (\alpha_0 0_{\mathbb{R}} + \alpha_2 1_{\mathbb{R}} + \alpha_3 0_{\mathbb{R}} - \alpha_1 0_{\mathbb{R}})j + (\alpha_0 0_{\mathbb{R}} + \alpha_3 1_{\mathbb{R}} + \alpha_1 0_{\mathbb{R}} - \alpha_2 0_{\mathbb{R}})k \\ = \;\; & \alpha_0 + \alpha_1\, i + \alpha_2\, j + \alpha_3\, k\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}1_Q \cdot \beta \quad &:= \quad (1_{\mathbb{R}}\beta_0 - 0_{\mathbb{R}}\beta_1 - 0_{\mathbb{R}}\beta_2 - 0_{\mathbb{R}}\beta_3) + (1_{\mathbb{R}}\beta_1 + 0_{\mathbb{R}}\beta_0 + 0_{\mathbb{R}}\beta_3 - 0_{\mathbb{R}}\beta_2)i \\ &\quad\quad + (1_{\mathbb{R}}\beta_2 + 0_{\mathbb{R}}\beta_0 + 0_{\mathbb{R}}\beta_1 - 0_{\mathbb{R}}\beta_3)j + (1_{\mathbb{R}}\beta_3 + 0_{\mathbb{R}}\beta_0 + 0_{\mathbb{R}}\beta_2 - 0_{\mathbb{R}}\beta_1)k \\ &= \quad \beta_0 + \beta_1\, i + \beta_2\, j + \beta_3\, k\end{aligned}$$

b) Durch Einsetzen in die Definition der Multiplikation ergibt sich:

	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Die Tafel zeigt, dass die Menge $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ unter der Multiplikation in Q abgeschlossen ist. Die Menge enthält das Einselement und jedes Element ist invertierbar. Die Menge bildet also tatsächlich eine multiplikative Untergruppe.

Es gilt z.B. $i\,j = k \neq -k = j\,i$, d.h. die Untergruppe (und damit auch der Ring) ist nicht kommutativ.

Anmerkung: Diese Gruppe repräsentiert eine weitere Isomorphieklasse für Gruppen der Ordnung 8 (neben den abelschen Gruppen und der Diedergruppe D_4). [Ü: Warum ist sie nicht isomorph zu D_4? Tipp: Ordnung der Elemente.]

c) Beachte, dass $\mathbb{C}$ ein Unterring von Q ist. Aufgrund der Formel des Inversen in $\mathbb{C}$ kann man vermuten, dass

$$\alpha' = \frac{1}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}(\alpha_0 - \alpha_1 i - \alpha_2 j - \alpha_3 k)$$

invers zu α ist. Durch Nachrechnen von $\alpha'\alpha = 1_Q$ wird diese Vermutung bestätigt [Ü: Nachrechnen!]. (Es genügt, die linksinverse Eigenschaft nachzuweisen - vgl. frühere Aufgabe: Assoziativgesetz, Linksneutrales, Linksinverses genügen zur Gruppeneigenschaft; dort wurde gezeigt, Links-=Rechtsinverse.)