Prof. Dr. M. Kreuzer
Peter Ackermann

Abgabe: 02.02.2004, 12.15 Uhr

Logik für Informatiker

Übungsblatt 14: Wiederholungsblatt – Lösungen

Aufgabe 1:

Herr X hat drei Projekte A, B, C zu erledigen. Er schafft es nicht, alle drei bis Ende der Woche fertigzustellen, B oder C müssen aber bis dahin fertig sein. Um B fertigstellen zu können, muss A fertig sein, um C fertigstellen zu können, muss B fertig sein. Welche Projekte muss Herr X bis Ende der Woche erledigen?

a) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel auf, so dass obige Frage dadurch gelöst wird, dass man ein Modell für diese Formel findet.

b) Lösen Sie das Problem mit der Wahrheitstafelmethode.

Lösung:

$$\begin{aligned} A &\;\hat{=}\; \text{Projekt } A \text{ wird bis Ende der Woche fertig;} \\ B &\;\hat{=}\; \text{Projekt } B \text{ wird bis Ende der Woche fertig;} \\ C &\;\hat{=}\; \text{Projekt } C \text{ wird bis Ende der Woche fertig.} \end{aligned}$$

a)
- Nicht alle 3 Projekte werden bis Ende der Woche fertig: $\neg(A \wedge B \wedge C)$.
- B oder C müssen aber fertig werden: $(B \vee C)$.
- Um B fertig zu stellen muss A fertig sein: $(B \Rightarrow A)$.
- Um C fertig zu stellen muss B fertig sein: $(C \Rightarrow B)$.

$$\begin{aligned} F &= \neg(A \wedge B \wedge C) \wedge (B \vee C) \wedge (B \Rightarrow A) \wedge (C \Rightarrow B) \\ &\equiv \underbrace{(\neg A \vee \neg B \vee \neg C)}_{F_1} \wedge \underbrace{(B \vee C)}_{F_2} \wedge \underbrace{(\neg B \vee A)}_{F_3} \wedge \underbrace{(\neg C \vee B)}_{F_4} \end{aligned}$$

b)

$\alpha(A)$	$\alpha(B)$	$\alpha(C)$	$\alpha(F_1)$	$\alpha(F_2)$	$\alpha(F_3)$	$\alpha(F_4)$	$\alpha(F)$
0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0

Also müssen die Projekte A und B bis Ende der Woche erledigt werden.

Aufgabe 2:

Bauer Horst besitzt einen kleinen Acker, einen Wolf und das Schwein Borsti. Wenn der Händler ehrlich ist, ist das Saatgut, das Horst von ihm kauft, gut. Wenn das Saatgut und das Wetter im Sommer gut sind, verdient Horst ausreichend Geld. Wenn er ausreichend Geld hat, füttert er den Wolf. Wenn er den Wolf gefüttert hat und in der Stadt Kirmes ist, geht er in die Stadt und lässt Wolf und Borsti allein. Wenn der Wolf gefüttert worden ist, ist er satt. Wenn der Wolf satt ist oder der Bauer anwesend ist, wird Borsti nicht gefressen.

a) Zeigen Sie, dass diese Situation durch die folgende Hornklauselmenge beschrieben wird:

$$\{\{\neg H, S\}, \{\neg S, \neg W_1, G\}, \{\neg G, W_2\}, \{\neg W_2, \neg K, A\}, \{\neg W_2, W_3\}, \{\neg W_3, \neg B\}, \{A, \neg B\}\}$$

b) Angenommen, in der Stadt ist Kirmes. Wird Borsti *nicht* gefressen, wenn das Wetter im Sommer gut und der Händler ehrlich waren? Formulieren Sie diese Frage als Unerfüllbarkeitsproblem einer Menge von Hornklauseln und lösen Sie sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus. Geben Sie dabei an, in welchem Schritt Sie welche Aussagen markieren.

Lösung:

$$\begin{aligned} H &\;\hat{=}\; \text{Der } \boxed{\text{H}}\text{ändler ist ehrlich.} \\ S &\;\hat{=}\; \text{Das } \boxed{\text{S}}\text{aatgut ist gut.} \\ W_1 &\;\hat{=}\; \text{Das } \boxed{\text{W}}\text{etter im Sommer ist gut.} \\ G &\;\hat{=}\; \text{Der Bauer verdient ausreichend } \boxed{\text{G}}\text{eld.} \\ W_2 &\;\hat{=}\; \text{Der } \boxed{\text{W}}\text{olf wird gefüttert.} \\ K &\;\hat{=}\; \text{In der Stadt ist } \boxed{\text{K}}\text{irmes.} \\ A &\;\hat{=}\; \text{Der Bauer lässt den Wolf und das Schwein } \boxed{\text{a}}\text{lleine.} \\ W_3 &\;\hat{=}\; \text{Der } \boxed{\text{W}}\text{olf ist satt.} \\ B &\;\hat{=}\; \boxed{\text{B}}\text{orsti wird gefressen.} \end{aligned}$$

<u>Übersetzen der Aussagen</u>:

- Wenn der Händler ehrlich ist, ist das Saatgut gut:
  $$(H \Rightarrow S).$$
- Wenn das Saatgut und das Wetter gut sind, verdient der Bauer ausreichend Geld:
  $$((S \wedge W_1) \Rightarrow G).$$
- Wenn der Bauer genug Geld hat, füttert er den Wolf:
  $$(G \Rightarrow W_2).$$
- Wenn der Bauer den Wolf gefüttert hat und in der Stadt eine Kirmes ist, läßt er den Wolf und das Schwein alleine:
  $$((W_2 \wedge K) \Rightarrow A).$$

- Wenn der Wolf gefüttert ist, ist er satt:

$$(W_2 \Rightarrow W_3)\,.$$

- Wenn der Wolf satt ist oder der Bauer anwesend ist, wird das Schwein nicht gefressen:

$$((W_3 \vee \neg A) \Rightarrow \neg B)\,.$$

a) Aufstellen der Formel und in konjugierte Normalform bringen:

$$\begin{aligned}
F \quad &:= \quad (H \Rightarrow S) \wedge ((S \wedge W_1) \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow W_2) \\
&\qquad \wedge ((W_2 \wedge K) \Rightarrow A) \wedge (W_2 \Rightarrow W_3) \wedge ((W_3 \vee \neg A) \Rightarrow \neg B) \\
&\overset{(1.3)}{\equiv} \quad (\neg H \vee S) \wedge (\neg (S \wedge W_1) \vee G) \wedge (\neg G \vee W_2) \\
&\qquad \wedge (\neg (W_2 \wedge K) \vee A) \wedge (\neg W_2 \vee W_3) \wedge (\neg (W_3 \vee \neg A) \vee \neg B) \\
&\underset{\text{de Morgan}}{\overset{(1.13.g)}{\equiv}} \quad (\neg H \vee S) \wedge ((\neg S \vee \neg W_1) \vee G) \wedge (\neg G \vee W_2) \\
&\qquad \wedge ((\neg W_2 \vee \neg K) \vee A) \wedge (\neg W_2 \vee W_3) \wedge ((\neg W_3 \wedge \neg\neg A) \vee \neg B) \\
&\underset{\text{Distri.}}{\overset{(1.13.e)}{\equiv}} \quad (\neg H \vee S) \wedge (\neg S \vee \neg W_1 \vee G) \wedge (\neg G \vee W_2) \\
&\qquad \wedge (\neg W_2 \vee \neg K \vee A) \wedge (\neg W_2 \vee W_3) \wedge (\neg W_3 \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B)
\end{aligned}$$

Dies ist eine Hornformel, da jede Teildisjunktion nur höchstens ein positives Literal enthält (Definition (2.1.a)).

<u>Klauselmenge</u>:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(F) \quad = \quad & \{\{\neg H, S\}, \{\neg S, \neg W_1, G\}, \{\neg G, W_2\}, \\
& \{\neg W_2, \neg K, A\}, \{\neg W_2, W_3\}, \{\neg W_3, \neg B\}, \{A, \neg B\}\}\,.
\end{aligned}$$

b) Hinzu kommen:

- In der Stadt ist Kirmes: K, also $\{K\}$.
- Wird Borsti nicht gefressen, wenn das Wetter gut und der Händler ehrlich waren:

$$((W_1 \wedge H) \Rightarrow \neg B) \equiv (\neg (W_1 \wedge H) \vee \neg B) \equiv (\neg W_1 \vee \neg H \vee \neg B)\,.$$

  Dies wird als Annahme zu der Hornformel, in der Form des Unerfüllbarkeitsproblems, hinzugenommen, also als Verneinung:

$$\neg ((W_1 \wedge H) \Rightarrow \neg B) \equiv W_1 \wedge H \wedge B.$$

Es kommen also noch die Klauseln $\{W_1\}$, $\{H\}$, $\{B\}$ zuzüglich dem $\{K\}$ zu $\mathcal{K}(F)$ hinzu:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(F) \quad = \quad & \{\{\neg H, S\}, \{\neg S, \neg W_1, G\}, \{\neg G, W_2\}, \{\neg W_2, \neg K, A\}, \\
& \{\neg W_2, W_3\}, \{\neg W_3, \neg B\}, \{A, \neg B\}, \{K\}, \{W_1\}, \{H\}, \{B\}\}\,.
\end{aligned}$$

<u>Markieringsalgorithmus</u>:

1. Schritt: K, W_1, H, B

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(F) \quad = \quad & \{\{\underline{\neg H}, S\}, \{\neg S, \underline{\neg W_1}, G\}, \{\neg G, W_2\}, \{\neg W_2, \underline{\neg K}, A\}, \\
& \{\neg W_2, W_3\}, \{\neg W_3, \underline{\neg B}\}, \{A, \underline{\neg B}\}, \{\underline{K}\}, \{\underline{W_1}\}, \{\underline{H}\}, \{\underline{B}\}\}\,.
\end{aligned}$$

2. Schritt: S, A

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(F) \quad = \quad & \{\{\underline{\neg H}, \underline{S}\}, \{\underline{\neg S}, \underline{\neg W_1}, G\}, \{\neg G, W_2\}, \{\neg W_2, \underline{\neg K}, \underline{A}\}, \\
& \{\neg W_2, W_3\}, \{\neg W_3, \underline{\neg B}\}, \{\underline{A}, \underline{\neg B}\}, \{\underline{K}\}, \{\underline{W_1}\}, \{\underline{H}\}, \{\underline{B}\}\}\,.
\end{aligned}$$

3. Schritt: G

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(F) \quad = \quad & \{\{\underline{\neg H}, \underline{S}\}, \{\underline{\neg S}, \underline{\neg W_1}, \underline{G}\}, \{\underline{\neg G}, W_2\}, \{\neg W_2, \underline{\neg K}, \underline{A}\}, \\
& \{\neg W_2, W_3\}, \{\neg W_3, \underline{\neg B}\}, \{\underline{A}, \underline{\neg B}\}, \{\underline{K}\}, \{\underline{W_1}\}, \{\underline{H}\}, \{\underline{B}\}\}\,.
\end{aligned}$$

4. Schritt: W_2

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(F) \quad = \quad & \{\{\underline{\neg H}, \underline{S}\}, \{\underline{\neg S}, \underline{\neg W_1}, \underline{G}\}, \{\underline{\neg G}, \underline{W_2}\}, \{\underline{\neg W_2}, \underline{\neg K}, \underline{A}\}, \\
& \{\underline{\neg W_2}, W_3\}, \{\neg W_3, \underline{\neg B}\}, \{\underline{A}, \underline{\neg B}\}, \{\underline{K}\}, \{\underline{W_1}\}, \{\underline{H}\}, \{\underline{B}\}\}\,.
\end{aligned}$$

5. Schritt: W_3

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(F) \quad = \quad & \{\{\underline{\neg H}, \underline{S}\}, \{\underline{\neg S}, \underline{\neg W_1}, \underline{G}\}, \{\underline{\neg G}, \underline{W_2}\}, \{\underline{\neg W_2}, \underline{\neg K}, \underline{A}\}, \\
& \{\underline{\neg W_2}, \underline{W_3}\}, \{\underline{\neg W_3}, \underline{\neg B}\}, \{\underline{A}, \underline{\neg B}\}, \{\underline{K}\}, \{\underline{W_1}\}, \{\underline{H}\}, \{\underline{B}\}\}\,.
\end{aligned}$$

In der Zielklausel $\{\neg W_3, \neg B\}$ ist alles markiert, also führt unsere hinzugenommene verneinte Annahme zu einem Widerspruch, somit ist unsere ursprüngliche Annahme “Borsti wird nicht gefressen” richtig.

Aufgabe 3:

a) Bringen Sie folgende prädikatenlogische Formel in Skolemform:

$$\neg\left(\forall x:\left(P\left(x,y\right)\Rightarrow Q\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)\wedge\forall x:\forall y:P\left(x,f\left(y\right)\right).$$

b) Geben Sie eine prädikatenlogische Struktur an, in der die ursprüngliche Formel aus Teil a) gilt, und eine, in der sie nicht gilt.

Lösung:

a) Skolemform = Bereinigte Pränexform und Ersetzung der $\exists$–Quantoren. Zusätzlich binden wir noch die freien Variablen.

$$\begin{aligned}
& \neg\left(\forall x:\left(P\left(x,y\right)\Rightarrow Q\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)\wedge\forall x:\forall y:P\left(x,f\left(y\right)\right)\\
\overset{\text{Umbenennung}}{\underset{\text{der Variablen}}{\equiv}}\; & \neg\left(\forall x:\left(P\left(x,y\right)\Rightarrow Q\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)\wedge\forall z:\forall w:P\left(z,f\left(w\right)\right)\\
\overset{(1.3)}{\equiv}\; & \neg\left(\forall x:\left(\neg P\left(x,y\right)\vee Q\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)\wedge\forall z:\forall w:P\left(z,f\left(w\right)\right)\\
\overset{(3.12)}{\underset{y\mapsto b}{\sim}}\; & \left(\exists x:\neg\left(\neg P\left(x,b\right)\vee Q\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)\wedge\forall z:\forall w:P\left(z,f\left(w\right)\right)\\
\sim\; & \exists x:\left(P\left(x,b\right)\wedge\neg Q\left(f\left(x\right)\right)\right)\wedge\forall z:\forall w:P\left(z,f\left(w\right)\right)\\
\sim\; & \exists x:\forall z:\forall w:\left(P\left(x,b\right)\wedge\neg Q\left(f\left(x\right)\right)\wedge P\left(z,f\left(w\right)\right)\right)\\
\underset{x\mapsto a}{\sim}\; & \forall z:\forall w:\left(P\left(a,b\right)\wedge\neg Q\left(f\left(a\right)\right)\wedge P\left(z,f\left(w\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

b) Wir benutzen der Übersicht halber die umbenannte Form der Formel:

$$\neg\left(\forall x:\left(P\left(x,y\right)\Rightarrow Q\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)\wedge\forall z:\forall w:P\left(z,f\left(w\right)\right)$$

i) $\alpha=\left(U,\varphi,\psi,\xi\right)$ mit

$$\begin{array}{rcll}
U & = & \mathbb{Z} & \text{Universum}\\
\varphi\left(f\right) & = & \left|\cdot\right|:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{N}_0\subset\mathbb{Z} & \text{1–stellige Funktion}\\
\psi\left(Q\right) & = & \left\{t\in\mathbb{Z}\mid t\text{ ungerade}\right\} & \text{1–stelliges Prädikat}\\
\psi\left(P\right) & = & \left\{\left(r,s\right)\in\mathbb{Z}^2\mid s\geq 0\right\} & \text{2–stelliges Prädikat}\\
\xi\left(y\right) & = & 2 & \text{Belegung für das freie } y\\
\xi\left(x\right),\xi\left(z\right),\xi\left(w\right) & & \text{beliebig} &
\end{array}$$

Damit

$$\alpha\left(\neg\left(\forall x:\left(P\left(x,y\right)\Rightarrow Q\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)\wedge\forall z:\forall w:P\left(z,f\left(w\right)\right)\right)=1$$

gilt muss

$$\alpha\left(\neg\left(\forall x:\left(P\left(x,y\right)\Rightarrow Q\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)\right)=1\quad\text{und}\quad\alpha\left(\forall z:\forall w:P\left(z,f\left(w\right)\right)\right)=1$$

gelten.

$\alpha\left(\forall z:\forall w:P\left(z,f\left(w\right)\right)\right)=1$ ist unabhängig von z (Wahl des Prädikates) und für alle $w\in\mathbb{Z}$ gilt $f\left(w\right)=\left|w\right|\geq 0$.

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\neg\left(\forall x:\left(P\left(x,y\right)\Rightarrow Q\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)\right)=1 \;&\Leftrightarrow\; \alpha\left(\exists x:\neg\left(P\left(x,y\right)\Rightarrow Q\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)=1\\
&\Leftrightarrow\; \alpha\left(\exists x:\neg\left(\neg P\left(x,y\right)\vee Q\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)=1\\
&\Leftrightarrow\; \alpha\left(\exists x:\left(P\left(x,y\right)\wedge\neg Q\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)=1
\end{aligned}$$

Wir überprüfen also ob für ein $x\in\mathbb{Z}$ gilt $\alpha\left(P\left(x,y\right)\right)=1$ und $\alpha\left(\neg Q\left(f\left(x\right)\right)\right)=1$.
$\alpha\left(\neg Q\left(f\left(x\right)\right)\right)=1\Leftrightarrow\alpha\left(Q\left(f\left(x\right)\right)\right)=0$ ist für $x=2$, als Representant der geraden Zahlen, erfüllt.
$\alpha\left(P\left(x,y\right)\right)$ ist von x unabhängig (Wahl des Prädikates) und $\alpha\left(P\left(x,y\right)\right)=1$, da $\xi\left(y\right)=2$ gewählt war.

ii) Wie in i) nur mit $\xi\left(y\right)=-2$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei eine Menge von Spielkarten. Man ordne die Karten in einem Kreis so an, dass gilt:

1. Ist eine Karte weder Bild noch Karo, so ist ihr linker Nachbar Karo.
2. Ist eine Karte Karo, so ist ihr rechter Nachbar ein Bild.

a) Zeigen Sie, dass sich die Legeregeln durch folgende Klauselmenge ausdrücken lassen:

$$\{\{P(x), P(f(x)), Q(x)\}, \{\neg P(f(y)), Q(y)\}\}.$$

b) Beweisen Sie durch prädikatenlogische Resolution, dass es unmöglich ist, obige Aufgabe zu erfüllen, sobald die Menge von Spielkarten eine Karte enthält, die weder Karo noch Bild ist.

Lösung:

a) $\alpha = (U, \varphi, \psi, \xi)$ mit

$$\begin{array}{rcl} U & = & \text{Menge der Spielkarten} \\ \varphi(f)(x) & = & \text{linker Nachbar von } x \\ \psi(P) & = & \text{Menge der Karos} \\ \psi(Q) & = & \text{Menge der Bilder} \\ \xi(x), \xi(y) & & \text{beliebig} \end{array}$$

1. Ist eine Karte weder Bild noch Karo, so ist ihr linker Nachbar Karo:

$$\forall x : ((\neg Q(x) \wedge \neg P(x)) \Rightarrow P(f(x))).$$

2. Ist eine Karte Karo, so ist ihr rechter Nachbar ein Bild:

$$\forall y : (P(f(y)) \Rightarrow Q(y)).$$

$$\begin{array}{rcl} F & := & \forall x : ((\neg Q(x) \wedge \neg P(x)) \Rightarrow P(f(x))) \wedge \forall y : (P(f(y)) \Rightarrow Q(y)) \\ & \overset{(1.3)}{\equiv} & \forall x : (\neg(\neg Q(x) \wedge \neg P(x)) \vee P(f(x))) \wedge \forall y : (\neg P(f(y)) \vee Q(y)) \\ & \overset{\text{de Morgan}}{\equiv} & \forall x : \forall y : ((Q(x) \vee P(x)) \vee P(f(x))) \wedge (\neg P(f(y)) \vee Q(y)) \\ F^* & = & (Q(x) \vee P(x) \vee P(f(x))) \wedge (\neg P(f(y)) \vee Q(y)) \\ \mathcal{K}(F^*) & = & \{\{Q(x), P(x), P(f(x))\}, \{\neg P(f(y)), Q(y)\}\} \end{array}$$

b) Zu F kommt jetzt noch, "Die Menge der Spielkarten enthält eine Karte, die weder Karo noch Bild ist", also

$$\exists z : (\neg P(z) \wedge \neg Q(z))$$

hinzu, so dass wir

$$F' = \exists z : (\neg P(z) \wedge \neg Q(z)) \wedge F$$

erhalten.

Somit kommt zu F^*, nach Überführung von z zu einer Konstanten a,

$$(\neg P(a) \wedge \neg Q(a))$$

hinzu.

Also gilt jetzt

$$\mathcal{K}(F'^*) = \{\{\neg P(a)\}, \{\neg Q(a)\}, \{Q(x), P(x), P(f(x))\}, \{\neg P(f(y)), Q(y)\}\}$$

Resolution:

$$\begin{array}{ll} \{\neg P(a)\},\ \{Q(x), P(x), P(f(x))\} \overset{x \mapsto a}{\longrightarrow} \{Q(a), P(f(a))\} & \{\neg P(f(y)), Q(y)\},\ \{\neg Q(a)\} \overset{y \mapsto a}{\longrightarrow} \{\neg P(f(a))\} \\ \{Q(a), P(f(a))\},\ \{\neg P(f(a))\} \longrightarrow \{Q(a)\} & \\ \{Q(a)\},\ \{\neg Q(a)\} \longrightarrow \emptyset & \end{array}$$

Also darf die Menge der Spielkarten (U) keine Karte enthalten, die weder Karo noch Bild ist.

Aufgabe 5:

Sei M ein Monoid, in dem alle Quadrate eins sind, das heißt M sei eine Menge zusammen mit einer Verknüpfung $\circ : M \times M \longrightarrow M$, so dass Folgendes gilt:

(i) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ für alle $x, y, z \in M$

(ii) Es gibt ein $e \in M$ mit $e \circ x = x \circ e = x$ für alle $x \in M$

(iii) $x \circ x = e$ für alle $x \in M$

a) Übersetzen Sie die Gesetze (i) bis (iii) in gleichungslogische Formeln.

b) Zeigen Sie, dass aus diesen Gesetzen das Kommutativgesetz folgt, dass also gilt

$$x \circ y = y \circ x \text{ für alle } x, y \in M.$$

Lösung:

a) (i) $f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z)) =: F_1$
(ii) $f(e,x) = f(x,e) = x =: F_2$
(iii) $f(x,x) = e =: F_3$

b) Zu zeigen:

$$x \circ y = y \circ x \quad \text{für alle } x, y \in M.$$

$$\begin{aligned} x \circ y &= (x \circ y) \circ e = (x \circ y) \circ ((y \circ x) \circ (y \circ x)) \\ &= x \circ (y \circ y) \circ x \circ (y \circ x) = (x \circ e) \circ x \circ (y \circ x) \\ &= (x \circ x) \circ (y \circ x) = e \circ (y \circ x) = y \circ x \end{aligned}$$

In Formeln:

$$\begin{aligned} f(x,y) &\xleftarrow{F_2} f(f(x,y),e) \xleftarrow{F_3} f(f(x,y), f(f(y,x), f(y,x))) \\ &\xleftarrow{F_1} f(f(f(x,y), f(y,x)), f(y,x)) \xrightarrow{F_1} f(f(x, f(y, f(y,x))), f(y,x)) \\ &\xleftarrow{F_1} f(f(x, f(f(y,y),x)), f(y,x)) \xrightarrow{F_3} f(f(x, f(e,x)), f(y,x)) \\ &\xrightarrow{F_2} f(f(x,x), f(y,x)) \xrightarrow{F_3} f(e, f(y,x)) \xrightarrow{F_2} f(y,x) \end{aligned}$$

Aufgabe 6:

In einem Computerprogramm kommen die vier Integer-Variablen w, x, y, z vor. Ab einem gewissen Zeitpunkt im Programm gilt:

1. Wenn $z > 0$ ist, ist $y > 0$.
2. Wenn $w \leq 0$ ist, ist $x \leq 0$.
3. Wenn $w > 0$ ist, ist $y \leq 0$.
4. Es ist immer $z > 0$.

a) Übersetzen Sie diese Aussagen in modallogische Formeln.

b) Das Programm endet genau dann, wenn $x > 0$ ist. Zeigen Sie, dass das Programm nie endet.

Lösung:

a) Sei

$$\begin{aligned} W &= \text{Menge der Zeitpunkte} \\ R &= \left\{(s,t) \in W^2 \mid s \text{ liegt vor } t\right\} \\ \xi(Z,s) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } z > 0 \text{ an der Stelle } s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \xi(Y,s) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } y > 0 \text{ an der Stelle } s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \xi(W,s) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } w > 0 \text{ an der Stelle } s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \xi(X,s) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \text{ an der Stelle } s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

1. $$\Box(Z \Rightarrow Y)$$
2. $$\Box(\neg W \Rightarrow \neg X)$$
3. $$\Box(W \Rightarrow \neg Y)$$
4. $$\Box Z$$

b) Prosa: Angenommen es gibt einen Zeitpunkt t an dem X gilt, d.h. an dem $x > 0$ ist, also $\alpha(X,t) = 1$. Dann folgt mit 2.) (rückwärts gelesen), dass W gilt ($w > 0$): $\alpha(W,t) = 1$. Somit folgt aus 3.), dass Y ($y > 0$) nicht gilt, also $\alpha(\neg Y, t) = 1$. Mit 1.) (rückwärts gelesen) folgt dann $\alpha(\neg Z, t) = 1$. Dies ist ein Widerspruch zu 4.), also ist unsere Annahme falsch und es gibt keinen soclchen Zeitpunkt t an dem $x > 0$ ist, d.h. X gilt.

<u>Formeltechnisch</u>: Zu zeigen ist, dass gilt $\Box\neg X$.

Wenn diese Angaben korrekt sind und das Programm an der Stelle s gilt haben wir:

$$\alpha\left(\Box\left(Z \Rightarrow Y\right) \wedge \Box\left(\neg W \Rightarrow \neg X\right) \wedge \Box\left(W \Rightarrow \neg Y\right) \wedge \Box Z, s\right) = 1.$$

Somit haben wir:

i)

$$\begin{aligned}\alpha\left(\Box\left(Z \Rightarrow Y\right), s\right) = 1 &\overset{(5.12.c)}{\Rightarrow} \alpha\left(\Box Z \Rightarrow \Box Y, s\right) = 1\\ &\Leftrightarrow \alpha\left(\neg\Box Z \vee \Box Y, s\right) = 1\\ &\Rightarrow \alpha\left(\neg\Box Z, s\right) = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha\left(\Box Y, s\right) = 1\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\alpha\left(\Box\left(\neg W \Rightarrow \neg X\right), s\right) = 1 &\overset{(5.12.c)}{\Rightarrow} \alpha\left(\Box\neg W \Rightarrow \Box\neg X, s\right) = 1\\ &\Leftrightarrow \alpha\left(\neg\Box\neg W \vee \Box\neg X, s\right) = 1\\ &\Rightarrow \alpha\left(\neg\Box\neg W, s\right) = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha\left(\Box\neg X, s\right) = 1\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\alpha\left(\Box\left(W \Rightarrow \neg Y\right), s\right) = 1 &\overset{(5.12.e)}{\Rightarrow} \alpha\left(\Diamond W \Rightarrow \Diamond\neg Y, s\right) = 1\\ &\Leftrightarrow \alpha\left(\neg\Diamond W \vee \Diamond\neg Y, s\right) = 1\\ &\Leftrightarrow \alpha\left(\Box\neg W, s\right) = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha\left(\neg\Box Y, s\right) = 1\end{aligned}$$

iv)

$$\alpha\left(\Box Z, s\right) = 1$$

- Aus iv) und i) folgt:
$$\alpha\left(\Box Y, s\right) = 1.$$
- Aus $\alpha\left(\Box Y, s\right) = 1$ und iii) folgt:
$$\alpha\left(\Box\neg W, s\right) = 1.$$
- Aus $\alpha\left(\Box\neg W, s\right) = 1$ und ii) folgt:
$$\alpha\left(\Box\neg X, s\right) = 1.$$