

Aufgabe 12

Struktur:

- Universum (Definitonsbereich/ Grundmenge): $U = \mathbb{R}$.
- Abbildung φ , die jedem k -stelligen Funktionssymbol f eine Abbildung $\varphi(f) : U^k \rightarrow U$ zuordnet:

$$\varphi(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(f)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in]a, b[, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi(a) = a, \varphi(b) = b, \varphi(c) = 0 & \quad (0\text{-stellige Funktionen} = \text{Konstanten}) \\ \varphi(h) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(h)(x) = |x| & \quad (1\text{-stellige Funktion}) \\ \varphi(g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(g)(x, y) = x - y & \quad (2\text{-stellige Funktion}) \end{aligned}$$

- Abbildung ψ , die jedem in F vorkommenden k -stelligen Prädikatssymbol P eine Teilmenge $\psi(P) \subseteq U^k$ zuordnet:

$$\Psi(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}.$$

- Abbildung ξ , die jeder in F vorkommenden Variable x ein Element $\xi(x) \in U$ zuordnet:

$$\xi(x) = \xi(y) = \xi(z) = \xi(u) = 0.$$

Formel:

$$F := \forall z : (P(c, z) \Rightarrow \exists u : (P(c, u) \wedge \forall x : \forall y : ((P(a, x) \wedge P(x, b) \wedge P(a, y) \wedge P(y, b) \wedge P(h(g(x, y)), u)) \Rightarrow P(h(g(f(x), f(y))), z))))).$$

Terme:

$$c, z, u, a, b, x, y, g(x, y), h(g(x, y)), f(x), f(y), g(f(x), f(y)), h(g(f(x), f(y))).$$

Teilformeln: unter der Annahme, dass die Teilformel $P(a, x) \wedge P(x, b) \wedge P(a, y) \wedge P(y, b) \wedge P(h(g(x, y)), u)$ folgendermaßen geklammert ist:

$$\begin{aligned} & (((P(a, x) \wedge P(x, b)) \wedge P(a, y)) \wedge P(y, b)) \wedge P(h(g(x, y)), u) \\ & \forall z : (P(c, z) \Rightarrow \exists u : (P(c, u) \wedge \forall x : \forall y : ((P(a, x) \wedge P(x, b) \wedge P(a, y) \wedge P(y, b) \wedge P(h(g(x, y)), u)) \Rightarrow P(h(g(f(x), f(y))), z))))), \\ & P(c, z) \Rightarrow \exists u : (P(c, u) \wedge \forall x : \forall y : ((P(a, x) \wedge P(x, b) \wedge P(a, y) \wedge P(y, b) \wedge P(h(g(x, y)), u)) \Rightarrow P(h(g(f(x), f(y))), z))), \quad P(c, z), \\ & \exists u : (P(c, u) \wedge \forall x : \forall y : ((P(a, x) \wedge P(x, b) \wedge P(a, y) \wedge P(y, b) \wedge P(h(g(x, y)), u)) \Rightarrow P(h(g(f(x), f(y))), z))), \\ & P(c, u) \wedge \forall x : \forall y : ((P(a, x) \wedge P(x, b) \wedge P(a, y) \wedge P(y, b) \wedge P(h(g(x, y)), u)) \Rightarrow P(h(g(f(x), f(y))), z)), \quad P(c, u) \\ & \forall x : \forall y : ((P(a, x) \wedge P(x, b) \wedge P(a, y) \wedge P(y, b) \wedge P(h(g(x, y)), u)) \Rightarrow P(h(g(f(x), f(y))), z)), \\ & \forall y : ((P(a, x) \wedge P(x, b) \wedge P(a, y) \wedge P(y, b) \wedge P(h(g(x, y)), u)) \Rightarrow P(h(g(f(x), f(y))), z)), \\ & ((P(a, x) \wedge P(x, b) \wedge P(a, y) \wedge P(y, b) \wedge P(h(g(x, y)), u)) \Rightarrow P(h(g(f(x), f(y))), z)), \\ & (((P(a, x) \wedge P(x, b)) \wedge P(a, y)) \wedge P(y, b)) \wedge P(h(g(x, y)), u), \quad P(h(g(f(x), f(y))), z), \quad ((P(a, x) \wedge P(x, b)) \wedge P(a, y)) \wedge P(y, b), \\ & P(h(g(x, y)), u), \quad (P(a, x) \wedge P(x, b)) \wedge P(a, y), \quad P(y, b), \quad P(a, x) \wedge P(x, b), \quad P(a, y), \quad P(a, x), \quad P(x, b). \end{aligned}$$