

Einschub, die 3 wenn's:

- “A gilt, wenn B gilt”:

$$B \Rightarrow A.$$

- “A gilt genau dann, wenn B gilt”:

$$A \Leftrightarrow B.$$

- “A gilt nur, wenn B gilt”:

$$A \Rightarrow B.$$

Aufgabe 11: Der Wolf. Das Schwein. Hurz.

Bauer Horst besitzt einen kleinen Acker, einen Wolf und das Schwein Borsti. Wenn der Händler ehrlich ist, ist das Saatgut, das Horst von ihm kauft, gut. Wenn das Saatgut und das Wetter im Sommer gut sind, verdient Horst ausreichend Geld. Wenn er ausreichend Geld hat füttert er den Wolf. Wenn er den Wolf gefüttert hat und in der Stadt Kirmes ist, geht er in die Stadt und lässt Wolf und Borsti allein. Wenn der Wolf gefüttert worden ist, ist er satt. Wenn der Wolf satt ist oder der Bauer anwesend ist, wird Borsti nicht gefressen.

- a) Zeigen Sie, dass diese Situation durch die folgende Hornklauselmengemenge beschrieben wird:

$$\{\{\neg H, S\}, \{\neg S, \neg W_1, G\}, \{\neg G, W_2\}, \{\neg W_2, \neg K, A\}, \{\neg W_2, W_3\}, \{\neg W_3, \neg B\}, \{A, \neg B\}\}.$$

- b) Angenommen, in der Stadt ist Kirmes. Wird Borsti *nicht* gefressen, wenn das Wetter im Sommer gut und der Händler ehrlich waren? Formulieren Sie diese Frage als Unerfüllbarkeitsproblem einer Menge von Hornklauseln und lösen Sie sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus. Geben Sie dabei an, in welchem Schritt Sie welche Aussagen markieren.

Lösung zu Aufgabe 11:

[DIE IN ECKIGEN KLAMMERN SO GESCHRIEBENEN TEXTE SIND REINE KOMMENTARE UND GEHÖREN NICHT ZUR EIGENTLICHEN LÖSUNG DER AUFGABE.]

zu a) [FÜR DIESEN AUFGABENTEIL GIBT ES ZWEI VON VIER PUNKTEN.]

- Festlegung der Abkürzungen: [AM BESTEN ABHÄNGIG VON DER REIHENFOLGE DES AUFTRETENS IM AUFGABENTEXT.]

H : Der Händler ist ehrlich.

S : Das Saatgut ist gut.

W_1 : Das Wetter ist im Sommer gut.

G : Bauer Horst verdient ausreichend Geld.

W_2 : Der Wolf wird gefüttert.

K : In der Stadt ist Kirmes.

A : Der Bauer lässt Wolf und Borsti alleine.

W_3 : Der Wolf ist satt.

B : Borsti wird gefressen.

0,5 P

[HIER SIEHT MAN, DASS ES AUF DIE VOLLSTÄNDIGEN SÄTZE ANKOMMT, DA DIE VERSCHIEDENEN DINGE/LEBEWESEN UNTERSCHIEDLICHEN BEDINGUNGEN GENÜGEN.]

– Übersetzung der Aussagen [MIT SOFORTIGER UMFORMUNG]:

- “Wenn der Händler ehrlich ist, ist das Saatgut, das Horst von ihm kauft, gut”:

$$F_1 := (H \Rightarrow S) \equiv (\neg H \vee S).$$

- “Wenn das Saatgut und das Wetter im Sommer gut sind, verdient Horst ausreichend Geld”:

$$F_2 := ((S \wedge W_1) \Rightarrow G) \equiv (\neg S \vee \neg W_1 \vee G).$$

- “Wenn er ausreichend Geld hat füttert er den Wolf”:

$$F_3 := (G \Rightarrow W_2) \equiv (\neg G \vee W_2).$$

- “Wenn er den Wolf gefüttert hat und in der Stadt Kirmes ist, geht er in die Stadt und lässt Wolf und Borsti allein”:

$$F_4 := ((W_2 \wedge K) \Rightarrow A) \equiv (\neg W_2 \vee \neg K \vee A).$$

- “Wenn der Wolf gefüttert worden ist, ist er satt”:

$$F_5 := (W_2 \Rightarrow W_3) \equiv (\neg W_2 \vee W_3).$$

- “Wenn der Wolf satt ist oder der Bauer anwesend ist, wird Borsti nicht gefressen”:

$$F_6 := ((W_3 \vee \neg A) \Rightarrow \neg B) \equiv ((\neg W_3 \wedge A) \vee \neg B) \equiv (\neg W_3 \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B).$$

[IN DER KLAUSUR REICHT Z.B. 1. AUSSAGE: ...]

1 P

– Aufstellen der Hornformel/klausel:

Die Aussagen werden durch folgende (Horn-)Formel beschrieben (Hornformel, da es pro Disjunktion in der KNF maximal ein positives Literal gibt [DEFINITION 2.1]).

$$\begin{aligned} F &:= F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4 \wedge F_5 \wedge F_6 \\ &\equiv (\neg H \vee S) \wedge (\neg S \vee \neg W_1 \vee G) \wedge (\neg G \vee W_2) \wedge (\neg W_2 \vee \neg K \vee A) \\ &\quad \wedge (\neg W_2 \vee W_3) \wedge (\neg W_3 \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B) \end{aligned}$$

und somit die folgende (Horn-)Klauselmenge $\mathcal{K}(F)$:

$$\{\{\neg H, S\}, \{\neg S, \neg W_1, G\}, \{\neg G, W_2\}, \{\neg W_2, \neg K, A\}, \{\neg W_2, W_3\}, \{\neg W_3, \neg B\}, \{A, \neg B\}\}.$$

0,5 P

zu b) [FÜR DIESEN AUFGABENTEIL GIBT ES ZWEI VON VIER PUNKTEN.]

1. Möglichkeit: [WIR BETRACHTEN NUR DIE ZUSÄTZLICHE VORAUSSETZUNG “Angenommen, in der Stadt ist Kirmes” (K) UND FORMULIEREN “Wird Borsti *nicht* gefressen, wenn das Wetter im Sommer gut und der Händler ehrlich waren?” ALS EIGENSTÄNDIGE BEHAUPTUNG $((W_1 \wedge H) \Rightarrow \neg B)$.]

– Hinzunahme der Voraussetzung:

- “Angenommen, in der Stadt ist Kirmes”:

K .

– Und die Formulierung des Problems:

- “Wird Borsti *nicht* gefressen, wenn das Wetter im Sommer gut und der Händler ehrlich waren?”:

$$Beh := ((W_1 \wedge H) \Rightarrow \neg B) \equiv (\neg W_1 \vee \neg H \vee \neg B).$$

Zu $F \wedge K$ kommt jetzt die negierte Behauptung $\neg Beh \equiv W_1 \wedge H \wedge B$ hinzu: [WIR WOLLEN ZEIGEN, DAS $((F \wedge K) \Rightarrow Beh)$ EINE TAUTOLOGIE IST, ALSO ZEIGEN WIR DIE UNERFÜLLBARKEIT VON

$$\neg((F \wedge K) \Rightarrow Beh) \equiv \neg(\neg(F \wedge K) \vee Beh) \equiv (F \wedge K \wedge \neg Beh)$$

ALSO VON $(F \wedge K \wedge W_1 \wedge H \wedge B)$.]

2. Möglichkeit: [WIR BETRACHTEN JETZT “Angenommen, in der Stadt ist Kirmes” (K) UND “..., wenn das Wetter im Sommer gut und der Händler ehrlich waren?” ($W_1 \wedge H$) ALS VORAUSSETZUNGEN UND ZEIGEN DAS AUS $(F \wedge K \wedge W_1 \wedge H)$ DIE FORMEL $(\neg B)$ FOLGT.]

– Hinzunahme der Voraussetzung:

- “Angenommen, in der Stadt ist Kirmes”:

$$K$$

und die Voraussetzungen der Frage: “..., wenn das Wetter im Sommer gut und der Händler ehrlich waren?”:

$$(W_1 \wedge H).$$

– Und die Formulierung des Problems:

- “Wird Borsti *nicht* gefressen, wenn ...”: [ZEIGE ALSO, DASS $((F \wedge K \wedge W_1 \wedge H) \Rightarrow \neg B)$ EINE TAUTOLOGIE IST, ALSO IST DIE UNERFÜLLBARKEIT VON

$$\begin{aligned} \neg((F \wedge K \wedge W_1 \wedge H) \Rightarrow \neg B) &\equiv \neg(\neg(F \wedge K \wedge W_1 \wedge H) \vee \neg B) \\ &\equiv (F \wedge K \wedge W_1 \wedge H \wedge B) \end{aligned}$$

ZU ZEIGEN.]

Markierungsalgorithmus:

– Zeige die Unerfüllbarkeit von

$$\begin{aligned} L &:= F \wedge K \wedge W_1 \wedge H \wedge B \\ &\equiv (\neg H \vee S) \wedge (\neg S \vee \neg W_1 \vee G) \wedge (\neg G \vee W_2) \wedge (\neg W_2 \vee \neg K \vee A) \\ &\quad \wedge (\neg W_2 \vee W_3) \wedge (\neg W_3 \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge K \wedge W_1 \wedge H \wedge B \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(L) = & \{ \{ \neg H, S \}, \{ \neg S, \neg W_1, G \}, \{ \neg G, W_2 \}, \{ \neg W_2, \neg K, A \}, \\ & \{ \neg W_2, W_3 \}, \{ \neg W_3, \neg B \}, \{ A, \neg B \}, \{ K \}, \{ W_1 \}, \{ H \}, \{ B \} \} \end{aligned}$$

mit Hilfe des Markierungsalgorithmus [DEFINITION 2.7]:

[WIR HABEN, NACH DEFINITION 2.5, DIE STARTKLAUSELN

$$\{ K \}, \{ W_1 \}, \{ H \}, \{ B \},$$

DIE PROZEDURKLAUSELN:

$$\{ \neg H, S \}, \{ \neg S, \neg W_1, G \}, \{ \neg G, W_2 \}, \{ \neg W_2, \neg K, A \}, \{ \neg W_2, W_3 \}, \{ A, \neg B \},$$

UND DIE ZIELKLAUSEL:

$$\{ \neg W_3, \neg B \}.]$$

1. Schritt: Markiere K, W_1, H, B :

$$\mathcal{K}(L) = \{ \{ \underline{\neg H}, \underline{S} \}, \{ \neg S, \underline{\neg W_1}, \underline{G} \}, \{ \neg G, \underline{W_2} \}, \{ \neg W_2, \underline{\neg K}, \underline{A} \}, \\ \{ \neg W_2, \underline{W_3} \}, \{ \neg W_3, \underline{\neg B} \}, \{ \underline{A}, \underline{\neg B} \}, \{ \underline{K} \}, \{ \underline{W_1} \}, \{ \underline{H} \}, \{ \underline{B} \} \}$$

2. Schritt: Markiere S, A :

$$\mathcal{K}(L) = \{ \{ \underline{\neg H}, \underline{S} \}, \{ \underline{\neg S}, \underline{\neg W_1}, \underline{G} \}, \{ \neg G, \underline{W_2} \}, \{ \neg W_2, \underline{\neg K}, \underline{A} \}, \\ \{ \neg W_2, \underline{W_3} \}, \{ \neg W_3, \underline{\neg B} \}, \{ \underline{A}, \underline{\neg B} \}, \{ \underline{K} \}, \{ \underline{W_1} \}, \{ \underline{H} \}, \{ \underline{B} \} \}$$

3. Schritt: Markiere G :

$$\mathcal{K}(L) = \{ \{ \underline{\neg H}, \underline{S} \}, \{ \underline{\neg S}, \underline{\neg W_1}, \underline{G} \}, \{ \underline{\neg G}, \underline{W_2} \}, \{ \neg W_2, \underline{\neg K}, \underline{A} \}, \\ \{ \neg W_2, \underline{W_3} \}, \{ \neg W_3, \underline{\neg B} \}, \{ \underline{A}, \underline{\neg B} \}, \{ \underline{K} \}, \{ \underline{W_1} \}, \{ \underline{H} \}, \{ \underline{B} \} \}$$

4. Schritt: Markiere W_2 :

$$\mathcal{K}(L) = \{ \{ \underline{\neg H}, \underline{S} \}, \{ \underline{\neg S}, \underline{\neg W_1}, \underline{G} \}, \{ \underline{\neg G}, \underline{W_2} \}, \{ \underline{\neg W_2}, \underline{\neg K}, \underline{A} \}, \\ \{ \underline{\neg W_2}, \underline{W_3} \}, \{ \neg W_3, \underline{\neg B} \}, \{ \underline{A}, \underline{\neg B} \}, \{ \underline{K} \}, \{ \underline{W_1} \}, \{ \underline{H} \}, \{ \underline{B} \} \}$$

5. Schritt: Markiere W_3 :

$$\mathcal{K}(L) = \{ \{ \underline{\neg H}, \underline{S} \}, \{ \underline{\neg S}, \underline{\neg W_1}, \underline{G} \}, \{ \underline{\neg G}, \underline{W_2} \}, \{ \underline{\neg W_2}, \underline{\neg K}, \underline{A} \}, \\ \{ \underline{\neg W_2}, \underline{W_3} \}, \{ \underline{\neg W_3}, \underline{\neg B} \}, \{ \underline{A}, \underline{\neg B} \}, \{ \underline{K} \}, \{ \underline{W_1} \}, \{ \underline{H} \}, \{ \underline{B} \} \}$$

[IN DER KLAUSUR REICHT ES, WENN IHR DIE KLAUSELMENGE EIN MAL HINSCHREIBT UND DANN NACH UND NACH UNTERSTREICHT, NATÜRLICH MIT ANGABE DER SCHRITTE.]

[FÜR DIESE BEIDEN TEILE ZUSAMMEN:]

1,5 P

Antwort:

- Da wir die Zielklausel $\{ \neg W_3, \neg B \}$ vollständig markiert haben ist die Unerfüllbarkeit von $F \wedge K \wedge W_1 \wedge H \wedge B$ gezeigt, also wird Borsti nicht gefressen.

[DIES KANN DER FEHLENDE HALBE PUNKT SEIN!]

0,5 P