Prof. Dr. Martin Kreuzer

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Anwendungen der Computeralgebra“
Blatt 3

Im Folgenden sei K ein Körper und $P = K[x_1, \ldots, x_n]$.

Aufgabe 10 (Nulldimensional oder nicht nulldimensional, das ist hier die Frage!)
Implementieren Sie eine CoCoA–Funktion `IsZeroDim` (I), die für ein gegebenes Polynomideal I testet, ob es 0–dimensional ist und den entsprechenden Boolschen Wert ausgibt.
Prüfen Sie mit Hilfe Ihrer Funktion, ob die folgenden Ideale 0–dimensional sind:

a) $I_1 = \langle x_1x_3 - {x_2}^2,\, x_1x_4 - x_2x_3,\, x_2x_4 - {x_3}^2\rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$

b) $I_2 = \langle {x_1}^3 - x_2{x_3}^2,\, {x_1}^2x_2x_3 - {x_2}^4,\, {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2\rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$

c) $I_3 = \langle x_1x_2 - {x_3}^3,\, {x_2}^2 - x_3x_4,\, x_1x_3 - {x_4}^3,\, x_2x_4 - {x_3}^2\rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$

d) $I_4 = \langle {x_1}^2 - x_1x_2,\, {x_2}^2 - x_2x_3,\, {x_3}^2 - x_3x_1,\, x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3\rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$

Aufgabe 11 (Die ultimative Antwort ist 42. Doch was ist die ultimative Frage?)
Beweisen Sie, dass das algebraische Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcl} z^5 + x^2z + yz^2 + x^2 + yz + 1 & = & 0 \\ x^2z^2 + yz^3 - x^2 - yz & = & 0 \\ 3y^4 - 3yz^3 + 34x^2z + 34yz^2 + 20x^2 + 20yz & = & 0 \\ x^3 + xyz - x^2 - yz & = & 0 \\ x^2y + y^2z + 2x^2 + 2yz & = & 0 \end{array}\right.$$

genau 42 Lösungen in $\overline{\mathbb{Q}}$ besitzt.

Aufgabe 12 (Quadratfrei, praktisch, gut!)
Schreiben Sie eine CoCoA–Funktion `SqFree` (F), die nachprüft, ob der Grundkörper $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{F}_p$ ist und den quadratfreien Teil eines univarianten Polynoms F dann entsprechend berechnet.
Bestimmen Sie damit die quadratfreien Teile der folgenden Polynome:

a) $f_1 = x^9 + 2x^8 - x^7 + 2x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2 \in \mathbb{F}_5[x]$

b) $f_2 = x^{12} + 2x^{11} + 5x^{10} - x^9 + x^8 - 4x^7 - x^6 - 4x^5 - x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 3x + 4 \in \mathbb{F}_{11}[x]$

c) $f_3 = x^{13} + x^{12} - x - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$

Aufgabe 13 (Bild Dir meine Meinung: Radikale Ideale in der nullten Dimension!)
Schreiben Sie eine CoCoA–Funktion `ZeroDimRad` (I), die ein 0–dimensionales Polynomideal $I \subseteq P$ nimmt und sein Radikal $\sqrt{I}$ berechnet.
Verwenden Sie diese Funktion, um die Radikale der folgenden Ideale zu finden:

a) $I_1 = \langle x^3,\, x^2y + x,\, y^2 \rangle \subseteq \mathbb{Q}\,[x, y]$

b) $I_2 = \langle x^{27} + y^{27} + 1,\, x^{18} - x^9y^9 - x^9 \rangle \subseteq \mathbb{F}_3\,[x, y]$

c) $I_3 = \langle y^4 + 2y^3 + y^2,\, xy^2 + y^3 + xy + y^2,\, y^2z + yz,\, z^2,\, xz + yz,\, x^2 + 2xy + y^2 \rangle \subseteq \mathbb{Q}\,[x, y, z]$

d) $I_4 = \langle y^{98} + y^{49},\, x^{49} + y^{49},\, z^7 \rangle \subseteq \mathbb{F}_7\,[x, y, z]$

Aufgabe 14 (Die radikale Suche nach einem idealen Körper)
Finden Sie ein Beispiel eines Körpers K und eines Radikalideals $I \subseteq K\,[x]$, so dass $I \cdot \overline{K}\,[x]$ kein Radikalideal ist, wobei $\overline{K}$ den algebraische Abschluss von K bezeichne.