Prof. Dr. Martin Kreuzer

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Anwendungen der Computeralgebra“

Blatt 4

Im Folgenden sei K ein Körper und $P = K[x_1, \ldots, x_n]$.

Aufgabe 15 (Ein Programm ohne Bugs ist nicht die normale Lage.)
Sei I ein 0–dimensionales Radikalideal in $P = K[x_1, \ldots, x_n]$.

a) Schreiben Sie eine CoCoA–Funktion `IsNormalPos` $(\ldots)$, die nachprüft, ob sich I für $i \in \{1, \ldots, n\}$ in normaler x_i–Lage befindet und entweder das entsprechende i oder FALSE ausgibt.

b) Wenden sie Ihre Funktion `IsNormalPos` $(\ldots)$ an um herauszufinden, ob sich die folgenden 0–dimensionalen Ideale für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ in normaler x_i–Lage befinden.

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle x^2 + y^2 - 1,\, 4xy - 2x - 2y + 1 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y] \\ I_2 &= \langle x^2 - y,\, x^2 - 3x + 2 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y] \\ I_3 &= \langle x + y + z,\, y^2 + y,\, yz + z,\, z^2 - z \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z] \end{aligned}$$

c) Angenommen, das Ideal I befindet sich für kein $i \in \{1, \ldots, n\}$ in normaler x_i–Lage. Schreiben Sie eine CoCoA–Funktion `NormalPosTrafo` $(\ldots)$, die einen Index $i \in \{1, \ldots, n\}$ und ein Tupel $(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ berechnet, so dass die lineare Koordinatentransformation $x_j \mapsto x_j$ für $j \neq i$ und $x_i \mapsto x_i - c_1x_1 - \ldots - c_{i-1}x_{i-1} - c_{i+1}x_{i+1} - \ldots - c_nx_n$ das Ideal in ein Ideal in normaler x_i–Lage transformiert.

d) Verwenden Sie Ihre Funktion `NormalPosTrafo` $(\ldots)$ um lineare Koordinatentransformationen zu finden, die die folgenden Ideale in normale x_i–Lage für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ bringen.

$$\begin{aligned} J_1 &= \langle x^2 + y^2 + 3,\, x^2 - y^2 + 1 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y] \\ J_2 &= \langle xy,\, x^2 + x,\, y^3 + y^2 + y \rangle \subseteq \mathbb{F}_2[x, y] \\ J_3 &= \langle x^3 - x,\, y^2 + y,\, z^2 - z \rangle \subseteq \mathbb{F}_3[x, y, z] \end{aligned}$$

Aufgabe 16 (Besser man bleibt am Montag morgen im Bett liegen
statt die ganze Woche den Montagscode zu debuggen.)
Kombinieren Sie die bisher entwickelten CoCoA–Funktionen zu einer Funkton `LexSysSolve` $(\ldots)$, die eine Liste von Polynomen $F = (f_1, \ldots, f_s) \in P^s$ nimmt und das zugehörige algebraische Gleichungssystem

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} f_1(x_1, \ldots, x_n) &=& 0 \\ &\vdots& \\ f_s(x_1, \ldots, x_n) &=& 0 \end{array} \right.$$

im Sinne von Korollar 3.20 löst. Verwenden Sie dann Ihre Funktion `LexSysSolve` um die folgenden Systeme zu lösen.

a) $F_1 = (x^2 + y + z - 1,\, x + y^2 + z - 1,\, x + y + z^2 - 1) \in \mathbb{Q}[x, y, z]^3$

b) F_2, das System aus Beispiel 3.7.17 in [KR1]

c) $F_3 = (x^2 + y^2 + z^2 - 9,\, 3x^2 - y^2z,\, x^2z - 2y^2 + 2) \in \mathbb{Q}[x, y, z]^3$

d) $F_4 = (x^3 + y^3 - z^3 + xy - x - y,\, xz - yz,\, xy^2 - xy - y^2 + y,\, x^2y - x^2 - xy + x,\, y^4 - y^3)$ in $\mathbb{F}_3[x, y, z]^5$

Aufgabe 17 (Bugs come in when you open Windows.)
Sei $I = \langle f_1, f_2 \rangle \subseteq P = Q[x,y]$ das Ideal, das von $f_1 = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + axy - 1$ und $f_2 = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + bxy - 1$ erzeugt wird. Berechnen Sie die $\mathcal{O}$–Randbasis von I bzgl. $\mathcal{O} = \{1, x, y, xy\}$, wobei $a, b \in \mathbb{Q}$ beliebig sind. Zeigen Sie, dass die $\mathcal{O}$–Randbasis „stetig“ von a und b abhängt.

Aufgabe 18 (Hast Du die Wahl zwischen zwei Theorien, so wähle die lustigere!)
Sei A die Menge aller Ideale I in $P = \mathbb{Q}[x,y]$, die eine $\{1, x\}$–Randbasis besitzen. Zeigen Sie, dass A mit $\mathbb{Q}^4$ identifiziert werden kann.

Aufgabe 19 (Diese alte Schachtel hat viele Ränder!)
Seien $a, b \in \mathbb{N}_+$ und sei $\mathcal{O} = \{x^i y^j \mid 0 \leq i \leq a,\ 0 \leq j \leq b\}$. Bestimmen Sie $\partial^k \mathcal{O}$ für jedes $k \geq 0$.

Aufgabe 20 (Die Programmierer versuchen Ihre Programme narrensicher zu machen.
Aber die Narren sind erfindungsreicher.)
Implementieren Sie den Randbasis–Algorithmus in einer CoCoA–Funktion `BBAlgorithm`(...). Verwenden Sie Ihre Funktion dann, um Randbasen der folgenden Ideale bzgl. der angegebenen Termordnungen zu berechnen.

a) $I_1 = \left\langle x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 - x - \frac{1}{2}y,\ y^3 - y,\ xy^2 - xy \right\rangle \subseteq \mathbb{Q}[x,y]$ bzgl. `DegLex`.

b) $I_2 = \langle x^2 - xy + y^2,\ x^3 - x^2y,\ x^2y - xy^2,\ xy^2 - y^3,\ x^3 + y^3 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x,y]$ bzgl. `DegRevLex`.

c) $I_3 = \langle x^2 + y^2 - xy,\ x^3 - x^2,\ y^3 - y^2,\ x^2y - x,\ xy^2 - y \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x,y]$ bzgl. `Lex`.