

Inhaltsverzeichnis 1. Semester

I Vorgeplänkel	
1 Mengenlehre - die neue Mathematik	1
Mengen, Abbildungen, Beweise	
A Was ist eine Menge?	1
B Wie kann man eine Menge beschreiben?	1
C Welche besonderen Mengen gibt es?	1
D Was kann man mit Mengen so machen?	1
E Was ist eine Abbildung?	2
F Welche Eigenschaften können Abbildungen besitzen?	3
G Was kann man mit Abbildungen so alles machen?	4
H Was ist Mathematik?	4
I Was ist ein Beweis?	5
J Wie kann man etwas beweisen?	5
1.16 Beweis, direkter	5
1.17 Beweis, indirekter	5
1.18 Beweis durch Widerspruch	6
1.19 Beweis durch vollst. Induktion	7
2 Unsere lieben Zahlen	8
Gruppen, Ringe, Körper	
A Welche Zahlen gibt es überhaupt?	8
B Was kann man mit Zahlen so alles machen?	8
C Gibt es noch weitere Körper?	9
2.5 Division mit Rest	9
2.8 Rechnen mit Resten	9
2.9 Endliche Ringe	10
3 m lineare Gleichungen in n Unbestimmten	12
A Was ist ein lineares Gleichungssystem?	12
B Wie kann man ein LGS systematisch lösen?	14
3.12 Gauß'sches Eliminationsverfahren	16
3.13 Gauß-Jordan Verfahren	16
C Was nützt uns die reduzierte Zeilenstufenform eines LGS?	17
3.16 Ablesen der Lösungsmenge aus der Reduzierten Zeilenstufenform	18
D Welche Anwendungen besitzt das Lösen von LGS?	18
E Wie kann man LGS effektiv lösen?	19
3.20 Reduktion auf homogene LGS	19
3.22 Matrizen Notation	20
4 Blick in den n-dimensionalen Raum	21
A Was kann man mit Punkten im R^n so alles machen?	23
4.6 Geometrische Bedeutung der Addition und der skalaren Multiplikation	23
4.7 Rechenregeln für Addition und skalare Multiplikation	24
B Was hat das alles mit Geometrie zu tun?	24
4.8 Längen- und Winkelmessung	24
4.11 Eigenschaften der Norm	26
4.13 Eigenschaften des Skalarproduktes	27
4.14 Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung	27
II Die ersten Schirmützel	
5 Räume voller Vektoren	29
Vektorräume, Untervektorräume	

A Was ist ein Vektorraum?	29
B Kann ein Vektorraum in einem anderen enthalten sein?	30
5.8 Untervektorraumkriterium	30
C Wie kann man sich Untervektorräume selbst basteln?	31
D Was kann man mit Untervektorräumen sonst noch anfangen?	32
6 Basiswissen über Basen	34
Basen	
A Was ist eine Basis?	34
B Besitzt jeder Vektorraum eine Basis?	35
6.7 Basisergänzungssatz	35
6.8 Basiswahlsatz	36
C Wie findet man eine Basis eines endlich erzeugten (Unter-)Vektorraums?	36
6.10 Basisberechnung	36
D Sind alle Basen gleich lang?	38
6.12 Austauschlemma	38
6.13 Steinizscher Austauschsatz	38
E Ist das alles was man über die Dimension wissen muss?	40
6.20 Dimensionssatz	40
7 Wilde Reise duch die Dimensionen	42
Lineare Abbildungen, Kerne, Bilder	
A Wie bitte? Homomorphismus?	42
B Kleine Bastelanleitung für lineare Abbildungen	43
C Monomorphismen, Epimorphismen, Isomorphismen, Endomorphismen und Automorphismen: Es wird immer wilder!	44
7.12 Charakterisierungen von Monomorphismen und Epimorphismen	46
D Was geschieht mit den Dimensionen bei linearen Abbildungen?	47
7.14 Dimensionssatz für lineare Abbildungen	47
E Hat dies etwas mit dem LGS zu tun?	48
7.18 Dimension des Lösungsraumes eines homogenen LGS	48
8 Lustiges Rechnen mit Zahlenvierecken	50
Matrizenrechnung	
8.9 Eigenschaften des Matrizenproduktes	53
A Wie berechnet man die inverse Matrix?	55
8.19 Berechnung der inversen Matrix	57
B Was kann man mit Matrizen sonst noch anfangen?	58
8.23 Eigenschaften der transponierten Matrix	58
9 Basis, wechse dich!	60
A Was haben Matrizen mit linearer Algebra zu tun?	60
B Was passiert mit der Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung, wenn man sie bezüglich anderer Basen bestimmt?	63
9.9 Berechnung der Transformationsmatrix	64
9.12 Basis-Transformationsformel	65
III In der Bredouille	
10 Alle sind gleich, aber einer ist gleicher	68
Äquivalenzrelationen	
11 Buntres Treiben in Gruppen	71
A Was war noch gleich eine Gruppe?	71
B Ja, gibt's denn so was?	71
11.3 Symmetrische Gruppe	71
11.4 Gruppentafeln	72
11.5 Symmetriegruppen	72
C Kann eine Teilmenge einer Gruppe wieder eine Gruppe sein?	73
11.7 Untergruppenkriterium	74

11.12 Satz von Lagrange	75
D Welche Gruppen braucht man in der linearen Abgebra?	77
11.26 Charakterisierung der geraden Permutationen	79
E Hoffentlich gibt es keine Gruppenhomomorfiesmen	80
12 Am Anfang war die Zahl	82
Euklidischer Algorithmus, Primzahlen	
A Wie kann man die Multiplikation in \mathbb{Z} algebraisch verstehen?	82
12.4 Division mit Rest II	82
12.9 Euklidischer Algorithmus	84
B Hilfe! Der fragt Hauptidealbereiche ab!	85
C Und wie passen Primzahlen in dieses Bild?	86
12.16 Fundamentalsatz der Arithmetik	86
13 Die Kunst des Buchstabenrechnens	88
Polynomringe	
A Wie kommen die Buchstaben in die Algebra?	88
13.7 Polynomdivision	89
13.12 Euklidischer Algorithmus für Polynome	91
IV Auf zum Hornberger Schießen	
14 Die Zahl die alles wusste	93
Determinante	
A Was weiß die Zahl alles?	93
B Wie kann man das verallgemeinern?	93
14.5 Eigenschaften der Determinantenfunktion	95
14.7 Leibnizsche Determinantenformel	96
C Wie kann man Determinanten bestimmen?	97
14.10 Determinantenberechnung	97
14.13 Entwicklungssatz nach Laplace	98
14.16 Determinanten durch elementare Spaltenoperationen	99
14.18 Multiplikationssatz für Determinanten	99
14.19 Determinante der inversen Matrix	100
D Was weiß die Zahl $\det(A)$ denn nun wirklich?	100
E Ist das nicht alles viel zu abstrakt?	103
15 Über Charakterfragen und innere Werte	104
Charakteristisches Polynom, Eigenwerte	
A Was sind Eigenwerte und wieso braucht man sie?	104
B Wie kann man Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen?	107
16 Wenn jeder Vektor eine Menge ist	110
Restklassenvektorräume	
16.3 Gleichheit von Nebenklassen	110
16.8 Kanonischer Epimorphismus	112
V Und zum Schluss der Patherschuss	
17 Das Spiel mit den Pfeilen	113
Exakte Sequenzen	
17.6 Eulersche Gleichung	114
17.7 Fünfer Lemma	115
18 Alles umdrehen, bitte!	116
Duale Vektorräume	