Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 10.05.2007, 14.00h

Lineare Algebra und analytische Geometrie II für Lehramt Gymnasium
SS 2007 Übungsblatt 4

Aufgabe 1 Spieglein, Spieglein im Regal, deine Meinung ist mir sch... egal!

a) Gegeben sei eine Ebene $E:\ n_1x+n_2y+n_3z=0$ im $\mathbb{R}^3$ in Hessescher Normalform. Bestimmen Sie die Matrix S der Spiegelung an dieser Ebene bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$!

b) Zeigen Sie, dass für die Matrix S gilt

$$S^2 = I_3, \quad S^{tr} = S = S^{-1} \text{ und } \det S = -1\,!$$

Aufgabe 2 Was ist Bigamie? Wenn man einmal zu oft heiratet! Was ist Monogamie? Das Gleiche!

Sei K ein Körper und $\Phi : K^2 \times K^2 \to K$ die durch $\Phi\big(\binom{a}{b},\binom{c}{d}\big) = ad - bc$ definierte Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass Φ eine Bilinearform ist!

b) Geben Sie die Gramsche Matrix von Φ bzgl. der Standardbasis an!

c) Beweisen Sie, dass Φ nicht ausgeartet ist!

d) Zeigen Sie, dass $\Phi(v,v) = 0$ gilt für alle $v \in K^2$!

Aufgabe 3 Bilinearformen machen's sowohl mit der ersten als auch mit der zweiten Komponente

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $(v_1,\dots,v_n)$. Sei $\Phi : V \times V \to K$ eine (nicht notwendig symmetrische) bilineare Abbildung mit Gramscher Matrix $(a_{ij}) := (\Phi(v_i,v_j))$. Für jedes $v \in V$ sind

$$\Phi(v,-) : V \to K, \quad w \mapsto \Phi(v,w) \qquad \text{und} \qquad \Phi(-,v) : V \to K, \quad w \mapsto \Phi(w,v)$$

Linearformen.

a) Zeigen Sie, dass

$$\varphi : V \to V^*, \quad v \mapsto \Phi(v,-) \qquad \text{und} \qquad \psi : V \to V^*, \quad v \mapsto \Phi(-,v)$$

lineare Abbildungen sind!

b) Sei $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Berechnen Sie die darstellenden Matrizen von $\Phi(v,-)$ und $\Phi(-,v)$ bezüglich der Basen $(v_1,\dots,v_n)$ von V und 1 von K!

c) Berechnen Sie die darstellenden Matrizen von φ und ψ bezüglich der Basis $(v_1,\dots,v_n)$ und der dualen Basis $(v_1^*,\dots,v_n^*)$!

d) Zeigen Sie $\dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi)) = \dim_K(\mathrm{Kern}(\psi))$!

Aufgabe 4 Killing me softly

Sei K ein Körper, $V := \mathrm{Mat}_n(K)$ und $\Phi : V \times V \to K$ die durch $\Phi(A, B) = \mathrm{Spur}(AB)$ definierte Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass Φ eine symmetrische Bilinearform auf V ist! Sie heißt die Killingform auf $\mathrm{Mat}_n(K)$. Ist Φ nicht ausgeartet?

b) Berechnen Sie für $V := \mathrm{Mat}_2(K)$ das orthogonale Komplement $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}^{\perp}$!

c) Geben Sie eine Basis $\{v_1, \ldots, v_4\}$ von $V := \mathrm{Mat}_2(K)$ an, so dass $\Phi(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$ gilt!

Aufgabe 5 Mathematiker sterben nicht - sie verlieren nur einige ihrer Funktionen

a) Implementieren Sie den Algorithmus aus Satz 20.7 zur Berechnung des Minimalpolynoms einer Matrix in einer CoCoA-Funktion `MinPoly(A)`! Die Eingabe dieser Funktion soll eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ sein, die Ausgabe das Minimalpolynom $\mu_A \in \mathbb{Q}[x]$.

   Tipp: Sie können z.B. die eingebauten Funktionen `Flatten(...)`, `LinKer(...)` und eine `While`-Schleife verwenden.

b) Bestimmen Sie mit dieser Funktion das Minimalpolynom von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -5 & -6 & -9 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})\,!$$