Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 08.06.2007, 14.00h

Lineare Algebra und analytische Geometrie II für Lehramt Gymnasium

SS 2007 Übungsblatt 6

Aufgabe 1 Algebraiker tun es in Gruppen und mit einem Körper

Zeigen Sie:

a) Die Menge aller orthogonalen Matrizen aus $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ bildet mit der Multiplikation von Matrizen als Verknüpfung eine Gruppe! Sie heißt die **orthogonale Gruppe** und wird mit $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ bezeichnet.

b)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) & \subseteq & \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ \cap\!\!| & & \cap\!\!| \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) & \subseteq & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

sind Ketten von Untergruppen.
Hierbei bezeichnet $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ die **spezielle orthogonale Gruppe**, die alle orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 enthält.

c)

$$A \cdot \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \cdot A^{-1} = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$$

für alle $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

Aufgabe 2 Mathematiker können Hinrichtungen rückgängig machen

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ und sei $f : V \to V$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung.

Zeigen Sie, dass f genau dann winkeltreu ist, wenn f Komposition einer orthogonalen $\mathbb{R}$–linearen Abbildung $g : V \to V$ und einer Homothetie ist, d. h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $f = h_\lambda \circ g$!

Wiederholung (siehe LinA I Beispiel 7.4): Sei $a \in K$. Dann heißt die Abbildung $h_a : V \to V$, $v \mapsto a \cdot v$ die **Homothetie** mit a.

Aufgabe 3 Treffen sich zwei Matrizen. Sagt die eine: „Komm wir gehen in den Wald und machen A hoch minus 1." Sagt die andere: „Mensch, bist Du invers!"

a) Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ heißt **nilpotent**, wenn es ein $i \geq 1$ gibt mit $A^i = 0$.

Sei A symmetrisch und nilpotent. Zeigen Sie, dass dann $A = 0$ gilt!

b) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ zwei symmetrische Matrizen. Zeigen Sie, dass $A \cdot B$ genau dann symmetrisch ist, wenn $A \cdot B = B \cdot A$ gilt!

Aufgabe 4 Vertraue keinem Beweis nach 23Uhr!

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ und sei $f : V \to V$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung.

Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) f ist orthogonal.

b) Für alle $v \in V$ gilt $\|f(v)\|_\Phi = \|v\|_\Phi$.

c) Für eine beliebige Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V gilt

$$\Phi(f(v_i), f(v_j)) = \Phi(v_i, v_j)$$

für $i, j = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 5 Zeilen-Spalten-Operation gelungen! Matrix tot!

a) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `ZSOperation` (A, I, J), die eine symmetrische Matrix A nimmt und mit Hilfe des I-ten Elements der Hauptdiagonale den (I, J)-Eintrag zum Verschwinden bringt! Ist das I-te Diagonalelement gleich 0, so gehen Sie wie in der Vorlesung angegeben vor!

b) Verwenden Sie Ihre Funktion `ZSOperation` (A, I, J) interaktiv, um die folgenden Matrizen auf Diagonalgestalt zu transformieren:

1)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

2)
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q})$$