# Logik und Computerbeweise
# Schnupperuni 2007

Holger Bluhm,
Prof. Dr. Martin Kreuzer,
Stefan Kühling

02.08.2007



# Inhaltsverzeichnis

Ja, was ist Logik nun wirklich?

Ja, was ist Logik nun wirklich?

So genau können wir dies leider auch nicht beschreiben. Das Wort „Logik“ entstammt dem altgriechischen Wort „logos“, welches „Vernunft“ bedeutet. Im allgemeinen Sprachgebrauch bedeutet Logik die Fähigkeit, folgerichtig (also „logisch“) zu denken. In den nächsten anderthalb Stunden widmen wir uns hauptsächlich der *formalen Logik*, also dem Studium der formalen Beziehungen zwischen Denkinhalten. Der Prototyp einer mathematischen Beschreibung solcher Denkinhalte ist der der *Aussage*, für die wir die folgende Pseudodefinition anzubieten haben.

Ja, was ist Logik nun wirklich?

So genau können wir dies leider auch nicht beschreiben. Das Wort „Logik“ entstammt dem altgriechischen Wort „logos“, welches „Vernunft“ bedeutet. Im allgemeinen Sprachgebrauch bedeutet Logik die Fähigkeit, folgerichtig (also „logisch“) zu denken. In den nächsten anderthalb Stunden widmen wir uns hauptsächlich der *formalen Logik*, also dem Studium der formalen Beziehungen zwischen Denkinhalten. Der Prototyp einer mathematischen Beschreibung solcher Denkinhalte ist der der *Aussage*, für die wir die folgende Pseudodefinition anzubieten haben.

**Definition 1.1**

Eine (logische) **Aussage** ist ein sprachliches Gebilde, das entweder **wahr** oder **falsch** ist.

## Beispiel 1.2

Die folgenden sprachlichen Gebilde stellen Beispiele für Aussagen dar.

$A$ = „Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland.“

$B$ = „Der Wal ist ein Fisch.“

$C$ = „Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$.“

$D$ = „Das Programm `MyProg`$(\ldots)$ terminiert.“





**Beispiel 1.2**

Die folgenden sprachlichen Gebilde stellen Beispiele für Aussagen dar.

$$A = \text{„Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland."}$$
$$B = \text{„Der Wal ist ein Fisch."}$$
$$C = \text{„Für jede Zahl } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } x^2 \geq 0.\text{"}$$
$$D = \text{„Das Programm } \texttt{MyProg}\,(\ldots) \text{ terminiert."}$$

Hingegen stellen die folgenden sprachlichen Gebilde „Aussagen über Aussagen" dar.

$$E = \text{„Die Aussagen } A \text{ und } B \text{ sind beide wahr."}$$
$$F = \text{„Die Aussage } B \text{ gilt nicht."}$$
$$= \text{„Der Wal ist kein Fisch."}$$

Das sprachliche Gebilde „Morgen wird es regnen“ ist jedoch keine Aussage im Sinn von Definition 1.1, denn ihr Wahrheitswert hängt vom Standpunkt des Betrachters ab.

Nachdem wir jetzt die Abkürzungen (die sog. *atomaren Formeln*) haben, bleibt die Frage, was machen wir mit ihnen.

Nachdem wir jetzt die Abkürzungen (die sog. *atomaren Formeln*) haben, bleibt die Frage, was machen wir mit ihnen.

Um kompliziertere, zusammengesetzte Aussagen in logische Formeln zu übersetzen, brauchen wir *Verbindungselemente*.

Nachdem wir jetzt die Abkürzungen (die sog. *atomaren Formeln*) haben, bleibt die Frage, was machen wir mit ihnen.

Um kompliziertere, zusammengesetzte Aussagen in logische Formeln zu übersetzen, brauchen wir *Verbindungselemente*.

- „$A$ und $B$“: $A \wedge B$

Nachdem wir jetzt die Abkürzungen (die sog. *atomaren Formeln*) haben, bleibt die Frage, was machen wir mit ihnen.

Um kompliziertere, zusammengesetzte Aussagen in logische Formeln zu übersetzen, brauchen wir *Verbindungselemente*.

- „$A$ und $B$“: $A \wedge B$
- „$A$ oder $B$“: $A \vee B$





Nachdem wir jetzt die Abkürzungen (die sog. *atomaren Formeln*) haben, bleibt die Frage, was machen wir mit ihnen.

Um kompliziertere, zusammengesetzte Aussagen in logische Formeln zu übersetzen, brauchen wir *Verbindungselemente*.

- „$A$ und $B$“: $A \wedge B$
- „$A$ oder $B$“: $A \vee B$
- „nicht $A$“: $\neg A$

Logik und Computerbeweise
Holger Bluhm,
Prof. Dr. Martin Kreuzer,
Stefan Kühling
Aussagenlogik
Elementares
Wahrheitswerte
Übersetzungen
Computeralgebra
Übersetzungen
CoCoA
Einführung
Logik–Befehle
Computerbeweise

Nachdem wir jetzt die Abkürzungen (die sog. *atomaren Formeln*) haben, bleibt die Frage, was machen wir mit ihnen.

Um kompliziertere, zusammengesetzte Aussagen in logische Formeln zu übersetzen, brauchen wir *Verbindungselemente*.

- „$A$ und $B$“: $A \wedge B$
- „$A$ oder $B$“: $A \vee B$
- „nicht $A$“: $\neg A$

und daraus abgeleitet







Nachdem wir jetzt die Abkürzungen (die sog. *atomaren Formeln*) haben, bleibt die Frage, was machen wir mit ihnen.

Um kompliziertere, zusammengesetzte Aussagen in logische Formeln zu übersetzen, brauchen wir *Verbindungselemente*.

- „$A$ und $B$“: $A \wedge B$
- „$A$ oder $B$“: $A \vee B$
- „nicht $A$“: $\neg A$

und daraus abgeleitet

- Folgerung „$B$ gilt, wenn $A$ gilt“ oder „$A$ gilt nur dann, wenn $B$ gilt“:

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

Nachdem wir jetzt die Abkürzungen (die sog. *atomaren Formeln*) haben, bleibt die Frage, was machen wir mit ihnen.

Um kompliziertere, zusammengesetzte Aussagen in logische Formeln zu übersetzen, brauchen wir *Verbindungselemente*.

- „$A$ und $B$“: $A \wedge B$
- „$A$ oder $B$“: $A \vee B$
- „nicht $A$“: $\neg A$

und daraus abgeleitet

- Folgerung „$B$ gilt, wenn $A$ gilt“ oder „$A$ gilt nur dann, wenn $B$ gilt“:
$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$
- Äquivalenz „$B$ gilt genau dann, wenn $A$ gilt“:
$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

Logik und Computerbeweise
Holger Bluhm,
Prof. Dr. Martin Kreuzer,
Stefan Kühling



Wie erhalten wir jetzt den Wahrheitswert einer größeren Formel?







Wie erhalten wir jetzt den Wahrheitswert einer größeren Formel?

Da wir nur die Wahrheitswerte der elementaren Formeln haben (eine Aussage gilt oder sie gilt nicht), müssen wir den Wahrheitswert einer „größeren" Formel auf diese zurückführen.

Wie erhalten wir jetzt den Wahrheitswert einer größeren Formel?

Da wir nur die Wahrheitswerte der elementaren Formeln haben (eine Aussage gilt oder sie gilt nicht), müssen wir den Wahrheitswert einer „größeren“ Formel auf diese zurückführen.

Starten wir also mit der „und“–Verknüpfung:

Wie erhalten wir jetzt den Wahrheitswert einer größeren Formel?

Da wir nur die Wahrheitswerte der elementaren Formeln haben (eine Aussage gilt oder sie gilt nicht), müssen wir den Wahrheitswert einer „größeren“ Formel auf diese zurückführen.

Starten wir also mit der „und“–Verknüpfung:

| $\alpha(A)$ | $\alpha(B)$ | $\alpha(A \wedge B)$ |
|---|---|---|

Wie erhalten wir jetzt den Wahrheitswert einer größeren Formel?

Da wir nur die Wahrheitswerte der elementaren Formeln haben (eine Aussage gilt oder sie gilt nicht), müssen wir den Wahrheitswert einer „größeren“ Formel auf diese zurückführen.

Starten wir also mit der „und“–Verknüpfung:

| $\alpha(A)$ | $\alpha(B)$ | $\alpha(A \wedge B)$ |
|---|---|---|
| w | | |
| w | | |
| f | | |
| f | | |

Wie erhalten wir jetzt den Wahrheitswert einer größeren Formel?

Da wir nur die Wahrheitswerte der elementaren Formeln haben (eine Aussage gilt oder sie gilt nicht), müssen wir den Wahrheitswert einer „größeren" Formel auf diese zurückführen.

Starten wir also mit der „und"–Verknüpfung:

| $\alpha(A)$ | $\alpha(B)$ | $\alpha(A \wedge B)$ |
|---|---|---|
| w | w | |
| w | f | |
| f | w | |
| f | f | |

Wie erhalten wir jetzt den Wahrheitswert einer größeren Formel?

Da wir nur die Wahrheitswerte der elementaren Formeln haben (eine Aussage gilt oder sie gilt nicht), müssen wir den Wahrheitswert einer „größeren“ Formel auf diese zurückführen.

Starten wir also mit der „und“–Verknüpfung:

| $\alpha(A)$ | $\alpha(B)$ | $\alpha(A \wedge B)$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | |
| f | w | |
| f | f | |

Wie erhalten wir jetzt den Wahrheitswert einer größeren Formel?

Da wir nur die Wahrheitswerte der elementaren Formeln haben (eine Aussage gilt oder sie gilt nicht), müssen wir den Wahrheitswert einer „größeren“ Formel auf diese zurückführen.

Starten wir also mit der „und“–Verknüpfung:

| $\alpha(A)$ | $\alpha(B)$ | $\alpha(A \wedge B)$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

Wie erhalten wir jetzt den Wahrheitswert einer größeren Formel?

Da wir nur die Wahrheitswerte der elementaren Formeln haben (eine Aussage gilt oder sie gilt nicht), müssen wir den Wahrheitswert einer „größeren“ Formel auf diese zurückführen.

Starten wir also mit der „und“–Verknüpfung:

| $\alpha(A)$ | $\alpha(B)$ | $\alpha(A \wedge B)$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

oder

| $\alpha(A)$ | $\alpha(B)$ | $\alpha(A \wedge B)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Logik und Computerbeweise

Holger Bluhm,

Prof. Dr. Martin Kreuzer,

Stefan Kühling



Für die „oder“–Verknüpfung ergibt sich folgende Wahrheitstabelle.

Für die „oder“–Verknüpfung ergibt sich folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(A)$ | $\alpha(B)$ | $\alpha(A \vee B)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | |
| 1 | 0 | |
| 0 | 1 | |
| 0 | 0 | |

Für die „oder“–Verknüpfung ergibt sich folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(A)$ | $\alpha(B)$ | $\alpha(A \vee B)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | |

Logik und Computerbeweise

Holger Bluhm,

Prof. Dr. Martin Kreuzer,

Stefan Kühling

Aussagenlogik
Elementares
Wahrheitswerte
Übersetzungen

Computeralgebra
Übersetzungen

CoCoA
Einführung
Logik–Befehle

Computerbeweise

Für die „oder“–Verknüpfung ergibt sich folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(A)$ | $\alpha(B)$ | $\alpha(A \vee B)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Für die „oder“–Verknüpfung ergibt sich folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(A)$ | $\alpha(B)$ | $\alpha(A \vee B)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Und die „nicht“–Operation ergibt

Für die „oder“–Verknüpfung ergibt sich folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(A)$ | $\alpha(B)$ | $\alpha(A \vee B)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Und die „nicht“–Operation ergibt

| $\alpha(A)$ | $\alpha(\neg A)$ |
|---|---|
| 1 | |
| 0 | |

Für die „oder"–Verknüpfung ergibt sich folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(A)$ | $\alpha(B)$ | $\alpha(A \vee B)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Und die „nicht"–Operation ergibt

| $\alpha(A)$ | $\alpha(\neg A)$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 1 | | | | | | |
| 1 | | | | | | |
| 1 | | | | | | |
| 0 | | | | | | |
| 0 | | | | | | |
| 0 | | | | | | |
| 0 | | | | | | |

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | |
| 0 | 0 | | | | | |
| 0 | 0 | | | | | |

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | |
| 0 | 1 | 1 | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | |

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | |
| **1** | **0** | 1 | **1** | | | |
| **1** | **0** | 0 | **1** | | | |
| **0** | **1** | 1 | **1** | | | |
| **0** | **1** | 0 | **1** | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | |
| 0 | 0 | 0 | | | | |

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | | | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | | | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | | | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | | | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | | | |



Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | | | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | | | |
| 1 | **0** | 1 | 1 | **1** | | |
| 1 | **0** | 0 | 1 | **1** | | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | | | |
| 0 | **0** | 1 | 0 | **1** | | |
| 0 | **0** | 0 | 0 | **1** | | |

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | **1** | 0 | **1** | | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | | | |
| 1 | 0 | **1** | 1 | **1** | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | | |
| 0 | 1 | **1** | 1 | **1** | | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | | | |
| 0 | 0 | **1** | 0 | **1** | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | |

Logik und Computerbeweise
Holger Bluhm,
Prof. Dr. Martin Kreuzer,
Stefan Kühling
Aussagenlogik
Elementares
Wahrheitswerte
Übersetzungen
Computeralgebra
Übersetzungen
CoCoA
Einführung
Logik–Befehle
Computerbeweise

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | |

Logik und Computerbeweise
Holger Bluhm,
Prof. Dr. Martin Kreuzer,
Stefan Kühling

Aussagenlogik
Elementares
Wahrheitswerte
Übersetzungen
Computer-algebra
Übersetzungen
CoCoA
Einführung
Logik–Befehle
Computer-beweise

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | | |
| 1 | 1 | **0** | 0 | 0 | **1** | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | | |
| 1 | 0 | **0** | 1 | 1 | **1** | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |
| 0 | 1 | **0** | 1 | 0 | **1** | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | |
| 0 | 0 | **0** | 0 | 1 | **1** | |

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | 0 | 1 | **1** | |
| **1** | 1 | 0 | 0 | 0 | **1** | |
| **1** | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** | |
| **1** | 0 | 0 | 1 | 1 | **1** | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |





Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | **1** | **1** | **1** | **1** |
| 1 | 0 | 0 | **1** | **1** | **1** | **1** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |

Logik und Computerbeweise

Holger Bluhm,
Prof. Dr. Martin Kreuzer,
Stefan Kühling

Aussagenlogik
Elementares
Wahrheitswerte
Übersetzungen
Computeralgebra
Übersetzungen
CoCoA
Einführung
Logik–Befehle
Computerbeweise

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **1** | **0** | **1** | 1 | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Also sind die Belegungen $\alpha(P) = \alpha(A) = 1$, $\alpha(S) = 0$

Somit ergibt sich für die Formel

$$F := (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

folgende Wahrheitstabelle.

| $\alpha(P)$ | $\alpha(S)$ | $\alpha(A)$ | $\alpha(P \Leftrightarrow \neg S)$ | $\alpha(\neg S \vee A)$ | $\alpha(\neg A \vee P)$ | $\alpha(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **1** | **0** | **1** | 1 | 1 | 1 | **1** |
| **1** | **0** | **0** | 1 | 1 | 1 | **1** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Also sind die Belegungen $\alpha(P) = \alpha(A) = 1$, $\alpha(S) = 0$ und $\alpha(P) = 1$, $\alpha(S) = \alpha(A) = 0$ Modelle für $F$.

Wenn man nachweisen möchte, dass eine Formel immer gilt oder besser, dass eine Behauptung immer aus einer Menge von Voraussetzungen folgt, zeigt man die Unerfüllbarkeit der Negation der Formel.

Wenn man nachweisen möchte, dass eine Formel immer gilt oder besser, dass eine Behauptung immer aus einer Menge von Voraussetzungen folgt, zeigt man die Unerfüllbarkeit der Negation der Formel.

$$F \text{ gilt immer} \quad \Leftrightarrow \quad \neg F \text{ ist unerfüllbar}$$

Wenn man nachweisen möchte, dass eine Formel immer gilt oder besser, dass eine Behauptung immer aus einer Menge von Voraussetzungen folgt, zeigt man die Unerfüllbarkeit der Negation der Formel.

$$F \text{ gilt immer} \quad \Leftrightarrow \quad \neg F \text{ ist unerfüllbar}$$

$$\begin{array}{rcl} & & \neg((F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \Rightarrow G) \\ \text{Aus } F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n & & \quad \equiv \neg(\neg(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \vee G) \\ \text{folgt (immer) } G & \Leftrightarrow & \quad \equiv (F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \wedge \neg G \\ & & \text{ist unerfüllbar} \end{array}$$

**Beispiel 1.3 (Philosophisches)**

Platon hatte Recht mit seiner Einschätzung des Sokrates genau dann, wenn Sokrates kein großer Philosoph war. Wenn Sokrates ein großer Philosoph war, dann hatte Aristoteles Recht mit seiner Einschätzung des Platon. Aristoteles hatte nur dann Recht mit seiner Einschätzung des Platon, falls Platon Recht hatte mit seiner Einschätzung des Sokrates.

**Beispiel 1.3 (Philosophisches)**

Platon hatte Recht mit seiner Einschätzung des Sokrates genau dann, wenn Sokrates kein großer Philosoph war. Wenn Sokrates ein großer Philosoph war, dann hatte Aristoteles Recht mit seiner Einschätzung des Platon. Aristoteles hatte nur dann Recht mit seiner Einschätzung des Platon, falls Platon Recht hatte mit seiner Einschätzung des Sokrates.

1) Festlegung der Abkürzungen:

Holger Bluhm,
Prof. Dr. Martin Kreuzer,
Stefan Kühling



**Beispiel 1.3 (Philosophisches)**

Platon hatte Recht mit seiner Einschätzung des Sokrates genau dann, wenn Sokrates kein großer Philosoph war. Wenn Sokrates ein großer Philosoph war, dann hatte Aristoteles Recht mit seiner Einschätzung des Platon. Aristoteles hatte nur dann Recht mit seiner Einschätzung des Platon, falls Platon Recht hatte mit seiner Einschätzung des Sokrates.

1) Festlegung der Abkürzungen:

$$S \quad = \quad \text{„Sokrates war ein großer Philosoph.“}$$





**Beispiel 1.3 (Philosophisches)**

Platon hatte Recht mit seiner Einschätzung des Sokrates genau dann, wenn Sokrates kein großer Philosoph war. Wenn Sokrates ein großer Philosoph war, dann hatte Aristoteles Recht mit seiner Einschätzung des Platon. Aristoteles hatte nur dann Recht mit seiner Einschätzung des Platon, falls Platon Recht hatte mit seiner Einschätzung des Sokrates.

1) Festlegung der Abkürzungen:

$S$ = „Sokrates war ein großer Philosoph.“

$A$ = „Aristoteles hat Recht mit seiner Einschätzung des Platon.“

**Beispiel 1.3 (Philosophisches)**

Platon hatte Recht mit seiner Einschätzung des Sokrates genau dann, wenn Sokrates kein großer Philosoph war. Wenn Sokrates ein großer Philosoph war, dann hatte Aristoteles Recht mit seiner Einschätzung des Platon. Aristoteles hatte nur dann Recht mit seiner Einschätzung des Platon, falls Platon Recht hatte mit seiner Einschätzung des Sokrates.

1) Festlegung der Abkürzungen:

$S$ = „Sokrates war ein großer Philosoph."

$A$ = „Aristoteles hat Recht mit seiner Einschätzung des Platon."

$P$ = „Platon hatte Recht mit seiner Einschätzung des Sokrates."

2) Übersetzung der Aussagen:

2) Übersetzung der Aussagen:

- „Platon hatte Recht mit seiner Einschätzung des Sokrates genau dann, wenn Sokrates kein großer Philosoph war.“

$$F_1 := (P \Leftrightarrow \neg S)$$





2) Übersetzung der Aussagen:

- „Platon hatte Recht mit seiner Einschätzung des Sokrates genau dann, wenn Sokrates kein großer Philosoph war.“

$$F_1 := (P \Leftrightarrow \neg S)$$

- „Wenn Sokrates ein großer Philosoph war, dann hatte Aristoteles Recht mit seiner Einschätzung des Platon.“

$$F_2 := (S \Rightarrow A) \equiv (\neg S \vee A)$$

2) Übersetzung der Aussagen:

- „Platon hatte Recht mit seiner Einschätzung des Sokrates genau dann, wenn Sokrates kein großer Philosoph war.“

$$F_1 := (P \Leftrightarrow \neg S)$$

- „Wenn Sokrates ein großer Philosoph war, dann hatte Aristoteles Recht mit seiner Einschätzung des Platon.“

$$F_2 := (S \Rightarrow A) \equiv (\neg S \vee A)$$

- „Aristoteles hatte nur dann Recht mit seiner Einschätzung des Platon, falls Platon Recht hatte mit seiner Einschätzung des Sokrates.“

$$F_3 := (A \Rightarrow P) \equiv (\neg A \vee P)$$

2) Übersetzung der Aussagen:

- „Platon hatte Recht mit seiner Einschätzung des Sokrates genau dann, wenn Sokrates kein großer Philosoph war.“

$$F_1 := (P \Leftrightarrow \neg S)$$

- „Wenn Sokrates ein großer Philosoph war, dann hatte Aristoteles Recht mit seiner Einschätzung des Platon.“

$$F_2 := (S \Rightarrow A) \equiv (\neg S \vee A)$$

- „Aristoteles hatte nur dann Recht mit seiner Einschätzung des Platon, falls Platon Recht hatte mit seiner Einschätzung des Sokrates.“

$$F_3 := (A \Rightarrow P) \equiv (\neg A \vee P)$$

- Alle Aussagen zusammen werden beschrieben durch die Formel

$$F := F_1 \wedge F_2 \wedge F_3.$$



# Computeralgebra



Um jetzt unsere Formeln in eine dem Computer verträgliche Sprache zu übersetzen, brauchen wir einen speziellen Körper (Rechenraum).

Um jetzt unsere Formeln in eine dem Computer verträgliche Sprache zu übersetzen, brauchen wir einen speziellen Körper (Rechenraum).

Wir verwenden $\mathbb{F}_2$, dieser Körper wird durch die Nullstellengleichung $\left(x^2 - x\right) = 0$ bestimmt. Diese Gleichung hat nur 0 und 1 als mögliche Lösungen. Deshalb sind auch 0 und 1 in diesem Rechenraum die einzigen beiden Elemente.

## Computeralgebra



Um jetzt unsere Formeln in eine dem Computer verträgliche Sprache zu übersetzen, brauchen wir einen speziellen Körper (Rechenraum).

Wir verwenden $\mathbb{F}_2$, dieser Körper wird durch die Nullstellengleichung $\left(x^2 - x\right) = 0$ bestimmt. Diese Gleichung hat nur 0 und 1 als mögliche Lösungen. Deshalb sind auch 0 und 1 in diesem Rechenraum die einzigen beiden Elemente. Anders ausgedrückt, wir teilen die ganzen Zahlen in die geraden und ungeraden Zahlen ein und schreiben 0 für die geraden Zahlen und 1 für die ungeraden Zahlen.

# Computeralgebra



Um jetzt unsere Formeln in eine dem Computer verträgliche Sprache zu übersetzen, brauchen wir einen speziellen Körper (Rechenraum).

Wir verwenden $\mathbb{F}_2$, dieser Körper wird durch die Nullstellengleichung $\left(x^2 - x\right) = 0$ bestimmt. Diese Gleichung hat nur 0 und 1 als mögliche Lösungen. Deshalb sind auch 0 und 1 in diesem Rechenraum die einzigen beiden Elemente. Anders ausgedrückt, wir teilen die ganzen Zahlen in die geraden und ungeraden Zahlen ein und schreiben 0 für die geraden Zahlen und 1 für die ungeraden Zahlen.

Damit verbunden ergeben sich einige spezielle Rechenregeln:

# Computeralgebra





Um jetzt unsere Formeln in eine dem Computer verträgliche Sprache zu übersetzen, brauchen wir einen speziellen Körper (Rechenraum).

Wir verwenden $\mathbb{F}_2$, dieser Körper wird durch die Nullstellengleichung $\left(x^2 - x\right) = 0$ bestimmt. Diese Gleichung hat nur 0 und 1 als mögliche Lösungen. Deshalb sind auch 0 und 1 in diesem Rechenraum die einzigen beiden Elemente. Anders ausgedrückt, wir teilen die ganzen Zahlen in die geraden und ungeraden Zahlen ein und schreiben 0 für die geraden Zahlen und 1 für die ungeraden Zahlen.

Damit verbunden ergeben sich einige spezielle Rechenregeln:

$$1 \cdot 1 = 1 \qquad 1 \cdot 0 = 0 \qquad 1 + 0 = 1 \qquad 1 + 1 = 0$$

Logik und Computerbeweise

Holger Bluhm,

Prof. Dr. Martin Kreuzer,

Stefan Kühling



# Computeralgebra

Um jetzt unsere Formeln in eine dem Computer verträgliche Sprache zu übersetzen, brauchen wir einen speziellen Körper (Rechenraum).

Wir verwenden $\mathbb{F}_2$, dieser Körper wird durch die Nullstellengleichung $\left(x^2 - x\right) = 0$ bestimmt. Diese Gleichung hat nur 0 und 1 als mögliche Lösungen. Deshalb sind auch 0 und 1 in diesem Rechenraum die einzigen beiden Elemente. Anders ausgedrückt, wir teilen die ganzen Zahlen in die geraden und ungeraden Zahlen ein und schreiben 0 für die geraden Zahlen und 1 für die ungeraden Zahlen.

Damit verbunden ergeben sich einige spezielle Rechenregeln:

$$1 \cdot 1 = 1 \qquad 1 \cdot 0 = 0 \qquad 1 + 0 = 1 \qquad 1 + 1 = 0$$

oder allgemeiner

Um jetzt unsere Formeln in eine dem Computer verträgliche Sprache zu übersetzen, brauchen wir einen speziellen Körper (Rechenraum).

Wir verwenden $\mathbb{F}_2$, dieser Körper wird durch die Nullstellengleichung $(x^2 - x) = 0$ bestimmt. Diese Gleichung hat nur 0 und 1 als mögliche Lösungen. Deshalb sind auch 0 und 1 in diesem Rechenraum die einzigen beiden Elemente. Anders ausgedrückt, wir teilen die ganzen Zahlen in die geraden und ungeraden Zahlen ein und schreiben 0 für die geraden Zahlen und 1 für die ungeraden Zahlen.

Damit verbunden ergeben sich einige spezielle Rechenregeln:

$$1 \cdot 1 = 1 \qquad 1 \cdot 0 = 0 \qquad 1 + 0 = 1 \qquad 1 + 1 = 0$$

oder allgemeiner

$$-x = x \qquad x^2 = x.$$

Wir übersetzen die „Suche nach der Erfüllbarkeit“ in eine „Suche von Nullstellen“.

Wir übersetzen die „Suche nach der Erfüllbarkeit“ in eine „Suche von Nullstellen“.

Logik | Nullstellensuche

Wir übersetzen die „Suche nach der Erfüllbarkeit“ in eine „Suche von Nullstellen“.

## Logik

Aussagensymbole

$A, B, C$ oder $A_1, \ldots, A_n$

## Nullstellensuche

Variablen

$x, y, z$ oder $x_1, \ldots, x_n$





Wir übersetzen die „Suche nach der Erfüllbarkeit“ in eine „Suche von Nullstellen“.

| Logik | Nullstellensuche |
|---|---|
| Aussagensymbole | Variablen |
| $A, B, C \quad \text{oder} \quad A_1, \ldots, A_n$ | $x, y, z \quad \text{oder} \quad x_1, \ldots, x_n$ |
| Erfüllbarkeit von | Nullstelle von |
| $A \quad \text{bzw.} \quad B$ | $(x-1) =: F \quad \text{bzw.} \quad (y-1) =: G$ |
| $\neg A$ | $F + 1 = x$ |
| $A \vee B$ | $F \cdot G = (x-1)(y-1)$ |
| $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$ | $(F+1)(G+1)+1 = (xy+1)$ |

**Beispiel 2.1**

Nehmen wir z.B. die unerfüllbare Formel $A \wedge \neg A$, die Aussagen $A$ und $\neg A$ haben dann die Übersetzungen

$$(x-1) \quad \text{und} \quad ((x-1)+1) = x.$$

**Beispiel 2.1**

Nehmen wir z.B. die unerfüllbare Formel $A \wedge \neg A$, die Aussagen $A$ und $\neg A$ haben dann die Übersetzungen

$$(x-1) \quad \text{und} \quad ((x-1)+1)=x.$$

Damit hat dann die Formel $A \wedge \neg A$ die Übersetzung

$$((x-1)+1)\cdot(x+1)+1$$

**Beispiel 2.1**

Nehmen wir z.B. die unerfüllbare Formel $A \wedge \neg A$, die Aussagen $A$ und $\neg A$ haben dann die Übersetzungen

$$(x-1) \quad \text{und} \quad ((x-1)+1)=x.$$

Damit hat dann die Formel $A \wedge \neg A$ die Übersetzung

$$((x-1)+1)\cdot(x+1)+1 \quad = \quad x\cdot(x+1)+1$$

## Beispiel 2.1

Nehmen wir z.B. die unerfüllbare Formel $A \wedge \neg A$, die Aussagen $A$ und $\neg A$ haben dann die Übersetzungen

$$(x-1) \quad \text{und} \quad ((x-1)+1) = x.$$

Damit hat dann die Formel $A \wedge \neg A$ die Übersetzung

$$\begin{aligned} ((x-1)+1)\cdot(x+1)+1 &= x\cdot(x+1)+1 \\ &= x^2+x+1 \end{aligned}$$

**Beispiel 2.1**

Nehmen wir z.B. die unerfüllbare Formel $A \wedge \neg A$, die Aussagen $A$ und $\neg A$ haben dann die Übersetzungen

$$(x-1) \quad \text{und} \quad ((x-1)+1) = x.$$

Damit hat dann die Formel $A \wedge \neg A$ die Übersetzung

$$\begin{aligned} ((x-1)+1)\cdot(x+1)+1 &= x\cdot(x+1)+1 \\ &= x^2+x+1 \\ &= x^2-x+1. \end{aligned}$$

Logik und Computerbeweise
Holger Bluhm,
Prof. Dr. Martin Kreuzer,
Stefan Kühling



**Beispiel 2.1**

Nehmen wir z.B. die unerfüllbare Formel $A \wedge \neg A$, die Aussagen $A$ und $\neg A$ haben dann die Übersetzungen

$$(x-1) \quad \text{und} \quad ((x-1)+1) = x.$$

Damit hat dann die Formel $A \wedge \neg A$ die Übersetzung

$$\begin{aligned} ((x-1)+1)\cdot(x+1)+1 &= x\cdot(x+1)+1 \\ &= x^2+x+1 \\ &= x^2-x+1. \end{aligned}$$

Dieses Polynom hat keine Nullstelle, da es sich um die Körpergleichung $\left(x^2-x\right)=0$ um eins verschoben handelt.

# CoCoA

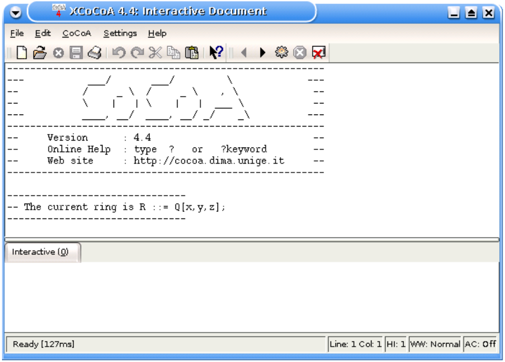
Natürlich ist diese Übersetzung mit anschließender Vereinfachung und Nullstellentest per Hand langsamer, als die Wahrheitstafelmethode.

Natürlich ist diese Übersetzung mit anschließender Vereinfachung und Nullstellentest per Hand langsamer, als die Wahrheitstafelmethode.

Jedoch haben wir für die Vereinfachungen und Nullstellensuche das Computeralgebra–System CoCoA zur Verfügung.

Natürlich ist diese Übersetzung mit anschließender Vereinfachung und Nullstellentest per Hand langsamer, als die Wahrheitstafelmethode.

Jedoch haben wir für die Vereinfachungen und Nullstellensuche das Computeralgebra–System CoCoA zur Verfügung.



Das Programm wird mit „xcocoa“ gestartet.

Das Programm wird mit „xcocoa“ gestartet.

CoCoA–Befehle werden immer groß geschrieben und mit einem Semikolon beendet.

Das Programm wird mit „xcocoa“ gestartet.

CoCoA–Befehle werden immer groß geschrieben und mit einem Semikolon beendet.

So legt dann `Use Z/(2)[x,y,z];` fest, dass wir im $\mathbb{F}_2$ rechnen und die Variablen $x, y, z$ zur Verfügung haben.

Das Programm wird mit „xcocoa“ gestartet.

CoCoA–Befehle werden immer groß geschrieben und mit einem Semikolon beendet.

So legt dann `Use Z/(2)[x,y,z];` fest, dass wir im $\mathbb{F}_2$ rechnen und die Variablen $x, y, z$ zur Verfügung haben. Ebenso verursacht z.B. `Use Z/(2)[x[1..6]];` die Festlegung $x_1, \ldots, x_6$.

Das Programm wird mit „xcocoa“ gestartet.

CoCoA–Befehle werden immer groß geschrieben und mit einem Semikolon beendet.

So legt dann `Use Z/(2)[x,y,z];` fest, dass wir im $\mathbb{F}_2$ rechnen und die Variablen $x, y, z$ zur Verfügung haben. Ebenso verursacht z.B. `Use Z/(2)[x[1..6]];` die Festlegung $x_1, \ldots, x_6$.

Als erstes setzen wir immer

```
K:=Ideal(x^2-x,y^2-y,z^2-z);
```

oder

```
K:=Ideal(x[1]^2-x[1],...,x[6]^2-x[6]);
```

Dieses *Körperideal* brauchen wir später.

Für das Aussagensymbol $A$ verwenden wir das Polynom $x - 1$ und dieses geben wir als `I1:=Ideal(x-1);` in CoCoA ein.

Für das Aussagensymbol $A$ verwenden wir das Polynom $x - 1$ und dieses geben wir als `I1:=Ideal(x-1);` in CoCoA ein.

Natürlich können so auch bereits übersetzte, größere Polynome eingegeben/verwendet werden.

Für das Aussagensymbol $A$ verwenden wir das Polynom $x - 1$ und dieses geben wir als `I1:=Ideal(x-1);` in CoCoA ein.

Natürlich können so auch bereits übersetzte, größere Polynome eingegeben/verwendet werden.

Mit $A$,$B$, eingegeben als `I1`,`I2`, können wir auch

| | | |
|---|---|---|
| $A \wedge B$ | mit | `J1:=I1+I2;` |
| $A \vee B$ | mit | `J2:=Intersection(I1,I2);` |
| $\neg A$ | mit | `J3:=K:I1;` |

eingeben.

Für das Aussagensymbol $A$ verwenden wir das Polynom $x - 1$ und dieses geben wir als `I1:=Ideal(x-1);` in CoCoA ein.

Natürlich können so auch bereits übersetzte, größere Polynome eingegeben/verwendet werden.

Mit $A$,$B$, eingegeben als `I1`,`I2`, können wir auch

| | | |
|---|---|---|
| $A \wedge B$ | mit | `J1:=I1+I2;` |
| $A \vee B$ | mit | `J2:=Intersection(I1,I2);` |
| $\neg A$ | mit | `J3:=K:I1;` |

eingeben.

Mit `ReduceGBasis(J);` wird dann das Ideal `J` ausgewertet.

Logik und Computerbeweise

Holger Bluhm,
Prof. Dr. Martin Kreuzer,
Stefan Kühling

Aussagenlogik
Elementares
Wahrheitswerte
Übersetzungen

Computeralgebra
Übersetzungen

CoCoA
Einführung
Logik–Befehle

Computerbeweise

Als Ausgabe erhalten wir dann (hier nur für eine Variable $x$)

$$[1] \quad \widehat{=} \quad \text{die Formel ist unerfüllbar}$$

Als Ausgabe erhalten wir dann (hier nur für eine Variable $x$)

$[1] \quad \widehat{=} \quad$ die Formel ist unerfüllbar

$[x] \quad \widehat{=} \quad$ die Formel gilt für $x = 0$, also für $\alpha(A) = 0$

Logik und Computerbeweise
Holger Bluhm,
Prof. Dr. Martin Kreuzer,
Stefan Kühling

Aussagenlogik
Elementares
Wahrheitswerte
Übersetzungen

Computeralgebra
Übersetzungen

CoCoA
Einführung
Logik–Befehle

Computerbeweise

Als Ausgabe erhalten wir dann (hier nur für eine Variable $x$)

$$\begin{array}{rcl} [1] & \widehat{=} & \text{die Formel ist unerfüllbar} \\ [x] & \widehat{=} & \text{die Formel gilt für } x = 0, \text{ also für } \alpha(A) = 0 \\ [x+1] & \widehat{=} & \text{die Formel gilt für } x = 1, \text{ also für } \alpha(A) = 1 \end{array}$$

Logik und Computerbeweise
Holger Bluhm,
Prof. Dr. Martin Kreuzer,
Stefan Kühling
Aussagenlogik
Elementares
Wahrheitswerte
Übersetzungen
Computeralgebra
Übersetzungen
CoCoA
Einführung
Logik–Befehle
Computerbeweise

Als Ausgabe erhalten wir dann (hier nur für eine Variable $x$)

| | | |
|---|---|---|
| $[1]$ | $\widehat{=}$ | die Formel ist unerfüllbar |
| $[x]$ | $\widehat{=}$ | die Formel gilt für $x = 0$, also für $\alpha(A) = 0$ |
| $[x+1]$ | $\widehat{=}$ | die Formel gilt für $x = 1$, also für $\alpha(A) = 1$ |
| $[x\text{\^{}}2 + x]^*$ | $\widehat{=}$ | die Formel gilt immer (Tautologie) |

---

* $x^2 + x = (x+1) \cdot x$

**Beispiel 4.1**

Wir wollen die Formel

$$\begin{aligned} F &:= (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P) \\ &\equiv (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P) \end{aligned}$$

auf Erfüllbarkeit testen.

**Beispiel 4.1**

Wir wollen die Formel

$$\begin{aligned} F &:= (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P) \\ &\equiv (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P) \end{aligned}$$

auf Erfüllbarkeit testen.

Wir verwenden die Variablen $x$ für $P$, $y$ für $S$ und $z$ für $A$.

**Beispiel 4.1**

Wir wollen die Formel

$$\begin{aligned} F &:= (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P) \\ &\equiv (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P) \end{aligned}$$

auf Erfüllbarkeit testen.

Wir verwenden die Variablen $x$ für $P$, $y$ für $S$ und $z$ für $A$:

```
Use Z/(2)[x,y,z];
K:=Ideal(x^2-x,y^2-y,z^2-z);
```

**Beispiel 4.1**

Wir wollen die Formel

$$\begin{aligned} F &:= (P \Leftrightarrow \neg S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P) \\ &\equiv (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P) \end{aligned}$$

auf Erfüllbarkeit testen.

Wir verwenden die Variablen $x$ für $P$, $y$ für $S$ und $z$ für $A$:

```
Use Z/(2)[x,y,z];
K:=Ideal(x^2-x,y^2-y,z^2-z);
```

Um das Eingegebene besser mit der Formel vergleichen zu können, verwenden wir

`P:=Ideal(x-1);` für $P$,

`S:=Ideal(y-1);` für $S$,

`A:=Ideal(z-1);` für $A$.

# Computerbeweise



$$F = (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

# Computerbeweise



$$F \quad = \quad (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

```
F := Intersection(K:P,K:S)
```

Logik und Computerbeweise

Holger Bluhm,

Prof. Dr. Martin Kreuzer,

Stefan Kühling

Aussagenlogik
Elementares
Wahrheitswerte
Übersetzungen

Computeralgebra
Übersetzungen

CoCoA
Einführung
Logik–Befehle

Computerbeweise


$$F \quad = \quad (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

```
F  :=  Intersection(K:P,K:S)
```

+

# Computerbeweise



$$F \quad = \quad (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

```
F  :=  Intersection(K:P,K:S)
           + Intersection(P,S)
```

$$F \quad = \quad (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

```
F  :=  Intersection(K:P,K:S)
          + Intersection(P,S)
          + Intersection(K:S,A)
```

$$F = (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

```
F  :=  Intersection(K:P,K:S)
         + Intersection(P,S)
         + Intersection(K:S,A)
         + Intersection(K:A,P);
```

$$F = (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

```
F  :=  Intersection(K:P,K:S)
            + Intersection(P,S)
            + Intersection(K:S,A)
            + Intersection(K:A,P);
```

# Computerbeweise



$$F = (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

```
F  :=  Intersection(K:P,K:S)
         + Intersection(P,S)
         + Intersection(K:S,A)
         + Intersection(K:A,P);
```

Wertet man $F$ mit `ReducedGBasis(F);` aus, so erhält man

```
[y, z^2 + z, x + 1].
```

$$F \quad = \quad (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

```
F  :=  Intersection(K:P,K:S)
           + Intersection(P,S)
           + Intersection(K:S,A)
           + Intersection(K:A,P);
```

Wertet man $F$ mit `ReducedGBasis(F);` aus, so erhält man

```
[x + 1, y, z^2 + z].
```

$$F = (\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg S \vee A) \wedge (\neg A \vee P)$$

```
F := Intersection(K:P,K:S)
       + Intersection(P,S)
       + Intersection(K:S,A)
       + Intersection(K:A,P);
```

Wertet man $F$ mit `ReducedGBasis(F);` aus, so erhält man

```
[x + 1, y, z^2 + z],
```

was unserem bekannten Ergebnis von Folie 7 entspricht:

$\alpha(P) = 1$, $\alpha(S) = 0$ und $\alpha(A)$ ist beliebig.