Unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeiten

Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung
für das Lehramt für die Sekundarstufe II

dem Staatlichen Prüfungsamt vorgelegt
von

Breitkopf, Christina

Dortmund, Oktober 2005

Themensteller: Prof. Dr. M. Kreuzer

Fachbereich 1: Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Was sind *„unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeiten“*? **3**

2.1 Begriffserläuterung 3

2.2 Der Einfluss auf die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . 6

2.3 Die Bedeutung stochastischer Paradoxa für den Mathematikunterricht 11

3 Theorie **16**

3.1 Zufallsexperimente, Ergebnisräume und Ereignisse 16

3.2 Zufallsvariablen 18

3.3 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume 19

3.4 Laplace Modelle 21

3.5 Häufigkeiten 22

3.6 Die Siebformel 24

3.7 Bedingte Wahrscheinlichkeiten 27

3.8 Mehrstufige Experimente und stochastische Unabhängigkeit 31

4 Stochastische Paradoxa **39**

4.1 Das Geburtstagsproblem 39

4.1.1 Ursprung des Paradoxons 39

4.1.2 Die unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit 40

4.1.3 Lösung des Paradoxons 44

4.1.3.1 Erster Lösungsansatz 44

4.1.3.2 Der Einfluss von Schaltjahren 48

4.1.3.3 Der Einfluss der Gleichverteilung 49

4.1.4 Didaktischer Kommentar 54

4.1.4.1 Das Taxiproblem 60

4.2 Das Rencontreproblem 62

4.2.1 Ursprung des Paradoxons 62

4.2.2 Die unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit 63

4.2.3 Lösung des Paradoxons 64

4.2.4 Didaktischer Kommentar 68

4.3 Das Ziegenproblem 76

4.3.1 Ursprung des Paradoxons 76

4.3.2 Die unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit 77

4.3.3 Lösung des Paradoxons 79

4.3.4 Didaktischer Kommentar 82

4.3.4.1 Das Gefangenenproblem 90

4.3.4.2 Das Bertrand'sche Kästchenproblem 92

4.3.4.3 Das Problem der Schiffbrüchigen 93

Biographien **I**

Literaturverzeichnis **IX**

Abbildungsverzeichnis **XX**

Tabellenverzeichnis **XXI**

Kapitel 1

Einleitung

Im Rahmen dieser Staatsarbeit werden „unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeiten“ anhand verschiedener stochastischer Paradoxa erläutert.

Der erste Teil dieser Arbeit befasst sich mit der Fragestellung: „Was sind *unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeiten*?“
Im ersten Abschnitt werden die Begriffe „unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit“ und „stochastisches Paradoxon“ erläutert. Dabei wird die enge Beziehung zwischen der Wahrscheinlichkeitstheorie und der individuellen, intuitiven Vorstellung herausgearbeitet.
Der zweite Abschnitt liefert einen Überblick über den Einfluss der unwahrscheinlichen Wahrscheinlichkeiten aus historischer Sicht. Gerade in der Geschichte der Stochastik treten zahlreiche Paradoxa auf, die an der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie maßgeblich beteiligt gewesen sind.
Stochastischen Paradoxa wird jedoch nicht nur aus historischer Sicht ein großer Nutzen zugeschrieben. Auch für den Mathematikunterricht sind sie, wie der dritte Abschnitt zeigt, von enormer Bedeutung.

Daran schließt sich im zweiten Teil eine Erarbeitung der theoretischen Grundlagen, die für die Berechnung der unwahrscheinlichen Wahrscheinlichkeiten benötigt

werden, an.

Im dritten Teil werden verschiedene Paradoxa vorgestellt. Dabei beschränke ich mich auf Problemstellungen, deren Ausgänge die meisten Menschen als sehr überraschend ansehen. Folglich wird auf Paradoxa wie zum Beispiel das *Bertrand'sche Sehnenproblem*, dessen unpräzise Formulierung verschiedene Lösungswege mit jeweils unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten zulässt, nicht eingegangen. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf dem *Geburtstags-*, dem *Rencontre-* und dem *Ziegenproblem*.
Nach der historischen Einordnung und der Vorstellung des jeweiligen Paradoxons folgt eine Erläuterung der typischen Fehlvorstellungen sowie deren Ursachen.
Im Anschluss an die mathematische Lösung des Problems wird dieses didaktisch kommentiert. Eine mit Maple programmierte Simulation, die die Schüler[1] im Unterricht auf den für sie unwahrscheinlichen Ausgang aufmerksam machen kann, ist für jede der drei Problemstellungen beigefügt. Weiterhin wird erläutert, wie das Paradoxon in den Unterrichtsverlauf eingebettet und ein Konzeptwechsel bei den Schülern herbeigeführt werden kann. Im Rahmen dieser Erörterung werden weitere Paradoxa vorgestellt, die eine ähnliche Denkweise erfordern.

[1] Die maskuline Form „Schüler“ beinhaltet sowohl die Schülerinnen als auch die Schüler.

Kapitel 2

Was sind *„unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeiten“*?

„Einer der großen Vorteile der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist der, daß man lernt, dem ersten Anschein zu mißtrauen.“ ([47] S. 127)

2.1 Begriffserläuterung

Unter *unwahrscheinlichen Wahrscheinlichkeiten* werden Wahrscheinlichkeiten verstanden, die die meisten Menschen falsch einschätzen und somit als sehr unwahrscheinlich ansehen. Sie werden durch so genannte *stochastische Paradoxa* hervorgerufen.

Doch was ist ein *Paradoxon*? Nach H. Winter [85] und R. Scholz [69] wird eine Situation als paradox angesehen, wenn sie der allgemeinen Erwartung widerspricht, folglich als absurd angesehen wird. Auch für G. Pflug ist ein Paradoxon ganz allgemein ein „kontra-intuitives Ergebnis“ ([57] S. 155) und bezüglich der Mathematik ein Phänomen, bei dem „das mathematische Ergebnis und die Intuition auseinanderklaffen“ ([57] S. 155). H. Stadler dagegen bezieht ein Paradoxon sofort auf die

Mathematik und definiert es als ein Problem, bei dem sich rechnerisch ein Ergebnis ergibt, das der intuitiven Vorstellung nicht entspricht. „Dabei entsteht dieser Eindruck nicht nur bei einer Person, sondern bei der überwiegenden Mehrzahl derer, denen das Problem vorgelegt wird“ ([71] S. 134).
Daraus ergibt sich, dass Paradoxa Probleme sind, deren Ausgang die Allgemeinheit verblüfft. Somit sind *stochastische Paradoxa* Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bei denen die intuitive Lösung dem mathematischen Ergebnis widerspricht, so dass es, wenn man auf seine Intuition vertraut, im Allgemeinen zu einer Fehleinschätzung der Situation kommt.

In den obigen Definitionen zeigt sich der enge Zusammenhang zwischen einem Problem, das als paradox angesehen wird, und der Intuition. Deshalb muss als Nächstes geklärt werden, was unter *Intuition*, dem „Kernbegriff in kognitionspsychologischer Perspektive von Mathematik im allgemeinen - und Stochastik im besonderen“ ([84] S. 60) verstanden wird. D. Wickmann unterscheidet zwei gegensätzliche Bedeutungen: zum einen die negative, bei der die „Intuition als irrige Vorstellung“ ([84] S. 60) angesehen wird, und zum anderen die positive, bei der die Intuition die Kreativität fördert. Schon Descartes hat sich mit der Bedeutung der Intuition in seinen „Regeln zur Ausrichtung der Erkenntniskraft“ [17] beschäftigt, in der er zur Erkenntnisgewinnung ausschließlich die Intuition und die Deduktion zulässt. Er versteht unter Intuition „nicht das schwankende Zeugnis der sinnlichen Wahrnehmung oder das trügerische Urteil der verkehrt verbindenden Einbildungskraft, sondern ein so müheloses und deutlich bestimmtes Begreifen des reinen und aufmerksamen Geistes, daß über das, was wir erkennen, gar kein Zweifel zurückbleibt, oder, was dasselbe ist: eines reinen und aufmerksamen Geistes unbezweifelbares Begreifen, welches allein dem Lichte der Vernunft entspringt und das, weil einfacher, deshalb zuverlässiger ist als selbst die Deduktion, die doch auch [...] vom Menschen nicht verkehrt gemacht werden kann“ ([17] S. 10f). Weiterhin hebt er hervor, dass die Intuition spontan, ohne jegliche Überlegungen, verläuft und nur

sie zur Entstehung von neuem Wissen beiträgt. Die Deduktion dagegen dient ausschließlich der Wissenssicherung ([17] S. 12).

Da jedoch jeder Mensch ein anderes Vorwissen mitbringt, ist die Intuition eine individuelle Eigenschaft, und es wird klar, dass ein Problem, das dem einen als paradox erscheint, für andere sofort einleuchtend ist.

2.2 Der Einfluss auf die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Der Ursprung der Wahrscheinlichkeitsrechnung liegt in den Glücksspielen, deren Spuren sich bis zu den alten Kulturen der Inder, Babylonier und Ägypter zurückverfolgen lassen. Jedoch wurden in der Antike keine Analysen dieser Spiele durchgeführt, da deren Ausgang dem Willen Gottes zugeschrieben wurde.
Ab der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts beschäftigte man sich genauer mit den möglichen Ausgängen der Glücksspiele und stellte erste Versuche an, um deren Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. [2, 12]

Doch die eigentliche Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das Jahr 1654. Als Initiator wird der französische Glücksspieler Chevalier de Méré angesehen. Er richtete zwei Fragen, die die Problematik der Glücksspiele betrafen, an seinen Freund Pascal, der sich darüber in einem Briefwechsel mit Fermat austauschte.
Mérés erstes Problem, das im weiteren Verlauf dieser Arbeit als Ereignis E bezeichnet wird, beruhte auf dem folgenden Glücksspiel: „Der Spieler macht vier Würfe mit einem normalen Spielwürfel. Die Bank gewinnt, wenn wenigstens eine 'Sechs' fällt, andernfalls gewinnt der Spieler“ ([67] S. 4). Da die Gewinnchance des Spielers $(\frac{5}{6})^4 \approx 0,48$ beträgt, war es für Méré einleuchtend, dass die Bank bei diesem Spiel im Vorteil ist. Daraufhin dachte er sich eine Variante des Spiels aus, die als Ereignis A bezeichnet wird, von der er einen analogen Spielausgang vermutete: „Statt mit einem Würfel, sollte mit zwei Würfeln geworfen werden und die Bank sollte bei einem 6-er Pasch (also einer Doppelsechs) gewinnen“ ([67] S. 4). Méré ging korrekterweise davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, sechsmal so groß ist wie die, einen Pasch zu erhalten. Da $6 \cdot 4 = 24$ ist, war er der Überzeugung, dass bei vierundzwanzig statt bei vier Würfen die Gewinnwahrscheinlichkeit des Ereignisses A gleich der des Ereignisses E war. Die Erfahrung

zeigte jedoch, dass dies nicht der Fall war, so dass er sich mit der Beschwerde, die Mathematik entspreche nicht den Erfahrungen des realen Lebens, an Pascal wandte.

Méré nahm fälschlicherweise an, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung der Proportionalitätsregel unterliege.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit[1] des Ereignisses E geht man davon aus, dass beim viermaligen Werfen eines regulären Würfels 6^4 verschiedene Ausgänge möglich sind. Nun wird das Gegenereignis $\bar{E}$, keine Sechs zu würfeln, betrachtet, für das es 5^4 Möglichkeiten gibt. Demnach sind für das ursprüngliche Ereignis E $6^4 - 5^4$ Fälle günstig. Damit berechnet sich die Wahrscheinlichkeit wie folgt:

$$P(E) = \frac{6^4 - 5^4}{6^4} = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0,518$$

Analog lässt sich die Wahrscheinlichkeit des von Méré geschilderten Ereignisses A berechnen:

$$P(A) = \frac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0,491$$

[19, 24, 29, 67, 80]

Das zweite Problem des Chevaliers ist unter dem Namen „problème des partis“ („Aufteilungsproblem“) bekannt geworden. Es wurde erstmals im Jahre 1494 in einem Buch vorgestellt und lautete: „Zwei Personen spielen ein gerechtes Spiel (d. h., beide haben dieselben Gewinnchancen), und sie besprechen, daß derjenige von ihnen, der zuerst sechs Runden gewinnt, den ganzen Gewinn davonträgt. Nehmen wir an, das Spiel wird früher abgebrochen, so daß noch keiner diese Bedingung erfüllt hat. (Z. B. hat der erste Spieler fünf Runden gewonnen, der zweite dagegen nur drei.) Wie soll dann der ganze Gewinn auf gerechte Weise zwischen ihnen aufgeteilt werden?“ ([80] S. 19).

Nachdem bereits einige Mathematiker erfolglos versucht hatten, die Aufgabe zu

[1] Der hier vorgestellte Lösungsweg verwendet keine mathematischen Fachbegriffe, da diese erst im nächsten Kapitel definiert werden. Zur Erklärung der Fachtermini wird dort auf dieses Beispiel zurückgegriffen.

lösen (die Aufteilungsverhältnisse lagen zwischen 2:1 und 5:3), beschäftigten sich Fermat und Pascal damit, die als Erste die Lösung fanden. Von Mérés Problem erfuhr 1655 auch Huygens, der zu derselben Lösung wie Fermat und Pascal kam und innerhalb seines Lösungsweges den Begriff des Erwartungswertes definierte. Um das „problème des partis“ korrekt zu lösen, muss berücksichtigt werden, dass der erste Spieler nur noch eine Runde, der zweite dagegen noch drei Partien gewinnen muss. Maximal können noch drei Durchgänge gespielt werden, von denen jeder zwei mögliche Ausgänge hat, so dass insgesamt acht Varianten in Betracht gezogen werden müssen. Nur wenn alle drei noch offenen Runden zugunsten des zweiten Spielers ausgehen, kann dieser gewinnen, also in einem der acht Fälle. Alle anderen sieben Fälle nehmen einen positiven Ausgang für den ersten Spieler. Folglich muss der Einsatz im Verhältnis 7:1 aufgeteilt werden. [5, 15, 24, 35, 80]

Somit ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Paradoxa begründet worden. Auch in der weiteren Entwicklung der Stochastik spielen solche Problemaufgaben, bei denen bis zur endgültigen Analyse verschiedene Lösungen angegeben worden sind, eine große Rolle. Sie sind immer wieder als Denkanstoß genutzt worden, so dass sie die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung maßgeblich geprägt haben. H. Freudenthal hebt hervor, dass es “übrigens durchaus nicht zweitklassige Mathematiker [waren], die da desavouiert wurden; zu dieser Erscheinung gibt es in der reinen Mathematik keine Analogie“ ([24] S. 532). H. Winter sieht einen Grund für die hohe Anzahl solcher unwahrscheinlichen Wahrscheinlichkeiten darin, „dass im gelebten Leben das Faktische gegenüber dem Möglichen extrem überbewertet wird“ ([85] S. 26). Ein weiterer Grund für das häufige Auftreten von stochastischen Paradoxa liegt in der mangelnden Überprüfung, ob die nötigen Voraussetzungen gegeben sind. [12, 24, 67, 71, 85]

Jedoch sind stochastische Paradoxa nicht nur Phänomene der Geschichte. Bis heute erliegen die Menschen immer wieder solchen Fehlschlüssen: So kommt es insbesondere in der Statistik oft zu Fehlanalysen. Weitere Aufsehen erregende Beispiele

sind Justizirrtümer, bei denen der inkompetente Umgang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch in der Gegenwart immer wieder erheblichen Schaden anrichtet. So kam es schon bei Indizienprozessen zu Verurteilungen, da die Sachverständigen die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht beherrschten:
1973 wurde zum Beispiel ein Wuppertaler Schornsteinfeger nach über einjähriger Untersuchungshaft wegen Mordes angeklagt[2]. Zwei Gutachter mussten anhand der Indizien, wie Blutspuren und Kleidungspartikel, berechnen, wie wahrscheinlich es sei, dass der Angeklagte, der seine Unschuld stets beteuerte, die Tat begangen hatte. Allerdings verwendeten sie bei ihren Berechnungen nach der Wahrscheinlichkeitstheorie unzulässige Zusammenhänge:
Beispielsweise war an der Kleidung des Schornsteinfegers ein Mikrogramm Kleidungsfasern gefunden worden, die denen der Ermordeten glichen. Nun behauptete ein Sachverständiger, dass die Wahrscheinlichkeit, bei einem Menschen, der keinen Kontakt mit der Toten hatte, solche Spuren zu finden, bei 0,06 Prozent liege. Daraus schloss er fälschlicherweise, dass der Angeklagte mit einer 99,94-prozentigen Wahrscheinlichkeit die Tat begangen habe. Analoge Überlegungen stellte der zweite Gutachter bei der Untersuchung der Blutspuren an.
Im weiteren Verlauf der Auswertung der Indizien sollte die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass der Angeklagte unter Berücksichtigung folgender Voraussetzungen keinen Kontakt mit dem Opfer hatte: Einerseits wurden Blutspuren der Blutgruppe des Opfers an der Kleidung des Beschuldigten entdeckt und andererseits wurden solche, die der Blutgruppenformel des Beklagten glichen, bei der Ermordeten gefunden.
Folglich verwendeten die Sachverständigen die Bayes'sche Formel[3]. Dabei war es nötig, eine so genannte *a priori Wahrscheinlichkeit* anzusetzen, die darüber Auskunft geben sollte, mit welcher Wahrscheinlichkeit man den Angeklagten als Täter ansieht, ohne die aufgeführten Voraussetzungen zu berücksichtigen. Die Sachver-

[2]Zur Klärung der in Kapitel 3 eingeführten Fachtermini wird auf das Beispiel zurückgegriffen.
[3]Die Bayes'sche Formel wird in Kapitel 3 näher erläutert.

ständigen wollten dem Beschuldigten gegenüber unvoreingenommen sein, was ihrer Meinung nach eine 50-prozentige Wahrscheinlichkeit rechtfertige.
Eine solche Annahme ist allerdings nur dann berechtigt, wenn zwei Verdächtige vor Gericht stehen, von denen einer mit Sicherheit der Täter ist.
Erst nachdem der Mathematikprofessor G. Schrage, der die Verhandlung als Zuhörer verfolgte, eine schriftliche Stellungnahme, aus der die fehlerhafte Argumentation der Sachverständigen hervorging, zu dem Gutachten abgegeben hatte, kam es zu einem Ortstermin. Durch diesen konnte schließlich die Unschuld des Schornsteinfegers bewiesen werden.
Korrekte Berechnungen der Wahrscheinlichkeit, die für eine Täterschaft sprachen, ergaben einen Wert von unter einem Prozent. [66, 67]

2.3 Die Bedeutung stochastischer Paradoxa für den Mathematikunterricht

Der Stochastikunterricht befasst sich mit konkreten Problemen des Lebens, die für einen starken Realitätsbezug sorgen. Sein Hauptziel besteht darin, die Schüler zu einem stochastischen Denken zu erziehen, so dass sie lernen, kritisch mit ihrer Umwelt umzugehen und stochastische Phänomene richtig zu interpretieren. Da jedoch gerade das Schätzen von Wahrscheinlichkeiten, die wirklichkeitsnahe Probleme betreffen, den Schülern immer wieder Schwierigkeiten bereitet, kann es dabei zu erheblichen Fehleinschätzungen kommen. Trotz dieser Problematik darf der Lehrer[4] solche Aufgaben nicht aus Angst vor Frustration auf Seiten der Schüler meiden, vielmehr muss er die Lernenden gezielt auf die Gefahren aufmerksam machen: „Für viele ist gerade die Stochastik ein Kaktusgarten, wo jede Blüte von stachelbewehrten Fallen umgeben ist. Wer sie lehrt, muss vor den Stacheln warnen - am besten, indem er sie vorzeigt.“ ([68] S. 50) [24, 66, 67, 68, 71]

Aus dem Einsatz stochastischer Paradoxa kann der Lehrer im Mathematikunterricht erheblichen Nutzen ziehen:
Aufgabenstellungen, die zu unwahrscheinlichen Wahrscheinlichkeiten führen, erregen bei den Schülern Aufmerksamkeit, die diese dazu motiviert, sich intensiv mit der Problemstellung auseinander zu setzen. Da stochastische Paradoxa die Schüler vor die Aufgabe stellen, die eigene Denkweise zu kontrollieren und gegebenenfalls zu korrigieren, kommt es zu einem tieferen Verständnis der Stochastik. Dazu ist es erforderlich, die Lernenden stets zum Ausprobieren und Experimentieren zu ermuntern und eine Lernatmosphäre zu schaffen, in der Fehlvorstellungen und Fehler nicht negativ bewertet werden, sondern von dem Lehrenden aufgegriffen und in der Klasse diskutiert werden. Auch H. Freudenthal warnt davor, mit Rezepten Fehler zu vermeiden, denn gerade durch diese lernen Schüler.

[4]Die maskuline Form „Lehrer“ beinhaltet sowohl die Lehrerinnen als auch die Lehrer.

Paradoxa, die in der Geschichte für Aufsehen gesorgt haben, können besonders geeignet sein, da ihre Besprechung den Schülern zeigt, dass auch erstklassige Mathematiker nicht frei von Fehlschlüssen sind. Da die Lernenden dadurch erkennen, dass sie nicht die Einzigen sind, die Probleme mit der Bewältigung der Aufgabenstellung haben, kann die Motivation gesteigert werden. Durch die Bearbeitung historischer Paradoxa können die Lernenden die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie nachempfinden und sie erkennen die Notwendigkeit der Einführung neuer Begriffe und Gesetzmäßigkeiten. Somit wird die Geschichte der Stochastik zur ganz persönlichen Geschichte eines jeden Schülers. Weiterhin werden die Lernenden so selbst zu Forschern, was der Forderung nach Wissenschaftspropädeutik gerecht wird.
Des Weiteren trainieren solche prozessorientierten Problemstellungen die Fähigkeit der mathematischen Modellierung, die die Schüler nach den neuen Kernlehrplänen erwerben sollen.
Die Bearbeitung stochastischer Paradoxa bietet dem Lehrer einen weiteren Nutzen: Er weiß schon im Vorfeld, welche Fehlvorstellungen meistens auftreten, so dass er diese in seine Unterrichtsvorbereitung einbeziehen und dann gezielt im Unterricht auf die Probleme eingehen kann. Jedoch darf sich der Stochastikunterricht nicht auf die Behandlung stochastischer Paradoxa beschränken. Vielmehr müssen grundlegende stochastische Fähigkeiten vermittelt werden. Die klassischen Grundprobleme können dazu dienen, diese Grundlagen motivierend einzuführen oder auch zu vertiefen. [24, 29, 33, 67, 71]

Der Einsatz stochastischer Paradoxa im Mathematikunterricht bedarf sorgfältiger Planung, da er sonst leicht seinen Zweck verfehlt:
Der Lehrer muss in seiner Vorbereitung berücksichtigen, dass Schüler nur dann eine Wahrscheinlichkeit als unwahrscheinlich wahrnehmen, wenn die nötigen Grundlagen, zu denen das Problem in einem offenbaren Widerspruch steht, im Unterricht bereits besprochen worden sind.

Weiterhin ist beim Einsatz stochastischer Paradoxa zu bedenken, dass die Aufnahme und die Verarbeitung eines solchen Problems nach 2.1 sehr stark mit der Intuition verbunden sind und somit die Schüler persönlich berühren. Da folglich nicht erwartet werden kann, dass alle Lernenden dieselbe intuitive Fehlvorstellung haben („was die einen wundert, verstehen die anderen sofort oder ein Leben lang nicht“ ([82] S. 276)), kann die Besprechung stochastischer Paradoxa im Unterricht für den Lehrenden unberechenbar verlaufen.

Bei der Behandlung unwahrscheinlicher Wahrscheinlichkeiten muss der Lehrer berücksichtigen, dass die Schüler von ihrer persönlichen Vorstellung geleitet werden, die für sie unmittelbar einsichtig ist und an der sie unbedingt festhalten wollen. Dadurch kann es zu einem inneren Widerstand gegen die mathematisch richtige Berechnung der Aufgabe kommen. Um diesen zu überwinden, darf sich der Lehrende keinesfalls mit der rein rechnerischen Lösung des Problems zufrieden geben. Vielmehr muss er auf die Fehlvorstellungen der Schüler eingehen, ihnen die Ursachen dafür aufzeigen und ihnen anschaulich erklären, warum die berechnete Wahrscheinlichkeit die einzig richtige ist. Dazu können beispielsweise das Nachspielen der Aufgabenstellung oder die Bearbeitung analoger Probleme dienen. Demnach ist eine sinnvolle Einbettung stochastischer Paradoxa nur gewährleistet, wenn die Schüler ihre Intuition erweitern, so dass sie in Zukunft bei ähnlichen Aufgabenstellungen nicht wieder derselben Fehlvorstellung erliegen.

Gerade die Verwendung historischer Paradoxa kann einerseits, wie zuvor erläutert, erheblichen Nutzen andererseits jedoch auch Gefahren mit sich bringen und damit eine Ursache für das Entstehen von Desinteresse bei den Schülern sein: Diese sind besonders motiviert, wenn sie sich mit den besprochenen Aufgaben identifizieren können, also wenn sich die angesprochene Problematik im Leben der Jugendlichen widerspiegelt. Daher kann es hilfreich sein, die geschichtliche Problemstellung in einen modernen Kontext einzubetten. So kann beispielsweise das *Rencontreproblem*, das seinen Ursprung im Kartenspiel hat, auf das Vertauschen von Garderobe in einer Discothek übertragen werden.

Eine weitere Schwierigkeit ergibt sich bei der Besprechung stochastischer Paradoxa für den Lehrer dadurch, dass er einen schmalen Grat beschreiten muss: Verrät er bei der Einführung der Aufgabe zu viel, so nimmt er den Überraschungseffekt. Gibt er dagegen den Schülern zu lange Zeit, eigenständig, ohne jegliche Hilfe, die Aufgabe zu erarbeiten, so kann er für mehr Verwirrung als Aufklärung sorgen. Folglich liegt es einzig und allein an dem Lehrenden, ein Paradoxon so zu präsentieren und bearbeiten zu lassen, dass im weiteren Verlauf der Unterrichtsreihe ein Nutzen daraus gezogen werden kann. [33, 59, 82, 83, 85]

Also muss sich der Lehrer die Frage stellen, wie er den Schülern die unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit verständlich machen kann. Nach der Präsentation des Paradoxons sollten die von den Lernenden geschätzten Wahrscheinlichkeiten gesammelt werden, ohne zwischen den richtigen und offensichtlich falschen Antworten zu unterscheiden. Im Anschluss an die Besprechung des eigentlichen Problems können dann die Ursachen für die falschen Vermutungen von den Schülern analysiert werden, wodurch es im Allgemeinen zu einem besseren Verständnis kommt. Der Lehrer sollte die richtige Lösung der Aufgabe nicht präsentieren, sondern vielmehr die Lernenden dazu anregen, selbst die unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit zu entdecken. Dazu dienen beispielsweise das Nachspielen der Situation oder eine Computersimulation. Bei dem Einsatz solcher Simulationen ist zu bedenken, dass diese die Schüler lediglich auf die unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit aufmerksam machen und folglich keine Eigenaktivität von ihnen fordern. Daher sollten die Lernenden, falls sie bereits gute Vorerfahrungen im Arbeiten mit dem Computer besitzen, eine solche Simulation selbst programmieren. Häufig ist es auch hilfreich, eine falsche Vermutung ad absurdum zu führen, indem man sie auf analoge Probleme, die den Schülern einsichtig sind, überträgt. Erst im Anschluss daran sollte es zu einer rechnerischen Behandlung des Problems kommen. Allerdings darf sich die Besprechung des Paradoxons nicht nur auf die mathematische Betrachtungsweise beschränken. Vielmehr sollte den Schülern klar werden, warum die gefunde-

ne Lösung die einzig korrekte Antwort ist und wo die Ursachen für ihre eigenen Fehlvorstellungen liegen. Häufig sind diese darin zu suchen, dass Schüler die Problemstellungen nur überfliegen und nicht sinnerfassend lesen, so dass sie lernen müssen, ihre Aufmerksamkeit zu schärfen. Dies kann einerseits durch den Transfer auf analoge Paradoxa geschehen und andererseits durch den Arbeitsauftrag, eine Aufgabe zu formulieren, die als Ergebnis die von den Lernenden erwartete Wahrscheinlichkeit liefert. Des Weiteren sollte neben der mathematischen Erklärung des Problems stets eine anschauliche Erläuterung stattfinden, so dass es zu einer Verinnerlichung der Problematik kommt. Um zu überprüfen, ob die Schüler den Lösungsweg wirklich verstanden haben, sollten nach der Erarbeitung des Paradoxons vertiefende Übungen mit weiteren Aufgaben, die eine ähnliche Vorgehensweise erfordern, erfolgen. Dadurch schärfen die Lernenden dem Spiralprinzip gemäß ständig ihre Sicht auf stochastische Problemaufgaben. Eine solche Vorgehensweise im Unterricht ermöglicht die Ausbildung adäquater Grundvorstellungen, die für den Mathematikunterricht unerlässlich sind. [67, 68, 85]

Kapitel 3

Theorie

3.1 Zufallsexperimente, Ergebnisräume und Ereignisse

Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit der Analyse der Gesetzmäßigkeiten von so genannten *Zufallsexperimenten*. Darunter versteht man dem Zufall unterliegende Experimente, die unter vorher exakt bestimmten Bedingungen durchgeführt werden und, zumindest theoretisch, beliebig oft wiederholt werden können. Auch wenn sich die Ausgänge eines Versuchs bei mehreren unabhängigen Wiederholungen nicht immer gleichen, ist vor der Versuchsdurchführung die Menge aller möglichen Ausgänge bekannt.
So entspricht beispielsweise das Spielen mit einem regulären Würfel den Bedingungen für ein Zufallsexperiment. Die möglichen Ausgänge sind die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Die Versuchsbedingungen können etwa durch die Verwendung eines bestimmten Würfels oder Würfelbechers gegeben sein. [15, 22, 35, 44, 65]

Definition 3.1 Sei $\Omega := \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine nichtleere abzählbar unendliche [endliche] Menge. Seien die Elemente von Ω die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperi-

ments und entspreche umgekehrt jedem möglichen Ausgang des Zufallsexperiments genau ein Element von Ω, so heißt Ω *abzählbar unendlicher* [*endlicher*] *Ergebnisraum* des Zufallsexperiments.
Die Versuchsausgänge $\omega_i, i \in \mathbb{N}$, heißen *Ergebnisse*.
Sei $\mathcal{P}(\Omega) := \{A : A \subset \Omega\}$ die Potenzmenge der Menge der möglichen Ergebnisse. Dann heißt eine Menge $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, also $A \subset \Omega$, *Ereignis*. Eine einelementige Teilmenge $\{\omega\}$ von Ω heißt *Elementarereignis*.
Das Komplement eines Ereignisses A heißt *Gegenereignis* $\overline{A} := \Omega \backslash A$. [15, 22, 35, 44, 65]

Bemerkung 3.2 In diesem Kapitel wird zur Verdeutlichung der eingeführten Begriffe immer wieder auf das erste in dem Kapitel 2.2 präsentierte Problem des Chevaliers de Méré zurückgegriffen. Daher werden an dieser Stelle die verwendeten Abkürzungen erläutert:

- E: das Ereignis, bei einem Würfelspiel, das aus vier Durchgängen besteht, mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu erhalten
- A: das Ereignis, bei einem Würfelspiel, das aus 24 Durchgängen besteht, mit zwei Würfeln mindestens einen 6-er Pasch zu erhalten
- E': das Ereignis, bei einem Würfelspiel, das aus nur einem Durchgang besteht, mit einem Würfel eine Sechs zu erhalten
- A': das Ereignis, bei einem Würfelspiel, das aus nur einem Durchgang besteht, mit zwei Würfeln einen 6-er Pasch zu erhalten

Beispiel 3.3 In dem ersten Paradoxon des Chevaliers de Méré sieht der Ergebnisraum des Ereignisses E' wie folgt aus: $\Omega(E') = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Folglich ist er endlich.
Das Gegenereignis $\overline{E'}$ lautet: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Würfelspiel mit einem Würfel in nur einem Durchgang keine Sechs zu erhalten?

Das zweimalige Würfeln, wie bei dem Ereignis A beschrieben, legt man als ein

zusammengesetztes Zufallsexperiment aus, das heißt, das Zufallsexperiment „Würfeln“ wird mehrmals in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt.
Folglich interessieren bei dem Ereignis A die einzelnen Augenzahlen auf den beiden unterscheidbaren Würfeln. Auch hier wird zuerst nur das Ereignis A' betrachtet. Man erhält folgenden endlichen Ergebnisraum: $\Omega(A') = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\}$
Das Gegenereignis $\overline{A'}$ lässt sich wie folgt beschreiben: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Würfelspiel mit zwei Würfeln in nur einem Durchgang keinen 6-er Pasch zu erhalten?

Definition 3.4 Sei A eine endliche Menge. Dann heißt die Anzahl $|A|$ der Elemente von A *Mächtigkeit* von A. [22, 35]

Beispiel 3.5 Bei dem Problem von Méré gilt unter der Verwendung der Bezeichnungen von Bemerkung 3.2:
$|\Omega(E')| = 6$
Sei nun B eine weitere endliche Menge. Dann gilt:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| \tag{3.1}$$

[22]
Dieses Resultat muss nun bei Mérés Problemstellung berücksichtigt werden, so dass zur Berechnung der Mächtigkeit des Ereignisses A' die Mächtigkeit des einmaligen Würfelns mit sich selbst multipliziert werden muss. Daraus folgt:
$|\Omega(A')| = 6 \cdot 6 = 36$

3.2 Zufallsvariablen

Häufig interessiert man sich bei einem Zufallsversuch nicht konkret für das Ergebnis ω, sondern nur für ein bestimmtes Merkmal $X(\omega)$ der Ausgänge wie beispiels-

weise die Augensumme beim zweimaligen Würfelwurf. In der Wahrscheinlichkeitstheorie werden solche Merkmale durch eine Funktion beschrieben:

Definition 3.6 Sei Ω ein höchstens abzählbar unendlicher Ergebnisraum. Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt eine *Zufallsvariable*. [15, 19, 35]

Bemerkung 3.7 Nimmt die Zufallsvariable X den Wert k an, wird dies wie folgt notiert:

$$\{X = k\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}$$

[35]

3.3 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

Definition 3.8 Ein *endlicher Wahrscheinlichkeitsraum* (Ω, P) besteht aus einer endlichen Menge $\Omega\,(\Omega \neq \emptyset)$ und einer Abbildung P von $\mathcal{P}(\Omega)$ nach $[0, 1]$. Dabei muss P die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. $P(\Omega) = 1$ (*Normiertheit*)
2. $P(A) \geq 0\ \forall A \subset \Omega$ (*Nichtnegativität*)
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für alle disjunkten $A, B \subset \Omega$ (*Additivität*)

P heißt *Wahrscheinlichkeitsverteilung* oder *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf den Teilmengen von Ω. P(A) heißt *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses A. [15, 22, 35, 44, 65]

Folgerung 3.9 Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ paarweise disjunkte Ereignisse von Ω. Dann gilt die *endliche Additivität*, das heißt:

$$P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Beweis: Die Folgerung ergibt sich mittels vollständiger Induktion über n aus der Eigenschaft der Additivität der endlichen Wahrscheinlichkeitsräume:
Induktionsanfang: $n = 2$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (folgt aus Definition 3.8)
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für n.
Induktionsschritt: $n \rightsquigarrow n + 1$

$$\begin{aligned} P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n+1}} A_i\right) &= P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i \cup A_{n+1}\right) \\ &\overset{\text{I.Vor.}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) \end{aligned}$$

□

[35, 44, 65]

Folgerung 3.10 Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und E ein Ereignis von Ω. Für das Gegenereignis gilt:

$$P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) \tag{3.2}$$

Beweis: Da das Gegenereignis $\overline{E}$ als das Komplement des Ereignisses E definiert ist, gilt unter Berücksichtigung der Additivität bei endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen:

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) \\ &= P\left(E + \overline{E}\right) \\ &= P(E) + P\left(\overline{E}\right) \end{aligned}$$

□

[15, 22, 35, 44, 65]

Bemerkung 3.11 Betrachtet man ein beliebiges Ereignis E außer der leeren Menge, so kann man dieses als Vereinigung von endlich vielen disjunkten Elementarereignissen darstellen:

$$E = \sum_{\omega \in \Omega : \omega \in E} \{\omega\}$$

Wegen der Additivitätseigenschaft gilt dann für die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_{\omega \in \Omega : \omega \in E} P(\{\omega\}) \\ &=: \sum_{\omega \in \Omega : \omega \in E} p(\omega) \end{aligned}$$

[15, 35, 44, 65]

Bemerkung 3.12 Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Die Wahrscheinlichkeit einer Zufallsvariablen wird wie folgt notiert:

$$P(X = k) := P(\{X = k\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k) \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

[35]

3.4 Laplace Modelle

Definition 3.13 Seien $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ ein endlicher Ergebnisraum und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω. Wird allen $\omega_i \in \Omega$ $(i = 1, \ldots, n)$ die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeschrieben, so heißt P die *Gleichverteilung* auf Ω. (Ω, P) heißt dann *Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum* mit der *Laplace Wahrscheinlichkeit*

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \tag{3.3}$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} \tag{3.4}$$

Ein Zufallsversuch, der dieser Situation zu Grunde liegt, wird *Laplace Experiment* genannt. [15, 19, 22, 35, 44]

Beispiel 3.14 Laplace Experimente sind beispielsweise das Werfen einer fairen Münze, das Spielen mit einem regulären Würfel und das Drehen eines Glücksrades, bei dem alle Sektoren gleich groß sind.
Folglich ist auch Mérés Problem ein Laplace Versuch.
Da es im weiteren Verlauf dieses Kapitels von Vorteil sein wird, die Wahrscheinlichkeit leichter über das Gegenereignis $\overline{E'}$, für das es fünf mögliche Ausgänge gibt, zu bestimmen, wird auch diese Variante hier schon vorgestellt. Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich unter Verwendung der Bezeichnungen aus der Bemerkung 3.2 auf Seite 17 wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(E') &= \frac{1}{|\Omega(E')|} = \frac{1}{6} \\ &= 1 - P\left(\overline{E'}\right) = 1 - \frac{\left|\overline{E'}\right|}{\left|\Omega(\overline{E'})\right|} = 1 - \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Analog lässt sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A' berechnen:

$$\begin{aligned} P(A') &= \frac{1}{|\Omega(A')|} = \frac{1}{36} \\ &= 1 - P\left(\overline{A'}\right) = 1 - \frac{\left|\overline{A'}\right|}{\left|\Omega\left(\overline{A'}\right)\right|} = 1 - \frac{35}{36} \end{aligned}$$

3.5 Häufigkeiten

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit dem Problem der Chanceneinschätzung. Dabei soll der Begriff *Chance* als der Grad der Gewissheit, dass ein bestimmtes Ereignis eintritt, verstanden werden. Um diesen angeben zu können, müssen zuerst Erfahrungen gesammelt werden, so dass es nötig ist, das Zufallsexperiment durchzuführen.

Definition 3.15 Seien Ω der endliche Ergebnisraum eines Zufallsversuchs und A ein Ereignis von Ω. Weiterhin sei das n-Tupel $a = (a_1, \ldots, a_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ das Ergebnis von Ω nach n-maliger Durchführung des Zufallsexperiments, wobei a_i, $i = 1, \ldots, n$, den Ausgang des i-ten Versuchs bezeichnet.
Dann heißt die Anzahl $H_n(A)$ der Ergebnisse, bei denen das Ereignis A eintritt, *absolute Häufigkeit*.
Die *relative Häufigkeit* entspricht dem Anteil der absoluten Häufigkeit bezogen auf die Anzahl aller n Versuchsdurchführungen:

$$\begin{aligned} h_n(A) &:= \frac{H_n(A)}{n} \\ &= \frac{1}{n} \cdot |\{i : i = 1, \ldots, n \text{ und } a_i \in A\}| \end{aligned} \tag{3.5}$$

[15, 19, 22, 35, 44]

Folgerung 3.16 Offensichtlich ist die relative Häufigkeit $h_n(A)$ umso größer [kleiner], je öfter [seltener] ein positiver Ausgang des Ereignisses A bei den n Versuchsdurchführungen zu verzeichnen ist. Sie besitzt analoge Eigenschaften wie die endlichen Wahrscheinlichkeitsräume:

1. $h_n(\Omega) = 1$
2. $0 \leq h_n(A) \leq 1 \; \forall A \subset \Omega$
3. $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$ für alle disjunkten $A, B \subset \Omega$

[15, 35]

Bemerkung 3.17 Die relative Häufigkeit wird als empirischer Gewissheitsgrad für das Eintreten des Ereignisses A angesehen. Dieser Grad der Gewissheit ist um so größer, je häufiger der Versuch durchgeführt worden ist. Die Ursache dafür liegt

darin, dass erfahrungsgemäß bei einer größeren Anzahl an Durchgängen die Ausgänge eines Versuchs, der mehrmals, unabhängig voneinander und unter denselben Voraussetzungen wiederholt wird, immer weniger schwanken, folglich stabiler werden.
Auf Grund dieser Erfahrungen kam R. Mises auf die Idee, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wie folgt zu definieren:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} h_n(A) \tag{3.6}$$

Diese Eigenschaft wird *empirisches Gesetz der großen Zahlen* genannt.
Offensichtlich kann es sich dabei um keine Definition handeln:
Nach Formel 3.6 müssten alle relativen Häufigkeiten ab einem bestimmten $n \in \mathbb{N}$ in einem „ϵ-Schlauch“ liegen. Da jedoch die Ausgänge des Versuchs dem Zufall unterliegen, kann es immer wieder zu erheblichen Schwankungen und somit zu Ausreißern bei der relativen Häufigkeit kommen. Daher ist das *empirische Gesetz der großen Zahlen* nicht zur Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses geeignet. Es ist nur eine Erfahrungstatsache.
Einen Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit und der relativen Häufigkeit stellt Jakob Bernoullis *Gesetz der großen Zahlen* her, das in diesem Kapitel allerdings nicht erläutert wird, da es in dieser Arbeit keine weitere Verwendung findet. [15, 22, 35, 44]

3.6 Die Siebformel

Dieses Unterkapitel befasst sich mit der so genannten *Siebformel*. Sie ist auch unter den Namen *Formel des Ein- und Ausschließens* und *Formel von Poincaré-Sylvester* bekannt oder wird einfach als *allgemeines Additionsgesetz* bezeichnet.
Die Siebformel beschäftigt sich mit der Wahrscheinlichkeit der Vereinigung von beliebigen Ereignissen. Daher verallgemeinert sie die endliche Additivität (vgl. Folgerung 3.9 auf Seite 19), bei der ausschließlich die Vereinigung disjunkter Ereignisse

betrachtet wird. Zum Einstieg wird nun das Additionsgesetz für zwei Ereignisse vorgestellt:

Satz 3.18 Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und A, B zwei Ereignisse von Ω. Dann gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{3.7}$$

Beweis: Die Mengen A und B können wie folgt durch disjunkte Mengen dargestellt werden:

$$A = (A \backslash B) + (A \cap B)$$
$$B = (B \backslash A) + (A \cap B)$$

Daraus ergeben sich unter Berücksichtigung der endlichen Additivität nach Folgerung 3.9 auf Seite 19 die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B) \tag{3.8}$$
$$P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B) \tag{3.9}$$

Des Weiteren lässt sich die Menge $A \cup B$ in die drei disjunkten Mengen $A \backslash B$, $A \cap B$ und $B \backslash A$ zerlegen. Dann folgt mit Hilfe der Gleichungen 3.8 und 3.9 und der erneuten Anwendung der endlichen Additivität die Behauptung:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P((A \backslash B) + (A \cap B) + (B \backslash A)) \\ &= P(A \backslash B) + P(A \cap B) + P(B \backslash A) \\ &= P(A \backslash B) + P(A \cap B) + P(B \backslash A) + P(A \cap B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

□

[35, 65]

Beispiel 3.19 Dieser Satz lässt sich auf drei Ereignisse C, D, E übertragen, indem man $A := C \cup D$ und $B := E$ setzt:

$$\begin{aligned} P(C \cup D \cup E) &= P(C \cup D) + P(E) - P((C \cup D) \cap E) \\ &= P(C) + P(D) - P(C \cap D) + P(E) - P((C \cap E) \cup (D \cap E)) \\ &= P(C) + P(D) + P(E) \\ &\quad -P(C \cap D) - P(C \cap E) - P(D \cap E) \\ &\quad +P(C \cap D \cap E) \end{aligned}$$

[35, 65]

Die Siebformel verallgemeinert dieses Beispiel für n Ereignisse:

Satz 3.20 (Siebformel) Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, Ereignisse von Ω. Dann gilt für jede natürliche Zahl k mit $1 \leq k \leq n$:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

Beweis: Der Beweis wird mit Hilfe der vollständigen Induktion über n geführt. Induktionsanfang: Der Fall $n = 2$ gilt nach Satz 3.18 auf Seite 25:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für n.

Induktionsschritt: $n \rightsquigarrow n+1$

$$
\begin{aligned}
& P(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) = P((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}) \\
= \quad & P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + P(A_{n+1}) - P\left(\underbrace{(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}}_{(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})}\right) \\
\overset{\text{I.Vor.}}{=} \quad & \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) + P(A_{n+1}) \\
& - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
& + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+2} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) + P(A_{n+1}) \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n+1} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})
\end{aligned}
$$

□

[35, 65]

3.7 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition 3.21 Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \subset \Omega$ Ereignisse von Ω mit $P(A) > 0$. Dann heißt

$$P(B \mid A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten des Ereignisses B unter der Voraussetzung der Bedingung A. [15, 19, 22, 35, 44, 52, 65]

Beispiel 3.22 Im Beispiel des Justizirrtums in Kapitel 2.2 wurden folgende Ereignisse betrachtet:

K: Hypothese: Der Angeklagte soll Kontakt mit dem Opfer gehabt haben.

B: Die Blutspuren an der Kleidung des Verdächtigen glichen der Blutgruppenformel der Toten.

C: Bei dem Opfer wurden Blutspuren der Blutgruppe des Beklagten entdeckt.

$\bar{\text{K}}$: Es fand kein Kontakt zwischen dem Opfer und dem Verdächtigen statt.

D: Annahme: Sowohl B als auch C treten ein.

Unter Berücksichtigung der Blutgruppenverteilung aller Bürger der Bundesrepublik Deutschland kamen die Sachverständigen unter der Annahme, dass kein Kontakt zwischen dem Beklagten und dem Opfer stattfand, zu folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P\left(B \mid \overline{K}\right) = 0,1569$$
$$P\left(C \mid \overline{K}\right) = 0,1727$$

Satz 3.23 Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse von Ω mit $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) &= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \\ &\quad P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

[19, 22, 35, 44, 65]

Beweis: Durch geeignetes Erweitern und Anwenden der Definition 3.21 folgt:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) &= P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdot \ldots \cdot \\ &\quad \frac{P((A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cap A_n)}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})} \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \\ &\quad P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

□

Satz 3.24 (Totale Wahrscheinlichkeit) Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $A \subset \Omega$ ein Ereignis von Ω. $\{B_1, \ldots, B_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ heißt eine *Zerlegung* von Ω genau dann, wenn die B_i, $i \in \mathbb{N}$, disjunkt sind und ihre Vereinigung ganz Ω ist, das heißt: $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$. Ist $P(A) > 0$, so gilt für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A \mid B_k) \tag{3.10}$$

Beweis: Da nach Voraussetzung $\{B_1, \ldots, B_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Zerlegung von Ω und das Ereignis A eine Teilmenge von Ω ist, gilt unter Berücksichtigung der Additivität von $P(\cdot)$ (vgl. Definition 3.8 auf Seite 19) sowie der Definition 3.21 der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(\Omega \cap A) \\
&= P\left(\left(\sum_{k=1}^{n} P(B_k)\right) \cap A\right) \\
&= P\left(\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cap A\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(P(B_k) \cap A) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)
\end{aligned}$$

□

[19, 35, 44, 65]

Satz 3.25 (Bayes) Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, A ein Ereignis von Ω und $\{B_1, \ldots, B_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Zerlegung von Ω. Ist $P(A) > 0$, so gilt für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)} \tag{3.11}$$

Beweis: Der Nenner in der Formel von Bayes entspricht der zuvor definierten totalen Wahrscheinlichkeit. Also:

$$\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A \mid B_k) = P(A)$$

Aus der Formel der bedingten Wahrscheinlichkeit (Definition 3.21 auf Seite 27) ergibt sich für den Zähler:

$$P(B_i) \cdot P(A \mid B_i) = P(B_i \cap A)$$

Damit folgt unter Berücksichtigung der Kommutativität:

$$\begin{aligned} P(B_i \mid A) &= \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)} \Leftrightarrow \\ P(B_i \mid A) \cdot \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A \mid B_k) &= P(B_i) \cdot P(A \mid B_i) \Leftrightarrow \\ P(B_i \mid A) \cdot P(A) &= P(B_i) \cdot P(A \mid B_i) \Leftrightarrow \\ P(A \cap B_i) &= P(B_i \cap A) \end{aligned}$$

□

[19, 22, 35, 44, 52, 65]

Bemerkung 3.26 Die Formel von Bayes ermöglicht es, über die Wahrscheinlichkeiten $P(B_k)$ der Ereignisse B_k einer Zerlegung von Ω und über die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A \mid B_k)$ die inversen bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B_k \mid A)$ zu bestimmen. Dabei werden die Ereignisse B_k als Ursachen für das Eintreten des Ereignisses A aufgefasst. Den Ereignissen B_k werden vor Versuchsdurchführung die Wahrscheinlichkeiten $P(B_k)$ zugeschrieben, die als *a priori Wahrscheinlichkeiten* bezeichnet werden. [15, 35, 44]

Beispiel 3.27 Das Beispiel des Justizirrtums in dem Kapitel 2.2 zeigt, welche Bedeutung der a priori Wahrscheinlichkeit zukommt:

Mit Hilfe der Bayes'schen Formel soll ein Zusammenhang zwischen den Größen $P(K \mid D)$ und $P\left(D \mid \overline{K}\right)$ hergestellt werden. (Die Bezeichnungen entsprechen denen des Beispiels 3.22 auf Seite 27.)

$$1 - P(K \mid D) = P\left(\overline{K} \mid D\right) = \frac{P\left(D \mid \overline{K}\right) \cdot P\left(\overline{K}\right)}{P(D)}$$

Die Wahrscheinlichkeit $P\left(D \mid \overline{K}\right)$ kann über die im Beispiel 3.22 ermittelten Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden (sie wird im Beispiel 3.34 berechnet). Für das Ereignis K muss eine a priori Wahrscheinlichkeit angenommen werden. Die Gutachter setzten dafür einen Wert von 50 % an. Realistisch betrachtet hätte jedoch einer der ungefähr zehn Millionen männlichen Einwohner der Bundesrepublik Deutschland als Täter in Frage kommen können, was eine a priori Wahrscheinlichkeit von eins zu zehn Millionen gerechtfertigt hätte.

3.8 Mehrstufige Experimente und stochastische Unabhängigkeit

Häufig treten Zufallsversuche auf, die aus mehreren Teilversuchen (*Stufen*), die nacheinander durchgeführt werden, bestehen. Als Grundraum des gesamten n-stufigen Zufallsversuchs wird der *Produkt-Raum* Ω betrachtet, der sich aus dem kartesischen Produkt aller Ergebnisräume Ω_j $(j = 1, \ldots, n)$ der Teilversuche ergibt [35]:

$$\Omega := \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$$

Beispiel 3.28 Damit ergeben sich nun für das Problem von Méré folgende Grundräume (die Bezeichnungen entsprechen denen der Bemerkung 3.2 auf Seite 17):

1. Bei dem Ereignis E wird der Zufallsversuch „Spielen mit einem Würfel“ viermal wiederholt. Demzufolge gilt:

$\Omega(E) = \Omega(E_1) \times \ldots \times \Omega(E_4)$

Da nun der Ausgang jedes Teilversuchs derselbe ist, folgt:

$\Omega(E_1) = \ldots = \Omega(E_4) = \Omega(E')$

Also:

$\Omega(E) = \Omega(E')^4 = \{1,2,3,4,5,6\}^4$

2. Bei dem Ereignis A wird der Zufallsversuch „Spielen mit zwei Würfeln“ 24-mal wiederholt. Also gilt:

   $\Omega(A) = \Omega(A_1) \times \ldots \times \Omega(A_{24})$

   Auch hier sind die Ausgänge der Teilversuche identisch. Daraus folgt:

   $\Omega(A_1) = \ldots = \Omega(A_{24}) = \Omega(A')$

   Also:

   $\Omega(A) = \Omega(A')^{24} = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\}^{24}$

Die Ergebnisse des Zufallsexperiments sind n-Tupel $\omega = (a_1, \ldots, a_n)$, wobei a_j den Ausgang des j-ten Teilversuchs erläutert.
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung erhält man unter Berücksichtigung der Nichtnegativität von $p(\omega)$ sowie der Additivität nach Definition 3.8 auf Seite 19:

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1 \tag{3.12}$$

Beispiele für mehrstufige Zufallsversuche sind das n-malige Werfen einer Münze oder das n-malige Ziehen einer Kugel aus einer Urne. [35]

Bemerkung 3.29 (Baumdiagramme) Mehrstufige Zufallsversuche, bei denen jede Stufe einen endlichen Ergebnisraum besitzt, lassen sich sehr übersichtlich und anschaulich durch so genannte *Baumdiagramme* verdeutlichen. Diese Darstellungsart geht auf C. Huygens zurück. Ein solcher Baum entspringt in seiner *Wurzel*, dem Startpunkt des Zufallsversuchs, und setzt sich aus Knoten und Ästen, die diese verbinden, zusammen. Er endet schließlich in den *Blättern*, die die Ereignisse des gesamten Experiments verdeutlichen. Die Knoten stellen die Ergebnisse der i-ten

Stufe ($i = 1, \ldots, n$) dar. An den Ästen stehen die *Übergangswahrscheinlichkeiten*, die angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit man von der i-ten zur $(i+1)$-ten Stufe ($i = 0, \ldots, n-1$) übergehen kann. Ein Weg des Baumdiagramms von der Wurzel bis zu einem Blatt heißt *Pfad* [15, 35].

Beispiel 3.30 Das Zufallsexperiment „einmaliges Spielen mit einem regulären Würfel“ besitzt den endlichen Ergebnisraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und lässt sich somit durch folgenden Baum veranschaulichen:

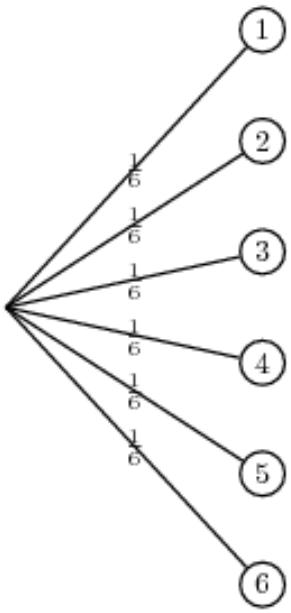

Abbildung 3.1: Baumdiagramm für ein Würfelspiel mit einem Durchgang

Besteht das Spiel aus mehreren Durchgängen, werden an den Baum weitere Stufen angehängt.

Bei dem Problem des Chevaliers de Méré sind in jeder Stufe nur zwei mögliche Ereignisse von Interesse: Einerseits kann eine Sechs und andererseits kann keine Sechs gewürfelt werden. Daher ergibt sich der folgende 16-blättrige Baum:

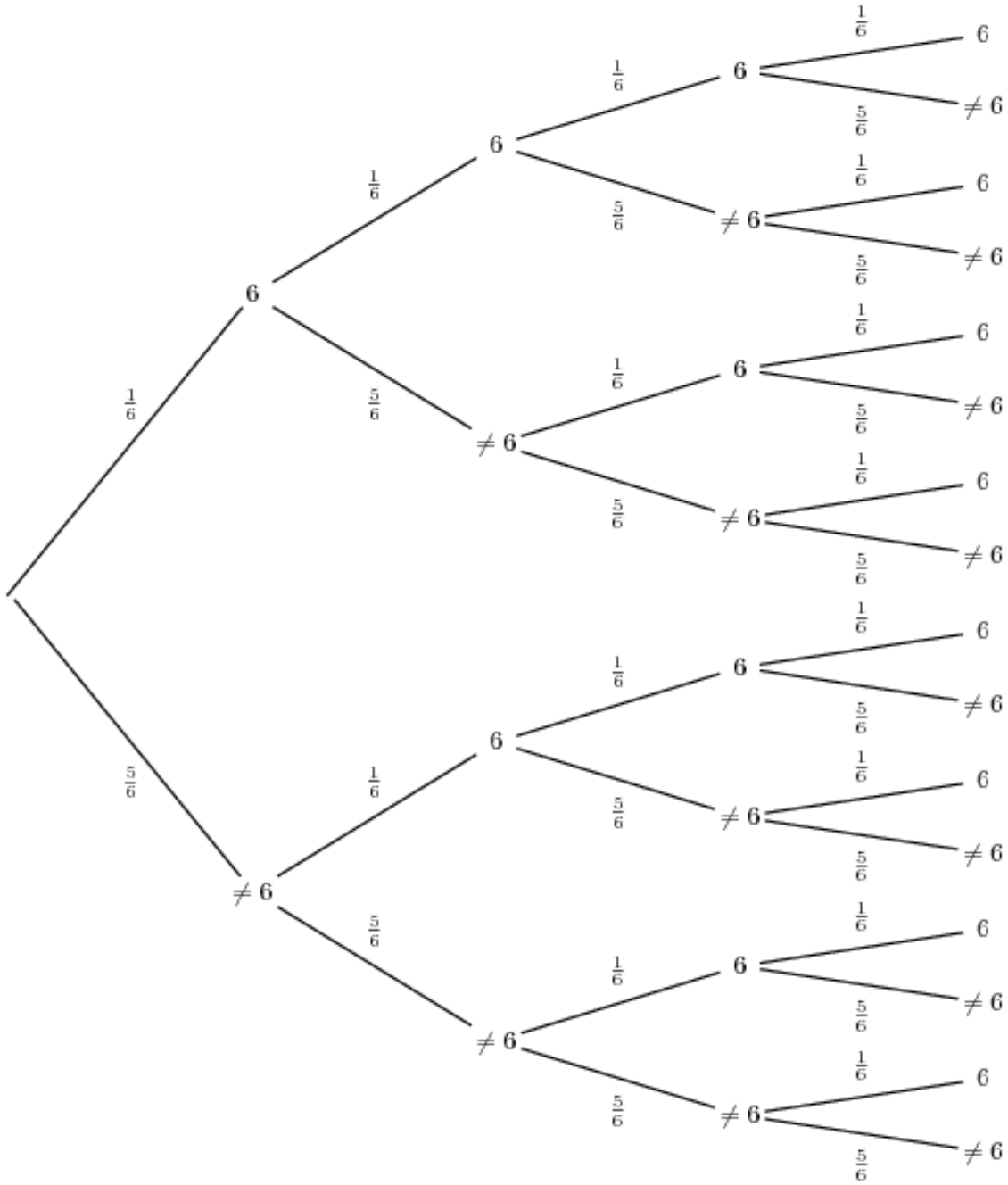

Abbildung 3.2: Baumdiagramm zum ersten Problem von Méré

Jeder Pfad, der das Ereignis „6“ beinhaltet, führt dazu, dass die Bank gewinnt. Demnach gibt es nur eine Möglichkeit, bei der der Spieler siegreich das Spiel beendet.

Satz 3.31 (Pfadregeln) Seien $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ der endliche Ergebnisraum eines n-stufigen Zufallsversuchs und das n-Tupel $\omega = (a_1, \ldots, a_n)$ ein Ergebnis. Dabei bezeichnet a_i, $i = 1, \ldots, n$, den Ausgang des i-ten Teilversuchs. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit $p(\omega)$ des n-stufigen Experiments:

1. *Pfad-Multiplikationsregel*:

   Wird ω als Pfad eines Baumdiagramms gedeutet, so entspricht die Wahrscheinlichkeit des gesamten Pfades dem Produkt der Übergangswahrscheinlichkeiten, die zu den einzelnen Ästen gehören:

   $$p(\omega) = p_1(a_1) \cdot p_2(a_2 \mid a_1) \cdot p_3(a_3 \mid a_1, a_2) \cdot \ldots \cdot p_n(a_n \mid a_1, \ldots, a_{n-1})$$

2. *Pfad-Additionsregel*:

   Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ergibt sich durch Aufsummieren der Wahrscheinlichkeiten aller zu A gehörenden Pfade:

   $$P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

[15, 35]

Beweis:

1. Man betrachte einen beliebigen Pfad des Baumes. Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Ausgänge des Ergebnisses ω, die zu den n Stufen gehören. Die zu dem Blatt dieses Pfades gehörende Wahrscheinlichkeit ist also $p(a_1 \cap \ldots \cap a_n)$. Nach der Definition 3.21 der bedingten Wahrscheinlichkeit auf Seite 27 gilt dann:

   $$p(a_1 \cap \ldots \cap a_n) = p_1(a_1) \cdot p_2(a_2 \mid a_1) \cdot p_3(a_3 \mid a_1, a_2) \cdot \ldots \cdot p_n(a_n \mid a_1, \ldots, a_n)$$

   Die Pfad-Multiplikationsregel ist analog zum Satz 3.23 auf Seite 28 aufgebaut.

2. Die Pfad-Additionsregel folgt aus der Bemerkung 3.11 auf Seite 20.

□

Beispiel 3.32 Das zweite Baumdiagramm aus Beispiel 3.30 auf Seite 33 besteht aus 16 Pfaden. Über die Pfad-Multiplikationsregel kann nun die Wahrscheinlichkeit für jedes dieser 16 Ereignisse $E_1, \ldots, E_{16}$ berechnet werden. Dabei entspricht die Nummerierung den Pfaden von oben nach unten:

$$
\begin{array}{lll}
P(E_1) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 & P(E_2) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) & P(E_3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \\
P(E_4) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 & P(E_5) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) & P(E_6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\
P(E_7) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 & P(E_8) = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 & P(E_9) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \\
P(E_{10}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 & P(E_{11}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 & P(E_{12}) = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\
P(E_{13}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 & P(E_{14}) = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 & P(E_{15}) = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\
P(E_{16}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 &&
\end{array}
$$

Mit Hilfe der Pfad-Additionsregel können die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse E und $\overline{E}$ bei Mérés Problem berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
P(E) &= \sum_{i=1}^{15} P(E_i) \\
&= \frac{671}{1296} \\
&\approx 0,518
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{E}\right) &= P(E_{16}) \\
&= \frac{625}{1296} \\
&\approx 0,482
\end{aligned}
$$

Definition 3.33 Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ die Ereignisse. Diese heißen genau dann *(stochastisch) unabhängig* bezüglich $P(\cdot)$, wenn für jede mindestens zweielementige, endliche Menge $T \subset \{1, \ldots, n\}$

gilt:

$$P\left(\bigcap_{j\in T} A_j\right) = \prod_{j\in T} P\left(A_j\right)$$

[22, 35, 44, 65]

Beispiel 3.34 Im Beispiel des Justizirrtums in dem Kapitel 2.2 werden die im Beispiel 3.22 auf Seite 27 berechneten Wahrscheinlichkeiten als unabhängig angesehen. Daraus ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P\left(D \mid \overline{K}\right) = P\left(B \mid \overline{K}\right) \cdot P\left(C \mid \overline{K}\right) \approx 0,027$$

Bemerkung 3.35 (Produktexperimente) Einen sehr bedeutungsvollen Spezialfall von mehrstufigen Zufallsexperimenten stellen so genannte *Produktexperimente* dar. Dabei handelt es sich um n-stufige Versuche, bei denen die n Teilexperimente getrennt voneinander ablaufen. Dies bedeutet, der i-te Versuch $(i = 2, \ldots, n)$ läuft ohne Kenntnisse der vorherigen $(i-1)$ Durchgänge ab. Folglich sind alle Einzelversuche räumlich und zeitlich unabhängig voneinander. Alternativ können alle Teilexperimente gleichzeitig stattfinden.
Mathematisch sind solche Produktexperimente dadurch gekennzeichnet, dass für alle $i = 2, \ldots, n$ die jeweilige Übergangswahrscheinlichkeit nicht von den Ausgängen $a_1, \ldots, a_{i-1}$ der vorherigen Experimente abhängt. Also gilt für ein Ergebnis $\omega = (a_1, \ldots, a_n)$:

$$p_i(a_i \mid a_1, \ldots, a_{i-1}) = p_i(a_i)$$

Dadurch vereinfacht sich die Formel für die Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf Ω wie folgt:

$$p\left(\omega\right) = p_1\left(a_1\right) \cdot \ldots \cdot p_n\left(a_n\right) \tag{3.13}$$

Da es sich bei einem Produktexperiment um einen mehrstufigen Zufallsversuch handelt, gilt: $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$, wobei Ω_i $(i = 1, \ldots, n)$ der endliche Ergebnisraum des i-ten Teilversuchs ist. Somit liegt dem Produktexperiment der endliche

Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), der ein Produkt der Wahrscheinlichkeitsräume (Ω_i, P_i) ist, zu Grunde.
Da bei Produktexperimenten die Einzelexperimente getrennt voneinander ablaufen und die Produktformel gilt, sind Produktexperimente stochastisch unabhängig. [35, 44]

Beispiel 3.36 Bei dem Problem von Méré handelt es sich um ein Produktexperiment, so dass sich folgende Wahrscheinlichkeiten unter Beibehaltung der Bezeichnungen aus der Bemerkung 3.2 auf Seite 17 ergeben:

1. $P(E) = 1 - P\left(\overline{E}\right) = 1 - \left(\frac{|\overline{E}|}{|\Omega(\overline{E})|}\right)^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,518$
2. $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \left(\frac{|\overline{A}|}{|\Omega(\overline{A})|}\right)^2 4 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491$

Kapitel 4

Stochastische Paradoxa

4.1 Das Geburtstagsproblem

4.1.1 Ursprung des Paradoxons

Das *Geburtstagsproblem* trat erstmals 1939 bei R. Edler von Mises auf: „In einem mathematischen Bureau einer Versicherungs-Gesellschaft stelle sich gelegentlich heraus, dass von den 60 Angestellten drei den gleichen Kalendertag zum Geburtstag hatten. Dies erschien als ein sehr ungewöhnliches, seltenes Zusammentreffen und man versuchte auf verschiedene Weise zahlenmässig die geringe Wahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses zu bestimmen. Es wurden mir Berechnungen vorgelegt, die eine Wahrscheinlichkeit von wenigen Tausendsteln ergaben!“ ([50] S. 313)

Diese Aufgabe wird als der Ursprung des so genannten *Geburtstagsproblems* angesehen, das mittlerweile ein fester Bestandteil in den meisten Stochastikbüchern ist und im Mathematikunterricht immer wieder zu Diskussionen führt. Es lautet: s zufällig ausgewählte Personen befinden sich in einem Raum. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E, dass mindestens zwei von ihnen in dem

gleichen Monat und an dem gleichen Tag Geburtstag haben? [19, 35, 45, 42, 65, 75]

4.1.2 Die unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit

Im Allgemeinen wird die Wahrscheinlichkeit für einen Mehrfachgeburtstag erheblich unterschätzt. Dies wird besonders deutlich, wenn die Aufgabenstellung wie folgt umformuliert wird: Wie viele Personen müssen sich in einem Raum befinden, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Mehrfachgeburtstag bei mindestens 50% liegt?
Da die Hälfte aller Kalendertage $366 \div 2 = 183$ ist, wird häufig vermutet, dass 183 Menschen zusammentreffen müssen. Daher führt die korrekte Antwort (23 Personen[1]) in der Regel zu großem Erstaunen.
Untersuchungen haben gezeigt, dass teilweise eine mit der Gruppengröße lineare Zunahme der Wahrscheinlichkeit für einen Mehrfachgeburtstag erwartet wird. Die Mehrzahl der Befragten geht jedoch davon aus, dass sich die Wahrscheinlichkeit, wie die folgende Abbildung zeigt, entwickelt: [15, 19, 20, 59, 85]:

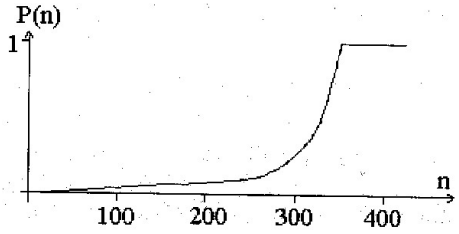

Abbildung 4.1: Häufige Vermutung bei dem *Geburtstagsproblem* [15]

Eine Ursache für diese Fehleinschätzung liegt darin, dass es für viele nicht vorstellbar ist, dass die Geburtstage von 23 Personen teilweise auf dasselbe Datum fallen können. Schließlich stehen jedem Geburtstag ungefähr $366 \div 23 \approx 15$ Möglichkeiten zur Verfügung, ohne dass es zu einem Mehrfachgeburtstag kommt. Bei

[1] Die Lösung wird in dem nächsten Unterkapitel erläutert.

dieser Fehlvorstellung kommt es zu einer Verwechslung der Begriffe „zufällig“ und „gleichmäßig verteilt“. Dabei handelt es sich um die verfestigte Intuition, dass ein zufälliges Phänomen stets ohne jegliche Regelmäßigkeiten und Muster auftritt. [15, 34, 71, 85]
Oft kommt es auch zu einer Fehleinschätzung, da die Aufgabenstellung mit folgenden, teilweise egozentrischen, Problemen verwechselt wird:

1. Wie viele zufällig ausgewählte Personen müssen schon ihre Geburtstage, die alle auf einen anderen Kalendertag fallen, genannt haben, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mein Geburtstag mit dem einer weiteren Person zusammenfällt, größer als 50% ist? [85]

2. Neben mir werden s Personen zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den s Personen noch mindestens eine weitere an demselben Tag Geburtstag feiert wie ich? (Ereignis E_1) [19, 15, 85]

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von s zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei an einem bestimmten Tag, beispielsweise am zehnten Oktober, Geburtstag haben? (Ereignis E_2) [15]

Da bei der Lösung dieser veränderten Aufgabenstellungen nur Jahre mit 365 Tagen betrachtet werden, liegt der endliche Ergebnisraum $\Omega = \{1, \ldots, 365\}$ vor. Weiterhin wird allen Kalendertagen dieselbe Wahrscheinlichkeit für einen Geburtstag zugeschrieben, so dass ein Laplace Ansatz gerechtfertigt ist. Dadurch kommt jedem Tag dieselbe Wahrscheinlichkeit $P = \frac{1}{365}$ für einen Geburtstag zu und es ergeben sich folgende Lösungen:

1. Bei dieser Aufgabe muss mehr als die Hälfte aller Kalendertage bereits von den Geburtstagen der anderen Personen belegt sein. Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Datum des eigenen Geburtstags bereits einmal

aufgetreten ist, mindestens 50%. Folglich müssen bereits 183 Kalendertage vergeben sein. Diese Betrachtungsweise rechtfertigt die zu Beginn dieses Unterkapitels dargestellte erste Vermutung. [85]

2. Zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit wird das Gegenereignis, dass keine der s Personen an demselben Tag Geburtstag hat wie ich, betrachtet. Demnach kann jeder der Befragten an einem der übrigen 364 Tage geboren sein, so dass eine beliebig ausgewählte Person mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{364}{365}$ nicht in demselben Monat und an demselben Tag Geburtstag feiert wie ich. Da der Geburtstag einer Person nicht von den Geburtstagen der übrigen Befragten abhängt, gilt (vgl. Satz 3.33 auf Seite 36):

$$P(E_1) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^s =: f(s)$$

Um bei dieser Aufgabe eine 50-prozentige Wahrscheinlichkeit dafür annehmen zu können, dass mindestens eine weitere Person an demselben Tag geboren ist wie ich, muss $f(s) \geq \frac{1}{2}$ gelten. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
1 - \left(\frac{364}{365}\right)^s &\geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
\left(\frac{364}{365}\right)^s &\leq \frac{1}{2} \Rightarrow \\
ln\left(\frac{364}{365}\right)^s &\leq ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
s\,(ln364 - ln365) &\leq -ln2 \Leftrightarrow \\
s &\geq \frac{ln2}{ln365 - ln364} \approx 253
\end{aligned}$$

Also sind 253 Personen, die alle an unterschiedlichen Tagen geboren sind, nötig, damit das Datum des eigenen Geburtstags mit 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit bereits einmal angegeben worden ist. [19, 20, 54, 55, 75]
Zwischen diesem Ergebnis und dem des eigentlichen *Geburtstagsproblems* besteht folgender Zusammenhang:
Sind 253 Personen außer mir in dem Raum, so gibt es 253 Möglichkeiten,

dass noch eine weitere Person an demselben Kalendertag Geburtstag feiert wie ich.

Falls demgegenüber nur 23 Personen in dem Raum sind, so gibt es $\binom{23}{2} = 253$ Möglichkeiten für einen Doppelgeburtstag zwischen zwei beliebigen Personen. [19, 20, 85]

3. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_2 lässt sich einfacher über das Gegenereignis berechnen. Es lautet: Kein Geburtstag der s Personen fällt auf den zehnten Oktober (Ereignis E_2^*) oder genau eine der s Personen hat an diesem bestimmten Tag Geburtstag (Ereignis E_2^{**}). Demzufolge setzt sich die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses aus der Summe zweier Wahrscheinlichkeiten zusammen.

   Fällt kein Geburtstag auf den zehnten Oktober, so gibt es 364 Möglichkeiten für die Geburtstage der s Personen, so dass sich folgende Wahrscheinlichkeit ergibt:

$$P\left(E_2^*\right) = \left(\frac{364}{365}\right)^s$$

   Angenommen die i-te Person ($i = 1, \ldots, s$) feiert am zehnten Oktober ihren Geburtstag, so müssen die übrigen $(s-1)$ Personen an einem anderen Tag geboren sein. Da sich s Personen in dem Raum befinden, kann dieses Ereignis s-mal auftreten. Also erhält man eine Wahrscheinlichkeit von

$$P\left(E_2^{**}\right) = s \cdot \frac{364^{s-1}}{365^s}$$

   Die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten stellt die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses dar:

$$\begin{aligned} P\left(E_2\right) &= 1 - P\left(\overline{E_2}\right) \\ &= 1 - \left(P\left(E_2^*\right) + P\left(E_2^{**}\right)\right) \\ &= 1 - \left(\left(\frac{364}{365}\right)^s + s \cdot \frac{364^{s-1}}{365^s}\right) \end{aligned}$$

Bei dieser Variante des *Geburtstagsproblems* erhält man bei einer Gruppengröße von 23 Personen einen Wert von nur 0,183% und auch bei 253 Personen beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Mehrfachgeburtstag lediglich 15,328%. [15]

4.1.3 Lösung des Paradoxons

Um das Problem lösen zu können, wird das Gegenereignis $\overline{E}$ betrachtet. Es lautet: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle s zufällig ausgewählten Personen verschiedene Geburtstage haben?
Die Personen betreten nacheinander einen Raum und teilen einem Beobachter ihren Geburtstag mit. Dann sei G_i $(i = 1, \ldots, s)$ das Ereignis, dass die i-te Person an einem anderen Tag Geburtstag hat als die zuvor Befragten.
Die Aufgabenstellung wird in drei Schritten gelöst: In dem ersten werden Schaltjahre vernachlässigt und den Geburtstagen wird die Gleichverteilung unterstellt, in dem zweiten werden Schaltjahre berücksichtigt und in dem dritten wird zusätzlich bedacht, dass nicht jedem Datum dieselbe Wahrscheinlichkeit für einen Geburtstag zukommt.

4.1.3.1 Erster Lösungsansatz

Der endliche Ergebnisraum Ω umfasst 365 Tage des Jahres, also $\Omega = \{1, \ldots, 365\}$. Die erste Person kann an einem beliebigen Tag Geburtstag haben. Dann bleiben für den zweiten Befragten noch 364, für den dritten 363 und für den s-ten $(365 - s + 1)$ Möglichkeiten, an einem anderen Tag Geburtstag zu feiern. Die Annahme der

Gleichverteilung ermöglicht einen Laplace Ansatz. Somit gilt:

$$\begin{aligned} P(G_1) &= \frac{365}{365} \\ P(G_2 \mid G_1) &= \frac{364}{365} \\ P(G_3 \mid G_1 \cap G_2) &= \frac{363}{365} \\ &\vdots \\ P(G_s \mid G_1 \cap \ldots \cap G_{s-1}) &= \frac{365 - s + 1}{365} \end{aligned}$$

Das gesuchte Ereignis $\overline{E}$ entspricht nun dem Durchschnitt aller Ereignisse G_i, $(i = 1, \ldots, s)$: $G_1 \cap \ldots \cap G_s$. Dann folgt aus Satz 3.23 auf Seite 28:

$$\begin{aligned} P\left(\overline{E}\right) &= P(G_1 \cap \ldots \cap G_s) \\ &= P(G_1) \cdot P(G_2 \mid G_1) \cdot P(G_3 \mid G_1 \cap G_2) \cdot \ldots \cdot \\ &\quad P(G_s \mid G_1 \cap \ldots \cap G_{s-1}) \\ &= \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365 - s + 1}{365} \\ &= \frac{365 \cdot \ldots \cdot (365 - s + 1)}{365^s} \end{aligned} \tag{4.1}$$

[45, 65]

Um die Formel herzuleiten, kann man alternativ das *Geburtstagsproblem* als einen s-stufigen Zufallsversuch mit dem endlichen Ergebnisraum $\Omega = \{1, \ldots, 365\}^s$, der die Mächtigkeit $|\Omega| = 365^s$ besitzt, auffassen. Der Zähler in der Formel 4.1 entsteht durch Produktbildung der möglichen Ereignisse jeder Stufe.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E lässt sich mit Hilfe des Gegenereignisses nach Folgerung 3.10 auf Seite 20 folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} P(E) &= 1 - P\left(\overline{E}\right) \\ &= 1 - \frac{365 \cdot \ldots \cdot (365 - s + 1)}{365^s} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die obige Gleichung ist für verschiedene s berechnet worden und die Ergebnisse sind folgender Tabelle zu entnehmen. Insbesondere ist abzulesen, dass es sich bereits bei 23 anwesenden Personen lohnt, auf einen Mehrfachgeburtstag zu wetten,

und dass schon bei 80 Personen die gesuchte Wahrscheinlichkeit bei 0,99991 liegt:

s	$P(E)$	s	$P(E)$	s	$P(E)$	s	$P(E)$
2	0,002739726	16	0,283604005	30	0,706316243	44	0,932885369
3	0,008204166	17	0,315007665	31	0,730454634	45	0,940975899
4	0,016355912	18	0,346911418	32	0,753347528	46	0,948252843
5	0,027135574	19	0,379118526	33	0,774971854	47	0,954774403
6	0,040462484	20	0,411438384	34	0,795316865	48	0,960597973
7	0,056235703	21	0,443688335	35	0,814383239	49	0,965779609
8	0,074335292	22	0,475695308	36	0,832182106	50	0,97037358
9	0,094623834	23	0,507297234	37	0,848734008	60	0,994122661
10	0,116948178	24	0,538344258	38	0,864067821	70	0,999159576
11	0,141141378	25	0,568699704	39	0,878219664	75	0,999719878
12	0,167024789	26	0,59824082	40	0,89123181	80	0,999914332
13	0,194410275	27	0,626859282	41	0,903151611	90	0,999993848
14	0,223102512	28	0,654461472	42	0,914030472	100	0,999999693
15	0,25290132	29	0,680968537	43	0,923922856	105	0,99999994

Tabelle 4.1: Wahrscheinlichkeiten für einen Mehrfachgeburtstag unter s zufällig ausgewählten Personen

Auf Formel 4.2 basiert das folgende Programm. Es berechnet für die Anzahl n der zu untersuchenden Tage die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Gruppe aus s Personen $(s = 1, ..., n)$ mindestens zwei an demselben Tag geboren sind.

```
> Geburtstagsproblem:=proc(n)
> local A,a,i,j,q,s;
> a:=array(1..n);
> for s from 1 to n do
>   q:=1;
```

```
>   for i from 0 to s-1 do
>     q:=q*(1-i/n);
>     a[s]:=evalf(1-q);
>   od;
> od;
> A:=[seq( [j,a[j]],j=1..n ) ];
> plot(A, labels=[‘Anzahl der Personen‘, ‘Wahrscheinlichkeit‘]);
> end;
```

[20, 21]

Da q die Gegenwahrscheinlichkeit berechnet, gibt der s-te Eintrag des Arrays a die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass bei s Personen mindestens zwei an demselben Tag Geburtstag haben. Dieses Array wird nun geplottet. Dem Graphen kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Personen s entnommen werden.

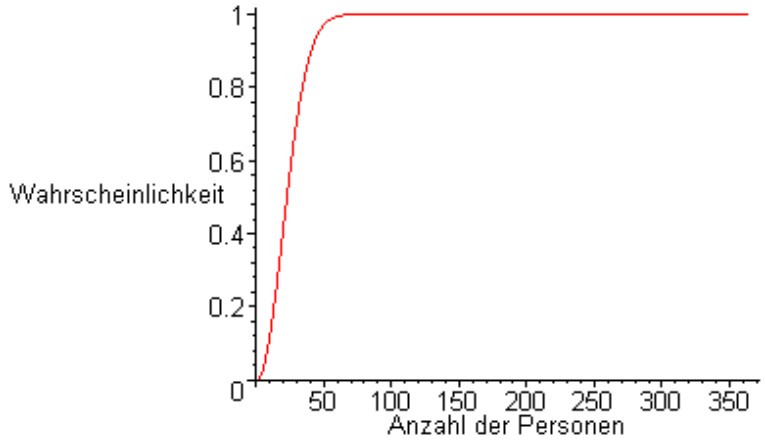

Abbildung 4.2: Verlauf der Wahrscheinlichkeit bei dem *Geburtstagsproblem*

4.1.3.2 Der Einfluss von Schaltjahren

Um den Einfluss der Schaltjahre zu verdeutlichen, wird das so genannte *kleine Geburtstagsproblem* analysiert: Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind zwei zufällig ausgewählte Personen in demselben Monat geboren?
Weiterhin wird bei den Rechnungen von der Gleichverteilung der Geburtstage ausgegangen. Es muss nun bedacht werden, dass die Monate unterschiedlich lang sind. So haben sieben Monate 31 Tage, vier Monate 30 Tage und ein Monat hat 28 bzw. 29 Tage.

1. Zum späteren Vergleich wird diese Aufgabenstellung zuerst ohne Berücksichtigung der Schaltjahre (Ereignis E_1) berechnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Personen beispielsweise im August Geburtstag haben, beträgt nach Formel 4.1 auf Seite 45:
$$P(\text{August}) = \frac{31^2}{365^2}$$
Dann ergibt sich für das Ereignis E_1:
$$\begin{aligned} P(E_1) &= 7 \cdot \left(\frac{31^2}{365^2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{30^2}{365^2}\right) + \left(\frac{28^2}{365^2}\right) \\ &\approx 0,0834003 \end{aligned}$$
[37]

2. Nun werden Schaltjahre berücksichtigt. Fälschlicherweise wird vorerst davon ausgegangen, dass jedes vierte Jahr ein Schaltjahr ist, so dass ein Rhythmus von vier Jahren untersucht werden muss (Ereignis E_2). Dadurch setzt sich die Mächtigkeit des endlichen Ergebnisraums wie folgt zusammen:
$|\Omega| = 4 \cdot 365 + 1 = 1461$
Danach muss die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_1 auf vier Jahre übertragen werden:
$$\begin{aligned} P(E_2) &= 7 \cdot \left(\frac{(31 \cdot 4)^2}{1461^2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{(30 \cdot 4)^2}{1461^2}\right) + \left(\frac{(28 \cdot 3 + 29)^2}{1461^2}\right) \\ &\approx 0,0833915 \end{aligned}$$

Folglich ist durch die Berücksichtigung der Schaltjahre die Wahrscheinlichkeit für einen Mehrfachgeburtstag gesunken. [37]

3. Zusätzlich wird jetzt berücksichtigt, dass es sich nur bei den Jahrhundertwenden, die auch durch vierhundert teilbar sind, um Schaltjahre handelt. Folglich muss eine Zeitspanne von vierhundert Jahren, in der $24 \cdot 3 + 25 = 97$ Schaltjahre vorkommen, berücksichtigt werden (Ereignis E_3). Dadurch vergrößert sich die Mächtigkeit des endlichen Ergebnisraums zu $|\Omega| = 365 \cdot 400 + 97 = 146097$ und die Wahrscheinlichkeit verändert sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} P(E_3) &= 7 \cdot \left(\frac{(31 \cdot 400)^2}{146097^2} \right) + 4 \cdot \left(\frac{(30 \cdot 400)^2}{146097^2} \right) + \left(\frac{(28 \cdot 303 + 29 \cdot 97)^2}{146097^2} \right) \\ &\approx 0,0833918 \end{aligned}$$

Demnach kommt es durch diese Korrektur im Vergleich zu Ereignis E_2 zu einer leichten Erhöhung der Wahrscheinlichkeit, insgesamt liegt sie jedoch immer noch unter der des Ereignisses E_1. [37]

Aus den Rechnungen geht hervor, dass durch Einbeziehen der Schaltjahre die Wahrscheinlichkeit für einen Mehrfachgeburtstag verringert wird. [25, 43]

4.1.3.3 Der Einfluss der Gleichverteilung

In den Abschnitten 4.1.3.1 und 4.1.3.2 wurde fälschlicherweise davon ausgegangen, dass die Geburtstage gleichverteilt sind. Betrachtet man jedoch Statistiken, so wird deutlich, dass dies keinesfalls korrekt ist: Beispielsweise werden an Wochenenden deutlich weniger Kinder zur Welt gebracht als an den übrigen Wochentagen. Dieses Problem kann jedoch bei ausreichender Datengröße vernachlässigt werden, da es sich über mehrere Jahre herausmittelt.
Deutlich gravierender ist dagegen die Problematik der saisonalen Schwankungen, die aus folgender Tabelle, die die Prozentzahlen der Geburten für jeden Tag aus

der im Staat New York liegenden Monroe County über eine Zeitspanne von 28 Jahren angibt, deutlich wird. Dabei werden Schaltjahre mitberücksichtigt. Zum Vergleich beträgt die Wahrscheinlichkeit, an einem beliebigen Tag Geburtstag zu haben, im Falle der Gleichverteilung $\frac{1}{366}$. Dieser Wert entspricht 0,2732%.

	Jan.	**Feb.**	**Mär.**	**Apr.**	**Mai**	**Jun.**	**Jul.**	**Aug.**	**Sep.**	**Okt.**	**Nov.**	**Dez.**
1	0,2320	0,2595	0,2755	0,2726	0,2764	0,2862	0,2924	0,2586	0,2773	0,3131	0,2557	0,2592
2	0,2347	0,2675	0,2776	0,2805	0,2622	0,2891	0,2921	0,2714	0,2773	0,3039	0,2921	0,2625
3	0,2412	0,2575	0,2942	0,2791	0,2678	0,2669	0,2711	0,2729	0,2947	0,2977	0,2717	0,2681
4	0,2421	0,2563	0,2888	0,2820	0,2746	0,2652	0,2646	0,2805	0,2856	0,2882	0,2687	0,2761
5	0,2563	0,2581	0,2717	0,2684	0,2776	0,2847	0,2563	0,2817	0,2711	0,2829	0,2746	0,2743
6	0,2545	0,2521	0,2678	0,2752	0,2847	0,2622	0,2708	0,2817	0,2652	0,2894	0,2859	0,2640
7	0,2604	0,2726	0,2829	0,2663	0,2690	0,2956	0,2773	0,2847	0,2740	0,2678	0,2669	0,2693
8	0,2444	0,2649	0,2874	0,2669	0,2702	0,2746	0,2826	0,2811	0,2740	0,2791	0,2788	0,2770
9	0,2512	0,2480	0,2640	0,2530	0,2876	0,2755	0,2814	0,2859	0,2779	0,2791	0,2794	0,2601
10	0,2560	0,2595	0,2746	0,2808	0,2817	0,2909	0,2711	0,2746	0,2897	0,2696	0,2708	0,2731
11	0,2631	0,2640	0,2681	0,2672	0,2663	0,2675	0,2791	0,2906	0,2947	0,2767	0,2788	0,2776
12	0,2607	0,2634	0,2734	0,2820	0,2770	0,2832	0,3066	0,2666	0,2761	0,2817	0,2909	0,2773
13	0,2575	0,2521	0,2734	0,2714	0,2749	0,2720	0,2767	0,2687	0,2734	0,2693	0,2758	0,2578
14	0,2687	0,2885	0,2758	0,2743	0,2604	0,2687	0,2918	0,2903	0,2891	0,2758	0,2791	0,2711
15	0,2601	0,2655	0,2743	0,2669	0,3004	0,2811	0,2619	0,2782	0,3084	0,2640	0,2702	0,2791
16	0,2702	0,2613	0,2737	0,2779	0,2655	0,2847	0,2933	0,3039	0,3007	0,2906	0,2548	0,2856
17	0,2471	0,2640	0,2669	0,2681	0,2841	0,2776	0,2906	0,2737	0,3019	0,2717	0,2586	0,2817
18	0,2400	0,2631	0,2572	0,2714	0,2788	0,2705	0,2767	0,2687	0,2930	0,2696	0,2708	0,2708
19	0,2613	0,2811	0,2628	0,2551	0,2726	0,2690	0,2705	0,2805	0,2959	0,2764	0,2554	0,2669
20	0,2501	0,2690	0,2705	0,2660	0,2897	0,2814	0,2906	0,2731	0,2882	0,2749	0,2779	0,2794
21	0,2773	0,2696	0,2660	0,2681	0,2761	0,2800	0,2868	0,2770	0,3051	0,2758	0,2734	0,2575
22	0,2433	0,2687	0,2720	0,2711	0,2808	0,2687	0,2865	0,2811	0,2832	0,2669	0,2619	0,2486
23	0,2554	0,2779	0,2805	0,2723	0,2791	0,2868	0,2823	0,2776	0,3093	0,2604	0,2560	0,2406
24	0,2569	0,2797	0,2705	0,2734	0,2921	0,2814	0,2669	0,2956	0,2989	0,2800	0,2628	0,2222
25	0,2622	0,2841	0,2622	0,2841	0,2791	0,2776	0,2921	0,2900	0,2874	0,2563	0,2717	0,2240
26	0,2589	0,2690	0,2865	0,2601	0,2900	0,2856	0,2802	0,2962	0,3090	0,2702	0,2566	0,2433
27	0,2655	0,2800	0,2548	0,2660	0,2950	0,2726	0,2956	0,2746	0,2936	0,2726	0,2785	0,2616
28	0,2720	0,2604	0,2805	0,2660	0,2634	0,2705	0,2808	0,2965	0,2879	0,2675	0,2958	0,2850
29	0,2578	0,0675	0,2773	0,2729	0,2832	0,2708	0,2767	0,2770	0,2977	0,2785	0,2835	0,3013
30	0,2507		0,2746	0,2652	0,2604	0,2536	0,2868	0,2767	0,2885	0,2956	0,2607	0,2720
31	0,2592		0,2622		0,2702		0,2874	0,2823		0,2637		0,2915

Tabelle 4.2: Prozentzahlen der Geburten in der Monroe County für jeden Tag der Jahre 1941 - 1968 [42]

Aus der Tabelle geht hervor, dass erwartungsgemäß am 29. Februar der geringste Prozentsatz vorliegt. Weiterhin werden weniger Kinder in den Winter- als in den Sommermonaten geboren. Allerdings fallen diese saisonalen Schwankungen nicht überall auf der Welt gleich aus.

Soll nun die Wahrscheinlichkeit für einen Mehrfachgeburtstag unter s Personen ausgerechnet werden (Ereignis E_4), so kann man sich ein s-stufiges Baumdiagramm mit 366 Äste vorstellen. Zur Berechnung der gewünschten Wahrscheinlichkeit wird erneut über das Gegenereignis $\overline{E_4}$, dass alle s Personen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, argumentiert. Um die Wahrscheinlichkeit von $\overline{E_4}$ anzugeben, muss für jede Person das Produkt der Wahrscheinlichkeiten p_r $(r = 1, \ldots, 366)$ berechnet werden. Dabei ist p_r der Anteil der Geburten an dem r-ten Tag $(r = 1, \ldots, 366)$. Durch Aufsummieren aller Produkte erhält man dann die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis:

$$P(E_4) = 1 - \sum_{\substack{i,j,k,\ldots=1 \\ i \neq j \neq k \neq \ldots}}^{366} \underbrace{p_i \cdot p_j \cdot p_k \cdot \ldots}_{s \text{ Faktoren}} \tag{4.3}$$

Für $s = 5$ besteht die Summe aus $366 \cdot 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362$ Termen.

Dieser Ausdruck lässt sich wie folgt verallgemeinern:

$$\frac{366!}{(366 - s)!} = s! \cdot \binom{366}{s} \tag{4.4}$$

Folglich besteht die Summe in Formel 4.3 aus einer enorm großen Anzahl von Termen, so dass es zweckmäßig ist, diese zu vereinfachen. Dazu werden die p_r durch $g + \epsilon_r$, $g = \frac{1}{366}$, $r = 1, \ldots, 366$, ersetzt, so dass folgt:

$$P(E_4) = 1 - \sum_{\substack{i,j,k,\ldots=1 \\ i \neq j \neq k \neq \ldots}}^{366} \underbrace{(g + \epsilon_i) \cdot (g + \epsilon_j) \cdot (g + \epsilon_k) \cdot \ldots}_{s \text{ Faktoren}} \tag{4.5}$$

Um Näherungsmöglichkeiten zu verdeutlichen, wird vorerst mit dem Fall $s = 3$ gerechnet:

$$\begin{aligned} P\left(E_{4_{s=3}}\right) &= 1 - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i\neq j\neq k}}^{366} (g+\epsilon_i)\cdot(g+\epsilon_j)\cdot(g+\epsilon_k) \\ &= 1 - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i\neq j\neq k}}^{366} \left(g^3 + g^2\epsilon_i + g^2\epsilon_j + g^2\epsilon_k + g\epsilon_i\epsilon_j + g\epsilon_i\epsilon_k + g\epsilon_j\epsilon_k + \epsilon_i\epsilon_j\epsilon_k\right) \end{aligned}$$

Beachtet man, dass $\sum \epsilon_i = \sum \epsilon_j = \sum \epsilon_k = 0$ sowie $\sum \epsilon_i\epsilon_j = \sum \epsilon_i\epsilon_k = \sum \epsilon_j\epsilon_k$ gilt, so vereinfacht sich diese Gleichung unter Berücksichtigung von Gleichung 4.4 wie folgt:

$$\begin{aligned} P\left(E_{4_{s=3}}\right) &= 1 - \left(3! \binom{366}{3} g^3 + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i\neq j\neq k}}^{366} (3g\epsilon_i\epsilon_j + \epsilon_i\epsilon_j\epsilon_k) \right) \\ &= 1 - \left(3! \binom{366}{3} g^3 + 1! \binom{366}{1} 3g \cdot \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{366} \epsilon_i\epsilon_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i\neq j\neq k}}^{366} \epsilon_i\epsilon_j\epsilon_k \right) \\ &= 1 - \left(3! \binom{366}{3} g^3 + 1! \binom{366}{1} \binom{3}{2} g \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{366} \epsilon_i\epsilon_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i\neq j\neq k}}^{366} \epsilon_i\epsilon_j\epsilon_k \right) \end{aligned}$$

Wegen der geringen Bandbreite der ϵ_r, $r = 1, \ldots, 366$, sind die Produktterme mit mehr als zwei Faktoren vernachlässigbar klein, so dass sich schließlich ergibt:

$$P\left(E_{4_{s=3}}\right) \approx 1 - \left(3! \binom{366}{3} g^3 + 1! \binom{366}{1} \binom{3}{2} g \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{366} \epsilon_i\epsilon_j \right) \tag{4.6}$$

Dieses Resultat kann auf den allgemeinen Fall der Gleichung 4.5 übertragen werden:

$$P\left(E_4\right) \approx 1 - \left(s! \binom{366}{s} g^s + (s-2)! \binom{366}{s-2} \binom{s}{2} g^{s-2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{366} \epsilon_i\epsilon_j \right)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung 4.4 lässt sich dieses Ergebnis folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} P(E_4) &\approx 1 - \frac{366!}{(366-s)!}\left(\frac{1}{366}\right)^s - \frac{366!}{(368-s)!\,(s-2)!\cdot 2!}\left(\frac{1}{366}\right)^{s-2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{366}\epsilon_i\epsilon_j \\ &= 1 - \frac{365!}{(366-s)!\cdot 366^{s-1}} - \frac{s\,(s-1)\,365!}{2\,(368-s)!\cdot 366^{s-3}}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{366}\epsilon_i\epsilon_j \qquad (4.7) \\ &= 1 - \frac{365!}{(366-s)!\cdot 366^{s-1}}\left(1 + \frac{s\,(s-1)\,366^2}{2\,(368-s)\,(367-s)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{366}\epsilon_i\epsilon_j\right) \qquad (4.8) \end{aligned}$$

Handelt es sich um geringe Abweichungen von der Gleichverteilung, so ist die Summe $\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{366}\epsilon_i\epsilon_j$ negativ und ihr Betrag nur sehr gering. Daher muss nun die Anzahl der befragten Personen näher betrachtet werden. Gleichung 4.8 verdeutlicht, dass die Abweichungen nur dann stark ins Gewicht fallen, wenn s ausreichend groß ist. Demgegenüber kann aus Gleichung 4.7 entnommen werden, dass die beiden letzten Terme für großes s gegen null streben. Daher sind nur dann deutliche Veränderungen der Wahrscheinlichkeiten, verglichen mit denen der Gleichverteilung, zu erwarten, wenn die saisonalen Schwankungen erheblich sind. Im Vergleich zu den Berechnungen, die ausschließlich die Schaltjahre mit einbeziehen, weichen die Wahrscheinlichkeiten für einen Mehrfachgeburtstag, wenn nicht von der Gleichverteilung ausgegangen wird, wie folgende Tabelle zeigt, nach oben ab. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten sind die Formeln 4.2 und 4.7 verwendet worden. Um Schaltjahre zu berücksichtigen, ist bei Formel 4.2 mit dem endlichen Ergebnisraum $\Omega = \{1, \ldots, 366\}^s$ gearbeitet worden. [7, 9, 15, 42, 43, 75]

s	P(Gleichverteilung)	P(saisonale Schwankungen)
10	0,1166	0,1171
20	0,4106	0,4119
30	0,7053	0,7070
40	0,8905	0,8917
50	0,9701	0,9706
60	0,9940	0,9942

Tabelle 4.3: Vergleich der bei dem *Geburtstagsproblem* gesuchten Wahrscheinlichkeit für verschiedene s [42]

4.1.4 Didaktischer Kommentar

Bevor das *Geburtstagsproblem* im Unterricht thematisiert werden kann, sollten die Schüler ausreichende Erfahrungen mit Laplace Modellen, Baumdiagrammen und relativen Häufigkeiten gesammelt haben.

Erfahrungsgemäß wird die Wahrscheinlichkeit des *Geburtstagsproblems* von den Schülern deutlich unterschätzt. Selbst die mathematische Lösung führt bei ihnen im Allgemeinen nicht zu einer Erweiterung der Intuition. Daher ist es ratsam, vor der mathematischen Bearbeitung das Problem zu simulieren. Dazu können die Schüler ihre Geburtstage miteinander vergleichen. Da in einer Klasse meistens mehr als 23 Schüler sind, sollte es theoretisch in mindestens 50 Prozent aller Fälle zu einem Mehrfachgeburtstag kommen. Jedoch ist zu bedenken, dass es sich bei einer Schulklasse nicht um eine Gruppe zufällig ausgewählter Personen handelt: Zum einen wohnen die Lernenden in einem begrenzten Einzugsgebiet, zum anderen sind sie alle etwa gleich alt. Um eine aussagefähigere Statistik zu erhalten, könnten die Schüler die Geburtstage ihrer Verwandten vergleichen oder in Kleingruppen Passanten in der Stadt befragen. [28]

Eine weitere Möglichkeit, den Lernenden das Paradoxon zu verdeutlichen, stellt

folgendes Computerprogramm, das das *Geburtstagsproblem* für n Personen und t Tage m-mal simuliert, dar:

```
> Geburt:=proc(m,n,t)
> local doppelgeb, geb, geburtstage,
  gemeinsam, prozent, A, h, i, j, k, l, r;
> doppelgeb:=0;
> prozent:=array(1..m);
```

Nach der Deklaration aller Variablen ist der Zähler „doppelgeb“, der am Ende der Simulation angibt, zu wie vielen Mehrfachgeburtstagen es bei den m Durchgängen insgesamt gekommen ist, auf Null gesetzt worden.

```
> for l from 1 to m do
>   gemeinsam:=0;
>   geburtstage:=array(1..n);
>   geb:=rand(1..t);
```

Der Zähler „gemeinsam“, der bei jedem Mehrfachgeburtstag um eins erhöht wird, muss zu Beginn jedes Simulationsstarts auf Null gesetzt und das Array „geburtstage“ mit n Einträgen angelegt werden.

```
>   for i from 1 to n do
>     geburtstage[i]:=seq(geb(), j=1);
>     for k from 1 to i-1 do
>       if geburtstage[i]=geburtstage[k] then
>         gemeinsam:=(gemeinsam+1);
>       fi;
>     od;
>   od;
```

Nachdem jeder Eintrag des Arrays „geburtstage“ mit einer Zufallszahl aus der Menge $\{1, \ldots, t\}$ gefüllt worden ist, wird überprüft, ob sich zwei Einträge gleichen. Ist dies der Fall, so wird der Zähler „gemeinsam“ um eins erhöht. Nach Abschluss der for-Schleife wird kontrolliert, ob er ungleich Null ist. Dadurch wird der Zähler „doppelgeb“ um eins erhöht.

```
>   if gemeinsam<>0 then
>     doppelgeb:=(doppelgeb+1);
>   fi;
>   prozent[l]:=doppelgeb/l;
> od;
> A:=[seq( [h,prozent[h]],h=seq(20*r, r=1..(m/20) ) )];
> plot(A, style=point, labels=[‘Anzahl der Durchgänge‘,
  ‘relative Häufigkeit‘]);
> end;
```

Die Einträge des Arrays „prozent“ geben jeweils die relative Häufigkeit für das Auftreten eines Mehrfachgeburtstags an. Daraus ergibt sich folgendes Diagramm:

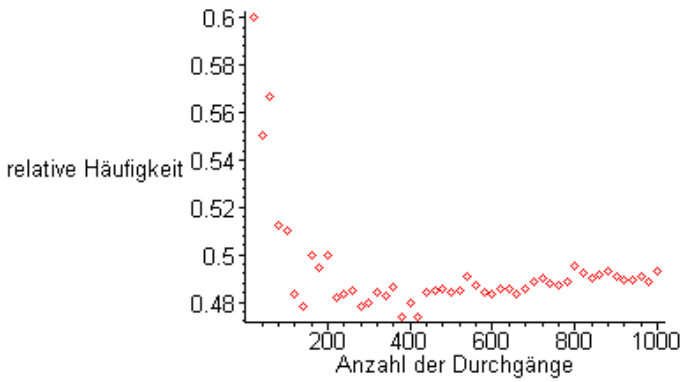

Abbildung 4.3: 1000-fache Simulation des *Geburtstagsproblems* für 23 Personen und 365 Tage

Die Abbildung zeigt, dass sich nach dem *empirischen Gesetz für große Zahlen*

(vgl. Bemerkung 3.17 auf Seite 23) die relativen Häufigkeiten für große m immer mehr einer 50-prozentigen Wahrscheinlichkeit nähern. Dadurch sollten die Schüler erkennen, dass ihre erste Vermutung falsch ist, und die Aufgabenstellung kann mathematisch modelliert werden. Dabei wird das Problem als ein s-stufiges Zufallsexperiment ausgelegt und kann durch folgendes Baumdiagramm verdeutlicht werden:

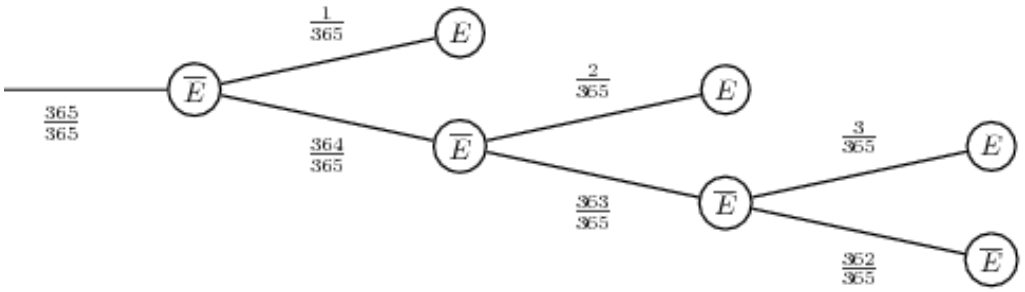

Abbildung 4.4: Baumdiagramm zum *Geburtstagsproblem*

Mit Hilfe der Pfad-Multiplikationsregel (vgl. Satz 3.31 auf Seite 35) kann dann die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis berechnet werden:

$$P\left(\overline{E}\right) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365 - s + 1}{365}$$

Dann folgt für die Wahrscheinlichkeit des *Geburtstagsproblems*:

$$\begin{aligned} P(E) &= 1 - P\left(\overline{E}\right) \\ &= 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365 - s + 1}{365} \end{aligned}$$

Nach der Bearbeitung des Paradoxons sollte der Lehrer auf die Fehlvorstellungen der Schüler eingehen und die Unterschiede zwischen der Aufgabe und den in Kapitel 4.1.2 vorgestellten, ähnlich klingenden Problemen herausarbeiten. Dadurch erkennen die Lernenden die Ursachen für ihre Fehlvorstellungen und die Notwendigkeit, Aufgabenstellungen intensiv und sinnerfassend zu lesen. [34, 85]

Zur Vertiefung kann das *Geburtstagsproblem* wie folgt erweitert werden: Es seien 365 Personen in einem Raum. Wie hoch ist die wahrscheinlichste Anzahl verschiedener Geburtstage?

Solange es zu einer Vertauschung der Begriffe „zufällig“ und „gleichmäßig verteilt“ kommt, werden die Lernenden vermuten, dass jede Person an einem anderen Kalendertag geboren ist. Dabei handelt es sich jedoch erneut um einen Fehlschluss: Es wird die Wahrscheinlichkeit betrachtet, dass keine der 365 Personen an einem bestimmten Tag Geburtstag hat (Ereignis A). Folglich fallen alle Geburtstage auf die übrigen 364 Kalendertage und es gilt:
$|\Omega| = 365^s$, $|\Omega \backslash A| = 364^s$
Damit ergibt sich:

$$P(A) = \left(\frac{364}{365}\right)^{365} \approx 36,7375\% \tag{4.9}$$

Also feiert an ungefähr 134 Kalendertagen keine der 365 Personen ihren Geburtstag, so dass auf nur 231 verschiedene Tage ein Geburtstag fällt.
Diese Variante des *Geburtstagsproblems* bietet dem Lehrer die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der Analysis, vorausgesetzt dieses Teilgebiet der Mathematik ist im Vorfeld ausgiebig im Unterricht bearbeitet worden, zu verknüpfen, indem die Gleichung 4.9 wie folgt umgeschrieben wird:

$$\begin{aligned} P(A) &= \left(\frac{364}{365}\right)^{365} \\ &= \left(\frac{365-1}{365}\right)^{365} \\ &= \left(1-\frac{1}{365}\right)^{365} \end{aligned}$$

Für eine beliebige Gruppengröße von s Personen lässt sich obige Gleichung folgendermaßen verallgemeinern (Ereignis E):

$$\begin{aligned} P(E) &= \left(\frac{s-1}{s}\right)^{s} \\ &= \left(1-\frac{1}{s}\right)^{s} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Von diesem Ausdruck soll nun der Grenzwert bestimmt werden. Dazu wird im Vorfeld die rechte Seite der Gleichung 4.10 mit $\left(1+\frac{1}{s}\right)^s$ multipliziert:

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{s}\right)^s \cdot \left(1+\frac{1}{s}\right)^s &= \left(\left(1-\frac{1}{s}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{s}\right)\right)^s \\ &= \left(1-\frac{1}{s^2}\right)^s \end{aligned} \tag{4.11}$$

Nun wird eine Variante der Bernoulli'schen Ungleichung betrachtet: Für $0 \leq x \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt ([41] S. 39):

$$(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}$$

Damit kann die Gleichung 4.11 folgendermaßen nach oben abgeschätzt werden:

$$\left(1-\frac{1}{s^2}\right)^s \leq \frac{1}{1+s\cdot\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{s}} \to 1 \text{ für } s \to \infty \tag{4.12}$$

Offensichtlich lässt sich die Gleichung 4.11 für $s \to \infty$ nach unten ebenfalls durch eins abschätzen, so dass der Ausdruck $\left(1-\frac{1}{s^2}\right)^s$ für $s \to \infty$ gegen eins strebt. Da nach der Definition der Euler'schen Zahl $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ gilt, folgt für den Grenzwert der Wahrscheinlichkeit $P(E)$:

$$\begin{aligned} P(E) &= \left(1-\frac{1}{s}\right)^s \\ &= \left(1-\frac{1}{s}\right)^s \cdot \left(1+\frac{1}{s}\right)^s \div \left(1+\frac{1}{s}\right)^s \to \frac{1}{e} \approx 0,3679 \text{ für } s \to \infty \end{aligned}$$

Somit strebt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E gegen den Kehrwert der Euler'schen Zahl und die wahrscheinlichste Anzahl verschiedener Geburtstage liegt bei ungefähr 63,21 Prozent aller betrachteten Tage. [4]

Um zu überprüfen, ob die Schüler ihre Intuition erweitert haben, kann das *Geburtstagsproblem* auf verschiedene Arten eingekleidet werden:

s Gegenstände	n Plätze	Es gibt mindestens ein / eine / einen
Personen	Wochen	Woche, in der mehr als eine Person geboren / gestorben ist.
Schreibfehler	Buchseiten	Seite mit mehr als einem Fehler.
Frauen	Männer	Mann, mit dem mehr als eine Frau eine Beziehung führen will.
Lottozahlen	Zahlenreihen	Zahlenreihe, die mehr als einmal gewinnt.
Defekte	Maschinen	Maschine, bei der in einem kurzen Zeitintervall mehr als ein Defekt auftritt.
Überraschungseier	Sammelfiguren	Figur, die nach dem Kauf von s Eiern mehr als einmal aufgetreten ist.
Unglücke	Tage	Tag, an dem mehr als ein (Flugzeug) Unglück passiert.
Anrufer	Taxen	ein Taxi, das mehr als einen Anruf empfängt.

Tabelle 4.4: Einkleidungsmöglichkeiten des *Geburtstagsproblems* [8, 35, 76, 77, 85]

Von den erwähnten Einkleidungsmöglichkeiten wird nun das *Taxiproblem* näher erläutert:

4.1.4.1 Das Taxiproblem

Auf den Straßen von New York City sind insgesamt 12000 Taxen unterwegs. Wie viele Personen müssen ein Taxi gerufen haben, damit mit 50-prozentiger Sicherheit ein Taxi nacheinander von mindestens zwei Personen benutzt wird?
Nachdem das *Geburtstagsproblem* ausgiebig besprochen worden ist, sollte eine geringe Anzahl von nötigen Fahrgästen erwartet werden. Dennoch führt die Antwort zu Erstaunen.

Zur Lösung wird davon ausgegangen, dass jede der s Personen zufällig und unabhängig von den anderen ein Taxi ruft und jedes Taxi mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{12000}$ eintrifft. Dann kann das Paradoxon mit dem gleichen Lösungsansatz wie bei dem *Geburtstagsproblem* bearbeitet werden:

$\Omega = \{1, \ldots, 12000\}^s$

$|\Omega| = 12000^s$

E: mindestens zwei Personen benutzen dasselbe Taxi

$\Omega \backslash E$: alle Personen benutzen unterschiedliche Taxen

$|\Omega \backslash E| = 12000 \cdot \ldots \cdot (12000 - s + 1)$

Damit ergibt sich:

$$P(E) = 1 - P(\Omega \backslash E) = 1 - \frac{12000 \cdot \ldots \cdot (12000 - s + 1)}{12000^s}$$

Für $s = 130$ beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Personen dasselbe Taxi benutzen, 50,4 Prozent. [85]

Paradoxa, die dem *Geburtstagsproblem* ähneln, verdeutlichen, dass die Wahrscheinlichkeit für irgendein unwahrscheinliches Ereignis groß und für ein bestimmtes unwahrscheinliches Ereignis klein ist. [55]

4.2 Das Rencontreproblem

4.2.1 Ursprung des Paradoxons

Erstmals trat das *Rencontreproblem* 1708 in Montmorts „Jeux de hazard“ [51] auf. Bei ihm bezog sich die Problemstellung auf das Kartenspiel „Le jeu du treize“, für das 52 Spielkarten benötigt werden. Von jeder der vier Farben gibt es ein Ass, neun Zahlkarten, einen Buben, eine Dame und einen König. Den Assen wird der Kartenwert eins, den Buben der Wert elf, den Damen der Wert zwölf und den Königen der Kartenwert dreizehn zugeschrieben. Die neun Zahlkarten stehen für die Werte zwei bis zehn. Nachdem die Karten gut gemischt worden sind, deckt der Spielleiter die ersten dreizehn Karten nacheinander auf und zählt dabei laut mit, die wie vielte Karte er umdreht. Stimmt die genannte Zahl mit dem Kartenwert überein, so bezeichnet man dies als ein *Rencontre*, und die Bank gewinnt. Kommt es zu keiner Übereinstimmung zwischen dem Kartenwert und der genannten Zahl, beendet der Spieler die Partie siegreich. Wie hoch ist die Gewinnwahrscheinlichkeit der Bank?

Montmort verallgemeinerte dieses Problem schließlich auf n ($n \in \mathbb{N}$) Spielkarten, die von dem Spielleiter aufgedeckt werden, und beriet sich mit Johann und Nicholas Bernoulli über dieses Problem. [51]

Später griffen Mathematiker wie L. Euler, J. H. Lambert und P. S. Laplace die Aufgabenstellung in verschiedenen Zusammenhängen auf.

Alle Varianten basieren auf dem gleichen Schema: n durchnummerierte Objekte werden willkürlich auf n ebenfalls durchnummerierte Fächer verteilt, so dass in jedem Fach genau ein Objekt liegt. Es wird die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht, dass mindestens ein Objekt in dem Fach liegt, das dieselbe Nummer trägt wie das Objekt.

Eine modernere Variante des *Rencontreproblems*, das auch unter dem Namen *Lambert'sches Problem der vertauschten Briefe* bekannt ist, lautet:

Nachdem Fritz n Briefe geschrieben und n Briefumschläge ($n \in \mathbb{N}$) beschriftet hat, steckt er willkürlich jeden Brief in einen Umschlag. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Brief in den dazugehörigen Briefumschlag gelangt?

4.2.2 Die unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit

Im Allgemeinen wird die bei dem *Rencontreproblem* gefragte Wahrscheinlichkeit deutlich unterschätzt. Zu dieser Fehleinschätzung kommt es, da bei der Bearbeitung der Aufgabenstellung häufig übersehen wird, dass sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit auf ein Ereignis bezieht, das aus der Vereinigung vieler, für die meisten Menschen unwahrscheinlicher Ereignisse besteht. Die Wahrscheinlichkeit dieser Vereinigung ist jedoch deutlich höher, als die jedes einzelnen Ereignisses. [35, 77] Unabhängig davon, dass die Wahrscheinlichkeit insgesamt unterschätzt wird, erwarten die meisten Personen, die erstmals mit dem *Rencontreproblem* konfrontiert werden, eine Abhängigkeit zwischen der gesuchten Wahrscheinlichkeit und der Anzahl n der Briefe. Dabei lassen sich bei den geäußerten Vermutungen zwei gegensätzliche Tendenzen unterscheiden:

1. Viele Personen erwarten intuitiv, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit wachsendem n zunimmt. Dabei handelt es sich jedoch um einen Trugschluss, da, wie im nächsten Unterkapitel gezeigt wird, die Wahrscheinlichkeit für mindestens ein Rencontre für $n \geq 3$ nahezu konstant bei ungefähr 0,63 liegt. [76]

2. Teilweise wird jedoch auch vermutet, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit der Gruppengröße abnimmt. Der Grund für diesen Trugschluss ähnelt dem des *Geburtstagsproblems*. Es kommt zu einer Verwechslung der ursprünglichen Aufgabenstellung mit der folgenden: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmter Brief in dem passenden Umschlag steckt?

Bei dieser Variante umfasst der Ergebnisraum Ω bei n betrachteten Briefen und Umschlägen die endliche Menge $\{1, \ldots, n\}$, so dass $|\Omega| = n$ gilt. Unter der Annahme der Gleichverteilung beträgt die Wahrscheinlichkeit für diese Aufgabenstellung $\frac{1}{n}$, die offensichtlich für große n abnimmt. [28, 43, 82]

4.2.3 Lösung des Paradoxons

Zur mathematischen Modellierung des Problems wird davon ausgegangen, dass sowohl die Briefe als auch die Umschläge eine endliche n-elementige Menge $\{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, bilden. Fritz' willkürliche Zuordnung jedes Briefes in genau einen Umschlag entspricht einer bijektiven Abbildung zwischen den beiden Mengen. Damit liegt der Aufgabenstellung der endliche Ergebnisraum Ω aller Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, zu Grunde, dessen Mächtigkeit $|\Omega| = n!$ beträgt. Bei dem *Rencontreproblem* wird nach der Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Brief in den entsprechenden Briefumschlag zu stecken, gefragt. Diese Frage lässt sich mathematisch dadurch modellieren, dass die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Fixpunkt gesucht ist. Als Wahrscheinlichkeitsverteilung P wählt man die Gleichverteilung auf Ω. Damit handelt es sich um einen Laplace Ansatz.
Nun wird die Menge A_j aller Permutationen mit Fixpunkt j betrachtet, die wie folgt definiert wird:

$$A_j := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega : a_j = j\}$$

Da bei dem *Rencontreproblem* nach der Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Fixpunkt gefragt wird, muss die Wahrscheinlichkeit $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)$ der Vereinigung aller A_j mit Hilfe der Siebformel (vgl. Satz 3.20 auf Seite 26) berechnet werden: Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n,\ n \geq 2$, Ereignisse von Ω. Dann gilt:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap\ A_{i_k}\right)$$

Zuerst wird für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ und jede Wahl von $i_1, \ldots, i_k$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ die Wahrscheinlichkeit $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ berechnet. Da als Wahrscheinlichkeitsverteilung P die Gleichverteilung angenommen wird, ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) &= \frac{|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|}{|\Omega|} \\ &= \frac{|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|}{n!} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Als Nächstes muss der Zähler in Gleichung 4.13 bestimmt werden. Dazu wird zu Beginn als Fixpunkt nur die Zahl i_l, $l \in \{1, \ldots, n\}$, betrachtet. Da die übrigen $(n-1)$ Briefe willkürlich auf die $(n-1)$ verbleibenden Umschläge verteilt werden können, gilt: $|A_{i_l}| = (n-1)!$

Treten zwei Fixpunkte i_l und i_m auf ($l, m \in \{1, \ldots, n\}$, $l \neq m$), so ergibt sich nach derselben Schlussfolgerung wie oben: $|A_{i_l} \cap A_{i_m}| = (n-2)!$

Dieses Verfahren lässt sich bis zu der Identität, die n Fixpunkte besitzt, fortführen. Folglich gilt für den Zähler in der Gleichung 4.13:

$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

Damit lässt sich Gleichung 4.13 wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) &= \frac{|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|}{n!} \\ &= \frac{(n-k)!}{n!} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Demnach hängt für jedes k, $1 \leq k \leq n$ ($n \geq 2$), und jede Wahl von $i_1, \ldots, i_n$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ ausschließlich von der Anzahl k und somit nicht von der speziellen Wahl der Ereignisse $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ aus $A_1, \ldots, A_n$ ab. In diesem Fall heißen die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ *austauschbar*. Für austauschbare Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, sind in der Siebformel alle Summanden der inneren Summe identisch. Sie entsprechen der Wahrscheinlichkeit $P(A_1 \cap \ldots \cap A_k)$. Dann lässt sich die Siebformel unter der Berücksichtigung, dass die innere Summe $\binom{n}{r}$ Summanden beinhaltet, wie folgt

umformen:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \binom{n}{r} \cdot P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) \tag{4.15}$$

Nach Gleichung 4.14 gilt:

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

Setzt man dieses Resultat in Formel 4.15 ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!} \end{aligned} \tag{4.16}$$

[3, 23, 35, 36, 44, 82]

Aus dieser Gleichung erhält man für das *Rencontreproblem* für verschiedene n folgende Werte:

n	$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$	n	$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$
2	0,5	7	0,632142857
3	0,666666667	8	0,632118056
4	0,625	9	0,632120811
5	0,633333333	10	0,632120536
6	0,631944444	11	0,632120561

Tabelle 4.5: Wahrscheinlichkeiten für das Rencontreproblem für verschiedene n

Aus der Tabelle geht hervor, dass die Wahrscheinlichkeiten alternieren und sich einem Wert von ungefähr 0,63212 annähern.

Basierend auf Formel 4.16 ist folgendes Programm erstellt worden. Es berechnet

für die Anzahl n der betrachteten Objekte, beispielsweise Briefe, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eines der Objekte in dem dazugehörigen Fach, beispielsweise Briefumschläge, landet.

```
> rencontreproblem:=proc(n)
> local A, i, j, p;
> p:=array(1..n);
> p[1]:=1;
> for i from 2 to n do
>   p[i]:=evalf(p[i-1]-(-1)^i*1/(i)!);
> od;
> A:=[seq( [j,p[j]],j=1..n ) ];
> plot(A, style = point, labels=[‘Anzahl der Briefe‘,
  ‘Wahrscheinlichkeit‘]);
> end;
```

Mit Hilfe dieses Programms sind für $n = 1, \ldots, 7$ und $n = 1, \ldots, 20$ die Wahrscheinlichkeiten berechnet und geplottet worden. Leider kann man das alternierende Verhalten für $n \geq 6$ nur erahnen, woraus allerdings deutlich wird, wie schnell sich die Wahrscheinlichkeit ihrem Grenzwert nähert.

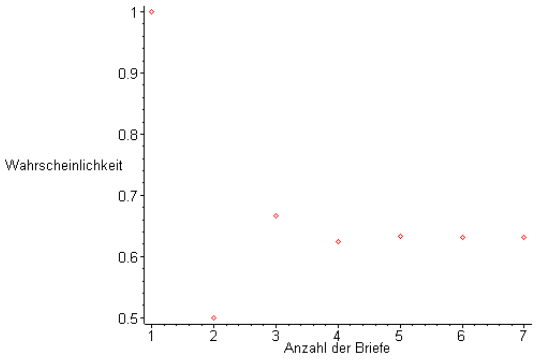

Abbildung 4.5: Wahrscheinlichkeitsverteilung für das *Rencontreproblem* für $n = 1, \ldots, 7$ Briefe

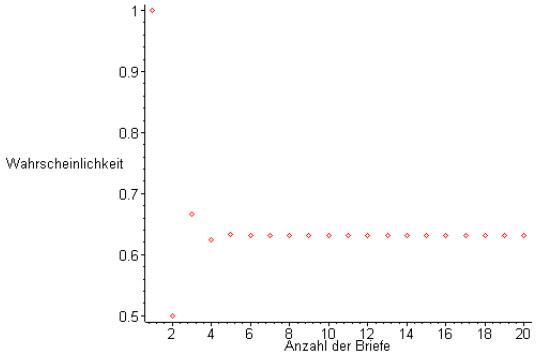

Abbildung 4.6: Wahrscheinlichkeitsverteilung für das *Rencontreproblem* für $n = 1, \ldots, 20$ Briefe

Im Folgenden soll der Grenzwertprozess näher untersucht werden. Dazu wird ein Resultat der Analysis bezüglich der Exponentialreihe herangezogen ([41], S. 91):

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},\ x \in \mathbb{R}$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert der Wahrscheinlichkeit für mindestens ein Rencontre:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!} &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \\ &= 1 - e^{-1} \\ &\approx 0,63212 \end{aligned}$$

Folglich nähert sich die bei dem *Rencontreproblem* gesuchte Wahrscheinlichkeit für n gegen Unendlich einem Wert von 63,21% an. [3, 82]

4.2.4 Didaktischer Kommentar

Zusätzlich zu den grundlegenden Begriffen der Wahrscheinlichkeitstheorie, wie Wahrscheinlichkeit, Laplace Modell und relative Häufigkeit, sollten die Lernenden

noch mit Baumdiagrammen und idealerweise mit der Siebformel vertraut sein, bevor das *Rencontreproblem* bearbeitet wird.

Nachdem die Schüler das Problem kennen gelernt haben, werden sie erfahrungsgemäß, wie in Kapitel 4.2.2 geschildert, davon ausgehen, dass die gefragte Wahrscheinlichkeit von der Anzahl n der Briefe abhängt. Um die Lernenden auf ihre Fehlvorstellung aufmerksam zu machen, kann das *Rencontreproblem* wie folgt nachgespielt werden:
Jeder Schüler erhält $2n$ Papierkarten, denkt sich $(n-1)$ verschiedene Namen aus und schreibt auf je zwei Karten denselben Namen. Auf den zwei verbleibenden Kärtchen wird der eigene Name notiert. Daraufhin legt jeder Lernende die ersten n Karten mit unterschiedlichen Namen vor sich auf den Tisch, mischt die übrigen gut und legt sie willkürlich unter die bereits aufgedeckten. Dieser Versuch wird mehrmals durchgeführt. Die Schüler müssen eine Statistik anlegen, aus der hervorgeht, in wie vielen Fällen dieselben Namen untereinander liegen. Insbesondere sollen sie darauf achten, ob es bei dem eigenen Namen zu einer Übereinstimmung kommt. Um unterschiedliche n zu betrachten, kann der Lehrer die Aufgabe in Gruppenarbeit bearbeiten lassen und jeder Kleingruppe eine andere Anzahl an Kärtchen zur Verfügung stellen. Im Anschluss an den Versuch werden die verschiedenen Ergebnisse vorgestellt und verglichen.
Im Rahmen dieser Besprechung sollten die Lernenden einerseits erkennen, dass die relative Häufigkeit für ein Rencontre nicht von der Anzahl n abhängt, und andererseits, dass es wesentlich häufiger zu einer Übereinstimmung zweier beliebiger Namen als zu einer mit dem eigenen Namen kommt. Dadurch wird den Schülern sofort ein Grund für ihren Trugschluss vor Augen geführt. [60]
Aus zeitlichen Gründen wird man sich beim Nachspielen des Problems auf relativ kleine n beschränken. Um das *Rencontreproblem* mit deutlich größeren n durchzuspielen, kann folgende Computersimulation dienen, die für eine beliebige Anzahl n der Versuchsobjekte (zum Beispiel Briefe) das Paradoxon m-mal simuliert:

```
> rencontre:=proc(m,n)
> local  brief, gemeinsam, kopie, liste, prozent, rencontre,
  umschlag, wert, zufallszahl, A, h, i, j, k, l, r, s;
> rencontre:=0;
> prozent:=array(1..m);
```

Nach der Deklaration der Variablen beginnt nun eine for-Schleife, die das *Rencontreproblem* m-mal durchführt.

```
> for r from 1 to m do
>   liste:=[seq(i, i=1..n)];
>   kopie:=liste;
>   brief:=[];
>   for i from 1 to n do
>     zufallszahl:=seq(rand(1..nops(kopie))(), j=1);
>     wert:=kopie[zufallszahl];
>     brief:=[op(brief), wert];
>     kopie:=subsop(zufallszahl=NULL, kopie);
>   od;
```

Die letzte for-Schleife liefert eine Liste der Einträge eins bis n, wobei deren Elemente gemischt werden. Dadurch wird jedem Brief eine beliebige Zahl zwischen eins und n so zugeordnet, dass keine Zahl doppelt vorkommt. Dieses Verfahren wird nun für die Umschläge wiederholt.

```
>   liste:=[seq(i, i=1..n)];
>   kopie:=liste;
>   umschlag:=[];
>   for k from 1 to n do
>     zufallszahl:=seq(rand(1..nops(kopie))(), j=1);
>     wert:=kopie[zufallszahl];
```

```
>     umschlag:=[op(umschlag), wert];
>     kopie:=subsop(zufallszahl=NULL, kopie);
>   od;
```

Nachfolgend können die Einträge der beiden Listen miteinander verglichen werden. Bei einer Übereinstimmung wird der Zähler „gemeinsam“ um eins erhöht. Ist dieser ungleich null, so wird der zweite Zähler „rencontre“, der nach der Simulation aller m Durchgänge die Anzahl der Übereinstimmungen angibt, um eins erhöht. Aus diesem lässt sich dann die relative Häufigkeit für ein Rencontre berechnen.

```
>   gemeinsam:=0;
>   for l from 1 to n do
>     if brief[l]=umschlag[l] then
>       gemeinsam:=(gemeinsam+1);
>     fi;
>   od;
>   if gemeinsam<>0 then
>     rencontre:=(rencontre+1);
>   fi;
>   prozent[r]:=rencontre/r;
> od;
> plot(A, style=point, labels=[‘Anzahl der Durchgänge‘,
  ‘relative Häufigkeit‘]);
> plot(A, style=point);
> end;
```

Diese Simulation ist für verschiedene n jeweils fünftausendmal durchgeführt worden:

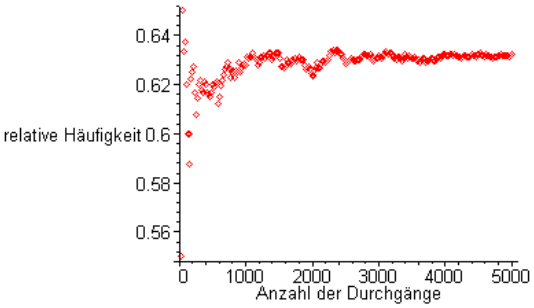

Abbildung 4.7: 5000-fache Simulation des *Rencontreproblems* für 10 Briefe

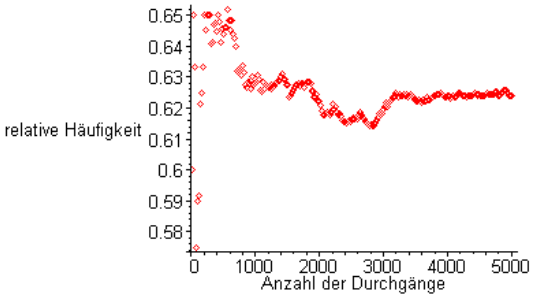

Abbildung 4.8: 5000-fache Simulation des *Rencontreproblems* für 30 Briefe

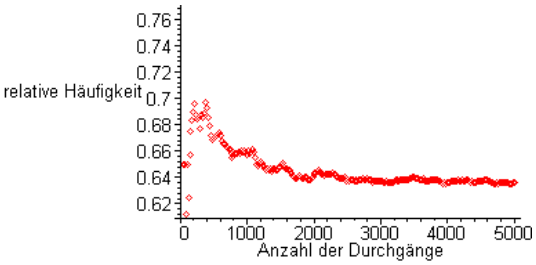

Abbildung 4.9: 5000-fache Simulation des *Rencontreproblems* für 100 Briefe

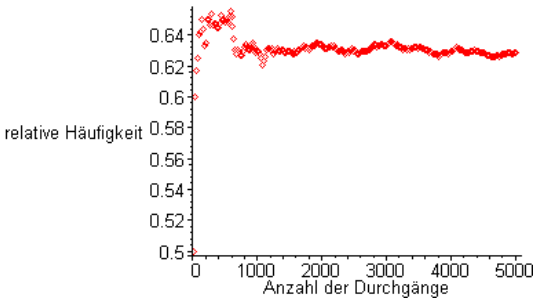

Abbildung 4.10: 5000-fache Simulation des *Rencontreproblems* für 300 Briefe

Aus den Abbildungen 4.7 bis 4.10 geht hervor, dass die relative Häufigkeit nicht von der Anzahl n der Objekte (zum Beispiel Briefe) abhängt. Daher können auf Grund des *empirischen Gesetzes für große Zahlen* (vgl. Bemerkung 3.17 auf Seite 23) erste Vermutungen über die bei dem *Rencontreproblem* gesuchte Wahrscheinlichkeit angestellt werden.

Nachdem die Schüler auf die unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit aufmerksam gemacht worden sind, wird das Problem nun mathematisch modelliert. Ist im Unterricht die Siebformel bereits eingeführt worden, so kann das *Rencontreproblem* dazu dienen, diese zu festigen. Alternativ kann sie mit Hilfe der Aufgabenstellung durch kombinatorische Argumente eingeführt werden. Doch auch ohne die Formel des Ein- und Ausschließens ist es möglich, das Paradoxon zu lösen:

Bei diesem Vorgehen ist es vorteilhaft, zuerst das *Rencontreproblem* für zwei Briefe

zu untersuchen. Offensichtlich liegt die Wahrscheinlichkeit für ein Rencontre bei $\frac{1}{2}$. In einem nächsten Schritt wird das Paradoxon mit drei Briefen bearbeitet. Dazu ist es hilfreich, ein Baumdiagramm erstellen zu lassen, bei dem die j-te Stufe ($j = 1, 2, 3$) angibt, dass der i-te Brief ($i = 1, 2, 3$) in dem j-ten Umschlag steckt:

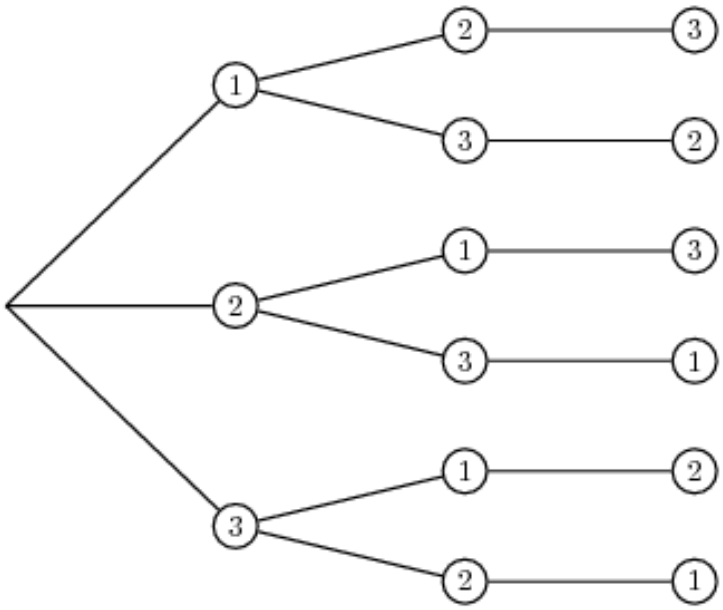

Abbildung 4.11: Baumdiagramm für das *Rencontreproblem* mit drei Briefen [28]

Aus dem Baum werden die insgesamt sechs möglichen Ausgänge ersichtlich, von denen vier mindestens ein Rencontre aufweisen. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten mindestens eines Rencontres $\frac{4}{6}$. Anschließend kann die Aufgabenstellung auf vier Briefe erweitert werden, indem ein Baumdiagramm, das analog zu dem obigen aufgebaut ist, angefertigt wird. Daraus können die Lernenden erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit für mindestens ein Rencontre bei $\frac{15}{24}$ liegt.
Für die weitere Bearbeitung ist es hilfreich, das Gegenereignis $\overline{E_i}$ zu untersuchen. Es lautet: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es bei i ($i \in \mathbb{N}$) vorhandenen

Briefen zu keinem Rencontre kommt? Nach obigen Überlegungen gilt:

$$\begin{aligned} P\left(\overline{E_1}\right) &= 0 \\ P\left(\overline{E_2}\right) &= \frac{1}{2} \\ P\left(\overline{E_3}\right) &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ P\left(\overline{E_4}\right) &= \frac{9}{24} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Nun werden die Differenzen zweier aufeinander folgender Wahrscheinlichkeiten betrachtet:

$$\begin{aligned} P\left(\overline{E_2}\right) - P\left(\overline{E_1}\right) &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2!} \\ P\left(\overline{E_3}\right) - P\left(\overline{E_2}\right) &= -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3!} \\ P\left(\overline{E_4}\right) - P\left(\overline{E_3}\right) &= \frac{1}{24} = \frac{1}{4!} \end{aligned}$$

Um dieses Verfahren noch deutlicher zu machen, kann der Lehrer weitere Werte für $n \geq 5$ angeben. Die Schüler sollten feststellen, dass die Differenzen der Wahrscheinlichkeiten gleich dem Kehrwert der Fakultätsterme sind. Weitere Wahrscheinlichkeiten erhält man, indem bei geradem i , $i = 1, \ldots, n$, zu der Wahrscheinlichkeit $P\left(\overline{E_{i-1}}\right)$ der Term $\frac{1}{i!}$ addiert und bei ungeradem i dieser Term subtrahiert wird. Die bei dem *Rencontreproblem* gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann über das Gegenereignis (vgl. Folgerung 3.10 auf Seite 20):

$$P\left(E_i\right) = 1 - P\left(\overline{E_i}\right) \ , i = 1, \ldots, n$$

Daraus erhält man die Lösungsformel des Paradoxons:

$$P\left(E\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + - \cdots$$

Folglich ist das gesuchte Resultat auf elementare Weise hergeleitet worden. Zwar basiert dieser Lösungsweg auf einer nicht bewiesenen Vermutung, dennoch sollte er für einen Grundkurs genügen. [28, 31, 76]

Zur Vertiefung können weitere Varianten des *Rencontreproblems* berechnet werden:

- An einer Tanzstunde nehmen n ($n \in \mathbb{N}$) Ehepaare teil. Die Tanzpartner werden zufällig ausgelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Mann mit seiner Ehefrau tanzt? [46, 76]

- An einem Reitturnier nehmen n Jockeys mit ihren n ($n \in \mathbb{N}$) Pferden teil. Jedem Reiter wird zufällig ein Pferd zugeteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Jockey auf seinem eigenen Pferd reitet? [46]

- An den Bundesjugendspielen nehmen n Schüler mit den Startnummern $1, \ldots, n$ ($n \in \mathbb{N}$) teil. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens einem Teilnehmer Startnummer und Platzierung übereinstimmen? [76]

- Jeder der n ($n \in \mathbb{N}$) Schüler einer Klasse bringt ein Geschenk mit und legt es in einen Sack. Anschließend darf jeder mit verschlossenen Augen ein Päckchen ziehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer sein eigenes Geschenk erhält? [31, 46, 76]

- Der Lehrer lost für seine Klasse mit n ($n \in \mathbb{N}$) Schülern eine neue Sitzordnung aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Lernender nach der neuen Sitzordnung denselben Platz einnimmt wie zuvor? [31]

- n ($n \in \mathbb{N}$) Discobesucher geben ihre Jacken an der Garderobe ab. Nach dem Besuch gibt die Garderobenfrau jedem Jugendlichen zufällig eine Jacke. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Discobesucher seine eigene erhält? [46, 76]

Im Anschluss an die Lösung des *Rencontreproblems* kann der Grenzwertprozess näher untersucht werden. Im Rahmen dieser Unterrichtsphase wird, da $\lim\limits_{n\to\infty} P(E_n) = \frac{1}{e}$ gilt, ein Zusammenhang zwischen der Analysis und der Stochastik aufgezeigt, der der Forderung nach einer horizontalen Verknüpfung im Mathematikunterricht gerecht wird. [82]

4.3 Das Ziegenproblem

4.3.1 Ursprung des Paradoxons

Im amerikanischen Fernsehen wurde bis 1990 die sehr populäre Fernsehsendung „Let's make a deal“ ausgestrahlt. Darin konnte der Kandidat in der Endrunde zwischen drei Türen wählen. Hinter einer war als Hauptgewinn ein Auto versteckt und hinter den beiden anderen jeweils eine Ziege. Nachdem sich der Spielteilnehmer auf ein Tor festgelegt hatte, öffnete der Moderator Monty Hall eines der beiden anderen Tore, wohl wissend, dass sich hinter diesem eine Ziege befand, und bot ihm daraufhin an, auf das andere Tor zu wechseln. Daraus ergab sich die folgende unter dem Namen *Ziegenproblem* bekannt gewordene Aufgabenstellung:
Ist es für den Kandidaten vorteilhaft, auf den Vorschlag des Moderators einzugehen, oder kann er bedenkenlos an seiner Erstwahl festhalten, da die Gewinnwahrscheinlichkeiten nach dem Öffnen einer Tür für die zwei noch geschlossenen Tore identisch sind?

1990 wurde das Problem in die Öffentlichkeit gerückt, als Marilyn vos Savant, die Frau mit dem erwiesenermaßen höchsten Intelligenzquotienten, in ihrer Kolumne „Ask Marilyn“ in der *Parade* behauptete, dass es für den Kandidaten sinnvoller sei, das Tor zu wechseln, da sich dadurch die Wahrscheinlichkeit, einen Gewinn zu erhalten, verdoppele. Dieser Artikel rief eine große Diskussion hervor, die die Nation spaltete. [11, 35, 40, 58, 59]
Die Behauptung von M. vos Savant bescherte ihrer Redaktion eine Flut von Leserbriefen: Einige wenige Leser unterstützten die Initiatorin, doch die Mehrzahl der Diskussionsteilnehmer drückte in den eingegangenen Kommentaren eine gegensätzliche Meinung aus und überschüttete die Autorin mit Spott: „Unsere mathematische Fakultät hat herzlich über Sie gelacht. [...] Es gibt schon genug mathematische Unwissenheit in diesem Land, [...] wir brauchen nicht den höchsten IQ der Welt,

um diese Unwissenheit zu vertiefen. Schämen Sie sich! [...] Vielleicht haben Frauen eine andere Sicht mathematischer Probleme als Männer.“ ([59] S.11f)
Etwa ein Jahr später griff die Zeitschrift „Der Spiegel“ das Problem auf, wobei die Leserschaft auf die These von M. vos Savant zuerst ähnlich überrascht und empört reagierte wie in den Vereinigten Staaten. Bis heute sorgt die Fragestellung immer wieder für Diskussionsstoff in der Öffentlichkeit und in den Medien. [11, 40, 56, *ii*]

Das *Ziegenproblem* ist unter weiteren Namen bekannt geworden: Nach dem Moderator der Fernsehsendung wird es *Monty-Hall-Problem* genannt oder man bezeichnet es einfach als das *Drei-Türen-Problem*.

4.3.2 Die unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit

An der durch den Beitrag von Frau vos Savant entfachten Diskussion beteiligten sich auch angesehene Wissenschaftler, bedeutende Mathematiker sowie Professoren: „Die Antwort, wonach die Mitspielerin die Tür wechseln solle, wurde in den Sitzungssälen der CIA und den Baracken der Golfkrieg-Piloten debattiert. Sie wurde von Mathematikern am Massachusetts Institute of Technology und von Programmierern am Los Alamos National Laboratory in New Mexico untersucht und in über tausend Schulklassen des Landes analysiert.“ ([59] S. 11) Auch der berühmte Mathematikprofessor P. Erdös nahm an der Debatte teil. Er war der festen Überzeugung, dass M. vos Savants Argumentation falsch sei. Dies begründete er dadurch, dass die Gewinnchance der Tür, auf die die Erstwahl des Kandidaten gefallen war, nach dem Öffnen einer Ziegentür durch den Moderator von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ gestiegen sei, da die zwei verbleibenden Tore dieselbe Gewinnwahrscheinlichkeit besäßen. Somit spiele es keine Rolle, ob der Kandidat wechsle oder nicht. Erst eine Computersimulation konnte ihn von der Richtigkeit der Behauptung von M. vos Savant überzeugen. [38, 56, 64]

Etwa 90% der Personen, die sich an der Kontroverse beteiligten, entwickelten intui-

tiv eine ähnliche Fehlvorstellung wie P. Erdös. Es kommt häufig zu einem solchen Fehlschluss, da das *Ziegenproblem* den Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten, die der Intuition oft widersprechen, erfordert. Bei der Bearbeitung des Paradoxons bleibt meistens unberücksichtigt, dass die Wahl des Moderators, welches Tor er öffnet, von der Erstwahl des Kandidaten abhängt. Erdös' Argumentation ist nur dann gerechtfertigt, wenn der Moderator vor Spielbeginn verrät, hinter welcher Tür sich eine Ziege befindet. [74]

Jedoch auch die Erkenntnis, dass es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit handelt, schützt nicht vor folgender falscher Argumentation: Sei A_i, $i = 1, 2, 3$, das Ereignis, das Auto hinter dem i-ten Tor vorzufinden. Da der Hauptgewinn mit gleicher Wahrscheinlichkeit hinter einem der drei Tore versteckt ist und die Mächtigkeit des endlichen Ergebnisraums $\Omega = \{1, 2, 3\}$ drei ist, gilt auf Grund der Gleichverteilung:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass sich der Kandidat auf das Ereignis A_1 festgelegt und der Moderator Tor T_3 geöffnet hat. Folglich kann das Ereignis A_3 nicht eintreten und es muss die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass sich das Auto hinter dem Tor T_1 oder T_2 befindet und nach Voraussetzung nicht hinter dem Tor T_3. Das zuletzt geschilderte Ereignis wird im Folgenden als $\overline{A_3}$ bezeichnet. Dann ergibt sich unter Berücksichtigung der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit (vgl. Satz 3.21 auf Seite 27) für $r = 1, 2$:

$$\begin{aligned} P\left(A_r \mid \overline{A_3}\right) &= \frac{P\left(\overline{A_3} \cap A_r\right)}{P\left(\overline{A_3}\right)} \\ &= \frac{P(A_r)}{P\left(\overline{A_3}\right)} \\ &= \frac{1/3}{2/3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis scheint eindeutig und bekräftigt die Vermutung von P. Erdös und allen Gegnern von M. vos Savant. Bei der Rechnung wird jedoch davon ausgegangen, dass der Moderator zufällig eine der drei Türen öffnet. Dies ist allerdings nicht korrekt, da er nach den Spielregeln die Erstwahl des Kandidaten berücksichtigen muss: Wählt dieser eine Ziegentür aus, so unterliegt die Wahl des Spielleiters nicht mehr dem Zufall, da er dann nur noch die zweite Ziegentür öffnen darf. Somit sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten der verbleibenden Tore von dem Verhalten des Kandidaten abhängig. Daraus folgt, dass die von dem Moderator preisgegebene Information ausschließlich die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung über dem Komplement des von dem Kandidaten ausgewählten Tors beeinflusst und keinesfalls die unbedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge aller möglichen Ereignisse A_i, $i = 1, 2, 3$. [13]

Doch auch die Menschen, die die korrekte Lösung des *Ziegenproblems* kennen, tendieren dazu, ihre Erstwahl beizubehalten. Dieses Phänomen haben Brown und Granberg aus psychologischer Sicht untersucht. Dabei stellten sie fest, dass die Versuchspersonen deutlich enttäuschter reagierten, wenn sie bei ihrer Erstwahl auf die Autotür getippt hatten und danach auf eine Ziegentür wechselten, als wenn sie das Spiel, ohne den Hauptgewinn gewonnen zu haben, beendeten und zu keinem Zeitpunkt auf die Autotür gesetzt hatten. Um dieser Frustration entgegenzuwirken, verließen sich die meisten Versuchsteilnehmer auf ihre erste Vermutung, wohl wissend, dass sie durch einen Wechsel ihre Gewinnchance verdoppeln könnten. [14]

4.3.3 Lösung des Paradoxons

Um das Problem zu lösen, geht man davon aus, dass sich der Kandidat in seiner Erstwahl zufällig auf eines der drei Tore festgelegt hat und somit allen drei Möglichkeiten die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit zukommt. Bezeichnet T_i $(i = 1, 2, 3)$

das Ereignis, dass die Erstwahl auf das i-te Tor gefallen ist, so gilt:

$$P(T_1) = P(T_2) = P(T_3) = \frac{1}{3}$$

Da auch die Platzierung des Hauptgewinns zufällig erfolgt, gilt, wie bei der Erstwahl des Kandidaten, für die Ereignisse A_i $(i = 1, 2, 3)$, das Auto hinter dem i-ten Tor vorzufinden:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Nachdem die Ereignisse A_i und T_i eingetreten sind, öffnet der Moderator nach folgenden Spielregeln eine Tür:

1. Der Moderator darf nicht das Tor öffnen, auf das die Erstwahl des Kandidaten gefallen ist.

2. Der Moderator darf nicht das Tor öffnen, hinter dem sich, wie er weiß, das Auto verbirgt.

Da das Auto vor Spielbeginn willkürlich hinter einem Tor versteckt wird, ist dieses Ereignis unabhängig von der Erstwahl des Kandidaten, so dass das *Ziegenproblem* auf einen zweistufigen Zufallsversuch reduziert werden kann. Die erste Stufe beschreibt die zufällige Platzierung des Autos hinter einem der drei Tore und die zweite das Öffnen einer Ziegentür durch den Moderator (Ereignis M_i, $i = 1, 2, 3$), wobei obige Spielregeln berücksichtigt werden müssen. Wegen der Gleichverteilung der Ereignisse T_i kann dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass sich der Kandidat auf Tor eins festgelegt hat, so dass die Problemstellung durch folgenden Baum verdeutlicht werden kann:

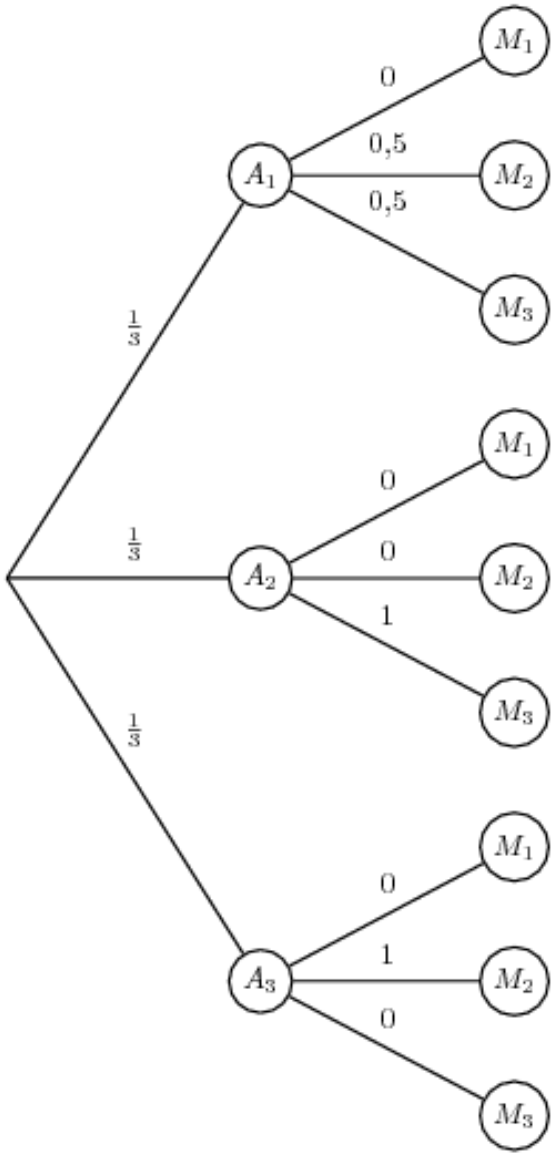

Abbildung 4.12: Baumdiagramm zum *Ziegenproblem*

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit befindet sich das Auto hinter Tor zwei. Der Kandidat hat sich nach wie vor in seiner Erstwahl auf Tor eins festgelegt und beobachtet, dass der Moderator Tor drei öffnet. Um die Richtigkeit der Behauptung von Frau vos Savant zu überprüfen, muss die Wahrscheinlichkeit $P(A_2 \mid M_3)$ dafür berechnet werden, dass das Auto hinter Tor zwei steht und der Kandidat die zuvor beschriebene Beobachtung gemacht hat. Dazu wird der Satz von Bayes

(Satz 3.25 auf Seite 29) verwendet, wobei die bedingten Wahrscheinlichkeiten aus dem Baumdiagramm abgelesen werden können:

$$\begin{aligned} P(A_2 \mid M_3) &= \frac{P(A_2) \cdot P(M_3 \mid A_2)}{\sum_{k=1}^{3} P(A_k) \cdot P(M_3 \mid A_k)} \\ &= \frac{P(A_2) \cdot P(M_3 \mid A_2)}{P(A_1) \cdot P(M_3 \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(M_3 \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(M_3 \mid A_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Somit entspricht die Behauptung von M. vos Savant dem mathematischen Ergebnis der Aufgabe. [11, 27, 59]

4.3.4 Didaktischer Kommentar

Die sinnvolle Einbettung des *Ziegenproblems* in den Unterrichtsverlauf setzt voraus, dass die Schüler im Umgang mit Baumdiagrammen, Laplace Modellen, relativen Häufigkeiten und bedingten Wahrscheinlichkeiten geschult sind. Anhand des Paradoxons können dann die totale Wahrscheinlichkeit und danach die Bayes'sche Regel eingeführt werden.

Nach der Konfrontation der Schüler mit dem Problem wird ein großer Teil der Lernenden erfahrungsgemäß die Meinung vertreten, dass es keine Rolle spiele, ob der Kandidat auf das verbleibende Tor wechsle oder seine Erstwahl beibehalte. Fordert der Lehrer die Lernenden auf, ihre Vermutungen zu begründen, so ist er in der Lage, anhand der Argumente der Schüler zu erkennen, ob diese angemessene Intuitionen zu dem Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeiten und damit verbunden auch zu dem der stochastischen Unabhängigkeit ausgebildet haben. [82]

Um die unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit zu erkennen, kann anschließend das Problem beispielsweise nachgespielt werden: Die Klasse wird in Zweiergruppen

unterteilt, in denen ein Schüler die Rolle des Moderators und ein zweiter die des Kandidaten übernimmt. Die Tore werden durch drei Becher dargestellt. Unter einem versteckt der Spielleiter einen Gegenstand, während die beiden anderen leer bleiben. Daraufhin nennt der Kandidat seine Erstwahl. Der Moderator deckt nach den Spielregeln einen leeren Becher auf und bietet dem Kandidaten danach die Möglichkeit, auf den verbleibenden Becher zu wechseln. Der Spielteilnehmer gewinnt, wenn unter dem Becher seiner endgültigen Wahl der Gegenstand versteckt ist. Dieses Spiel wird mehrmals durchgeführt. Die Schüler legen eine Statistik an, ob der Kandidat das Spiel siegreich beendet, wenn er auf den Vorschlag des Moderators eingeht oder seine Erstwahl beibehält. Dadurch geht jeder Spieldurchgang in die Statistik ein. Spielt jede Zweiergruppe 20 Partien, erhält man bei einer Klassenstärke von 30 Schülern bereits 300 Ergebnisse. Ausgehend von den relativen Häufigkeiten können mit Hilfe des *empirischen Gesetzes für große Zahlen* (vgl. Bemerkung 3.17 auf Seite 23) schon erste Vermutungen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung angestellt werden. [40, 58]
Eine Alternative zu dem Spiel liefert die folgende Simulation, die auf die unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit aufmerksam macht. Dabei müssen die Schüler lediglich die Anzahl n der zu simulierenden Durchgänge angeben.

```
> Ziege:=proc(n)
> local au, auto, erfolg_bleiben, erfolg_wechseln,
  erst, erstwahl, tor, torauf, wechs, wechseln, i, j;
```

Nachdem alle verwendeten Variablen deklariert worden sind, werden nun die beiden Zähler „erfolg_ bleiben“ und „erfolg_wechseln“ auf Null gesetzt. Sie geben am Ende der Simulation an, in wie vielen Fällen der Kandidat erfolgreich das Spiel beendet, wenn er einerseits seine Erstwahl beibehält und andererseits seine Meinung revidiert.

```
> erfolg_bleiben:=0;
```

```
> erfolg_wechseln:=0;
> auto:=array(1..n);
> erstwahl:=array(1..n);
> torauf:=array(1..n);
```

Nun werden für alle $i = 1, \ldots, n$ drei Zufallszahlen aus der Menge $\{1, 2, 3\}$ erzeugt. Die erste („auto“) versteckt das Auto zufällig hinter einem der drei Tore, die zweite („erstwahl“) teilt dem Kandidaten in seiner Erstwahl eine der Türen zu und die dritte („torauf“) bestimmt das zu öffnende Tor.

```
> for i from 1 to n do
>   au:=rand(1..3);
>   erst:=rand(1..3);
>   tor:=rand(1..3);
>   auto[i]:=seq(au(), j=1);
>   erstwahl[i]:=seq(erst(), j=1);
>   torauf[i]:=seq(tor(), j=1);
```

Es besteht jetzt allerdings die Möglichkeit, dass, verbotenerweise, das zu öffnende Tor dem der Erstwahl des Kandidaten oder der Autotür entspricht. Daher muss nun überprüft werden, ob die Zufallszahl “torauf“ einer der beiden anderen gleicht. Ist dies der Fall, so wird so lange eine neue Zufallszahl angegeben, bis es zu keinem Regelverstoß mehr kommt.

```
>   while torauf[i]=auto[i] or torauf[i]=erstwahl[i] do
>     torauf[i]:=seq(tor(), j=1);
>   od;
> od;
> wechseln:=array(1..n);
```

Nun wird für alle $i = 1, \ldots, n$ eine weitere Zufallszahl aus der Menge $\{0, 1\}$ erzeugt. Die Eins impliziert, dass der Kandidat sich für das verbleibende Tor entscheidet, die

Null demgegenüber, dass er bei seiner Erstwahl bleibt. Nach der Überprüfung, welche Strategie zum Erfolg führt, wird dementsprechend der Zähler „erfolg_bleiben“ oder alternativ „erfolg_wechseln“ um eins erhöht.

```
> for i from 1 to n do
>   wechs:=rand(0..1);
>   wechseln[i]:=seq(wechs(), j=1);
>   if wechseln[i]=1 then
>     if auto[i]<>erstwahl[i] then
>       erfolg_wechseln:=(erfolg_wechseln+1);
>       else
>       erfolg_bleiben:=(erfolg_bleiben+1);
>     fi;
>     else
>     if auto[i]=erstwahl[i] then
>       erfolg_bleiben:=(erfolg_bleiben+1);
>       else
>       erfolg_wechseln:=(erfolg_wechseln+1);
>     fi;
>   fi;
> od;
> print(‘Anzahl der Erfolge ohne wechseln ‘,erfolg_bleiben);
> print(‘Anzahl der Erfolge mit wechseln  ‘,erfolg_wechseln);
> end;
```

Die Simulation gibt an, in wie vielen Fällen die beiden verschiedenen Strategien zum Erfolg führen. Wie bei dem Spiel entspricht die Summe der beiden Zähler stets der Gesamtzahl der Versuchsdurchführungen. Beispielsweise hat die Wechselstrategie bei 10000 Durchführungen des Paradoxons 6756 mal zum Erfolg geführt, so dass der Kandidat, der stets seine Erstwahl beibehält, in nur 3244 Fällen das Spiel siegreich beendet hat.

Anhand der Spielstrategie erkennen die Lernenden, dass der Kandidat, wenn er nicht auf den Vorschlag des Moderators eingeht, wegen der Gleichverteilung in $\frac{1}{3}$ aller Fälle den Preis gewinnt. Damit muss der Spielteilnehmer, wenn er auf das verbleibende Tor wechselt, in $\frac{2}{3}$ aller Fälle das Spiel siegreich beenden, so dass einem Kandidaten, der immer wechselt, die doppelte Gewinnwahrscheinlichkeit zukommt. [59]
Nachdem die Schüler die für sie unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeit erkannt haben, muss nun deren Ursache mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie begründet werden. Dazu kann es hilfreich sein, die möglichen Spielausgänge wie folgt tabellarisch aufzulisten:

Erstwahl	Moderator öffnet	Reaktion	Resultat	Gewinn?	P(Gewinn)
Auto	Ziege 1; 2	wechseln	Ziege 2; 1	nein	$\frac{2}{3}$
Ziege 1	Ziege 2	wechseln	Auto	ja	
Ziege 2	Ziege 1	wechseln	Auto	ja	
Auto	Ziege 1; 2	bleiben	Auto	ja	$\frac{1}{3}$
Ziege 1	Ziege 2	bleiben	Ziege 1	nein	
Ziege 2	Ziege 1	bleiben	Ziege 2	nein	

Tabelle 4.6: Mögliche Spielverläufe bei dem *Ziegenproblem* [18]

Die Tabelle führt den Schülern vor Augen, wie die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten entstehen. Damit sollten auch die letzten Zweifler überzeugt sein, dass der Kandidat durch Wechseln des Tors seine Gewinnwahrscheinlichkeit verdoppelt. An dieser Stelle kann die Besprechung des Paradoxons bereits abgebrochen werden, da die Schüler auf anschauliche Weise die Aufgabe gelöst haben.
Soll das Problem mathematisch vertieft werden, so kann die obere Hälfte der Tabelle in folgendes dreistufiges Baumdiagramm übertragen werden:

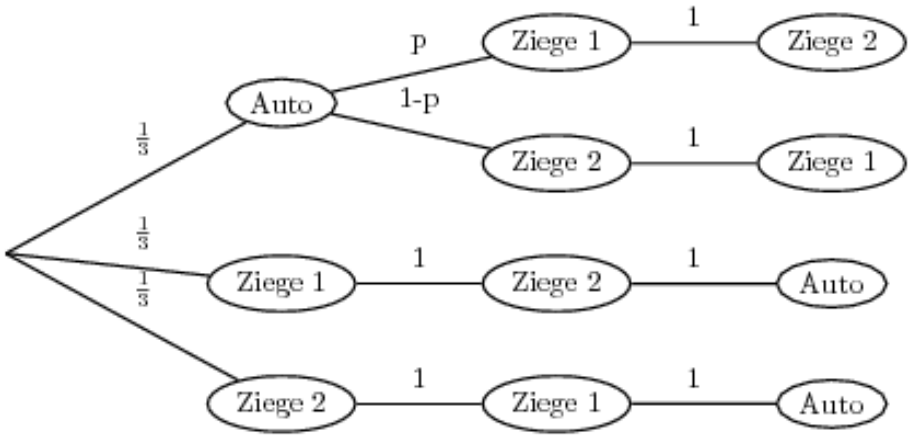

Abbildung 4.13: Baumdiagramm zur Veranschaulichung des *Ziegenproblems*. [34]

Die erste Stufe beschreibt die Erstwahl des Kandidaten, bei der er sich zufällig auf eines der drei Tore festlegt. Die zweite Stufe gibt an, welche Möglichkeiten, eine Tür zu öffnen, dem Moderator bleiben, wobei die Übergangswahrscheinlichkeiten nur teilweise bekannt sind. Die dritte Stufe beschreibt das Resultat, nachdem sich der Kandidat umentschieden hat. Da in diesem Falle jeweils nur eine Möglichkeit bleibt, sind alle Übergangswahrscheinlichkeiten identisch eins. Auch die untere Hälfte der Tabelle kann in ein analoges Baumdiagramm übertragen werden. Mit Hilfe der Produktregel (vgl. Satz 3.13 auf Seite 37) können aus dem Baum die Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit im Falle des Umwählens wie folgt berechnet werden:

$$P\,(\text{Gewinn}) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3} \tag{4.17}$$

$$P\,(\text{Verlust}) = \frac{1}{3} \cdot p \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (1-p) \cdot 1 = \frac{1}{3} \tag{4.18}$$

[18, 27, 34, 43]

Diese Gleichungen lassen sich mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten ausdrücken: Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(G)$, das Auto zu gewinnen, nachdem der Kandidat das Tor gewechselt hat. Offensichtlich ist die Gewinnwahrscheinlichkeit $P\,(G \mid A)$, wenn der Kandidat bei seiner Erstwahl auf die Autotür getippt hat, gleich null. Dieses Resultat geht aus den letzten beiden Stufen der zwei

obersten Äste hervor. Wählt der Kandidat dagegen in seiner Erstwahl ein Ziegentor aus, so gewinnt er nach dem Wechseln mit Sicherheit das Auto. Also gilt: $P(G \mid Z_1) = P(G \mid Z_2) = 1$. Diese Wahrscheinlichkeiten können aus den beiden letzten Stufen der unteren Hälfte des Baumes entnommen werden. Um die Gewinnwahrscheinlichkeit zu berechnen, muss jede dieser bedingten Wahrscheinlichkeiten mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit der ersten Stufe multipliziert werden. Nach der Addition dieser Produkte ergibt sich nun Formel 4.17:

$$\begin{aligned} P(G) &= 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \\ &= P(G \mid A) \cdot P(A) + P(G \mid Z_1) \cdot P(Z_1) + P(G \mid Z_2) \cdot P(Z_1) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis entspricht der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit (vgl. Satz 3.24 auf Seite 29) für $n = 3$. [27, 43]

Alternativ kann gezielt nach der Wahrscheinlichkeit $P(A_2 \mid M_3)$ gefragt werden, dass sich das Auto hinter Tor T_2 befindet, wobei der Moderator, nachdem sich der Kandidat auf Tor T_1 festgelegt hatte, Tor T_3 öffnete. Dazu wird das in Kapitel 4.3.3 dargestellte Baumdiagramm benötigt. In einem ersten Schritt findet die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit (vgl. Definition 3.21 auf Seite 27) Anwendung:

$$P(A_2 \mid M_3) = \frac{P(M_3 \cap A_2)}{P(M_3)}$$

Aus dem Baumdiagramm wird entnommen, dass der Nenner der zuvor definierten totalen Wahrscheinlichkeit entspricht. Auf den Zähler wird erneut die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit angewandt:

$$\begin{aligned} P(M_3 \cap A_2) &= P(A_2 \cap M_3) \\ &= P(M_3 \mid A_2) \cdot P(A_2) \end{aligned}$$

Damit ist für dieses Beispiel die Formel von Bayes (vgl. Satz 3.25 auf Seite 29) hergeleitet worden und kann nun im weiteren Unterrichtsgeschehen verallgemeinert werden. [20, 22, 82]

Dieses Vorgehen zeigt, wie das *Ziegenproblem* dazu genutzt werden kann, durch geeignetes Modellieren mathematische Theorien zu entwickeln.

Um die Schüler zum Weiterdenken anzuregen, kann beispielsweise das ursprüngliche *Ziegenproblem* durch folgende Aufgabe erweitert werden, die auch ohne Kenntnis der Bayes'schen Regel durch logisches Schließen gelöst werden kann:
Der Fernsehsender muss auf Grund von Sparmaßnahmen die Gewinnwahrscheinlichkeit reduzieren. Wie kann dies gelingen?
Es ist nahe liegend, die Anzahl der Ziegentore bei unveränderten Spielregeln zu erhöhen: Der Moderator öffnet so lange eine Ziegentür, bis nur noch das von dem Kandidaten gewählte Tor und ein weiteres verschlossen sind, und bietet ihm jedes Mal an, eine andere Tür auszuwählen.
Wird das Spiel beispielsweise mit zehn Türen durchgeführt, wählt der Kandidat bei dieser Spielvariante bei seiner Erstwahl das Autotor mit der im Vergleich zum ursprünglichen *Ziegenproblem* niedrigeren Wahrscheinlichkeit von 0,1 aus. Geht der Kandidat erst dann auf das Angebot des Moderators ein, nachdem dieser acht der neun Ziegentüren geöffnet hat, so erhöht der Spielteilnehmer nach denselben Überlegungen wie bei dem ursprünglichen *Ziegenproblem* seine Gewinnwahrscheinlichkeit von 0,1 auf 0,9. Demnach erfüllt dieser Lösungsvorschlag nicht den gewünschten Zweck. [18, 40, 74]
Um der Aufgabenstellung gerecht zu werden, muss sowohl die Anzahl der Türen als auch die Anzahl der Gewinne erhöht werden. Dabei müssen entweder gleich viele Autos wie Ziegen oder mehr Nieten als Gewinne im Spiel sein. Sei die Anzahl der Autos n und die der Ziegen $(n+1)$. Erneut darf der Kandidat seine Erstwahl treffen. Daraufhin öffnet der Moderator $(n-1)$ Auto- und n Ziegentore, wobei die Tür, auf die die Erstwahl des Kandidaten gefallen ist, bis zum Ende verschlossen bleiben muss. Betrachtet man beispielsweise vier Tore, hinter denen zwei Ziegen und zwei Autos versteckt sind, so öffnet der Spielleiter sowohl eine Auto- als auch eine Ziegentür. Dann kann das Spiel folgende Ausgänge nehmen:

Erstwahl	Moderator öffnet	Reaktion	Resultat	Gewinn?	P(G)
Auto 1	Ziege 1 od. 2 und Auto 2	wechseln	Ziege 2; 1	nein	$\frac{2}{4}$
Auto 2	Ziege 1 od. 2 und Auto 1	wechseln	Ziege 2; 1	nein	
Ziege 1	Ziege 2 und Auto 1 od. 2	wechseln	Auto 2; 1	ja	
Ziege 2	Ziege 1 und Auto 1 od. 2	wechseln	Auto 2; 1	ja	
Auto 1	Ziege 1 od. 2 und Auto 2	bleiben	Auto 1	ja	$\frac{2}{4}$
Auto 2	Ziege 1 od. 2 und Auto 1	bleiben	Auto 2	ja	
Ziege 1	Ziege 2 und Auto 1 od. 2	bleiben	Ziege 1	nein	
Ziege 2	Ziege 1 und Auto 1 od. 2	bleiben	Ziege 2	nein	

Tabelle 4.7: Mögliche Spielverläufe bei dem „erweiterten“ *Ziegenproblem* [18]

In diesem Spezialfall ist es demnach egal, ob der Kandidat seine Erstwahl beibehält oder auf das verbleibende Tor wechselt. [18]

Um sowohl die erlernten Theorien zu vertiefen als auch zu überprüfen, ob die Schüler angemessene Grundvorstellungen ausgebildet haben, können weitere stochastische Paradoxa bearbeitet werden. Auch bei diesen Aufgaben ist es nicht erforderlich, die Formel von Bayes anzuwenden. Vielmehr können die Probleme durch den gesunden Menschenverstand gelöst werden.

4.3.4.1 Das Gefangenenproblem

1959 präsentierte M. Gardner das so genannte *Gefangenenproblem*: Anton, Bernd und Xaver sind drei zum Tode verurteilte Gefangene, die erfahren, dass der König einen von ihnen begnadigen wird. Der Wärter weiß, welcher der Straftäter dem Tode entgehen wird, darf diese Information jedoch unter keinen Umständen weitergeben. Daher bittet Anton ihn, ihm den Namen eines Mitgefangenen zu nennen, der mit Sicherheit getötet werden wird. Nach kurzem Überlegen kommt der Wärter zu dem Schluss, dass Anton durch seine Mitteilung keine Information über den

Begnadigten erhalte, und teilt ihm mit, dass Bernd mit Sicherheit das Gefängnis nicht lebend verlassen werde. Daraufhin überlegt sich Anton, dass seine eigene Überlebenswahrscheinlichkeit nun von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ gestiegen sei. Liegt Anton mit seiner Vermutung richtig? [4, 43, 74, 80]

Dieses Problem ist analog zu dem *Ziegenproblem* aufgebaut, so dass auch hier die meisten Menschen davon ausgehen, dass Antons Vermutung korrekt ist. Jedoch handelt es sich hierbei ebenfalls um einen Trugschluss. Wie bei dem *Drei-Türen-Problem* gibt es zwei Nieten, die Todesurteile, sowie einen Gewinn, die Begnadigung. Die Information, die der Wärter preisgibt, hängt davon ab, welchem der drei Gefangenen er sie mitteilt. Dadurch ergeben sich verschiedene Übergangswahrscheinlichkeiten, so dass durch die Indiskretion des Wächters Antons Wahrscheinlichkeit, begnadigt zu werden, bei $\frac{1}{3}$ bleibt. Folglich beträgt nun Xavers Überlebenswahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$. Diese Wahrscheinlichkeiten können wieder mit Hilfe der Bayes'schen Formel berechnet und aus folgendem Baumdiagramm entnommen werden. Die erste Stufe gibt an, welcher der Gefangenen begnadigt wird. Die zweite Stufe zeigt auf, welche Möglichkeiten dem Wärter bleiben, Anton einen Gefangenen, der hingerichtet wird, zu nennen. [18, 19, 25, 26, 44, 62, 72, 80]

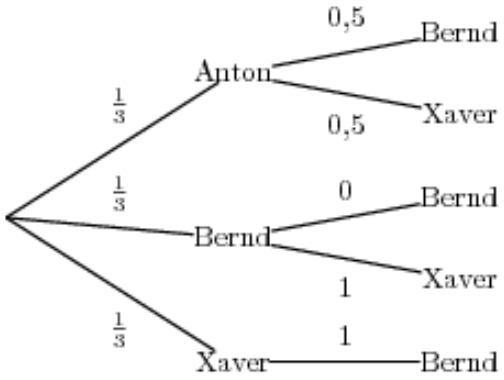

Abbildung 4.14: Baumdiagramm zum Gefangenenproblem

4.3.4.2 Das Bertrand'sche Kästchenproblem

Eine sehr alte Variante des *Ziegenproblems* geht auf den französischen Mathematiker Joseph Bertrand zurück. Er formulierte bereits 1889 das nach ihm benannte *Bertrand'sche Kästchenproblem*:
Es werden drei zweigeteilte Schubladen betrachtet, in denen in jedem Fach eine Münze liegt. In einer Schublade befindet sich in jedem Teil eine Goldmünze (GG), in einer zweiten je eine Silbermünze (SS) und in der dritten ist in dem einen Fach eine Gold- und in dem anderen eine Silbermünze (GS) versteckt.

1. Schublade:	Goldmünze	Goldmünze
2. Schublade:	Silbermünze	Goldmünze
3. Schublade:	Silbermünze	Silbermünze

Abbildung 4.15: Veranschaulichung des *Bertrand'schen Kästchenproblems* [18]

Zufällig wird eine der Schubladen bis zur Hälfte herausgezogen und eine Goldmünze kommt zum Vorschein. Dadurch ergibt sich die Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich auch in dem zweiten Fach eine Goldmünze befindet? [15, 16, 62, 74]
Auch dieses Paradoxon führt immer wieder zu Verwirrung, da die Allgemeinheit fälschlicherweise davon ausgeht, dass sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Goldmünze oder eine Silbermünze in dem zweiten Fach der Schublade befindet. Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit muss bedacht werden, dass den Ereignissen GG und GS unter Berücksichtigung der angestellten Beobachtung keine Laplace Verteilung zu Grunde liegt, was aus folgender Abbildung ersichtlich wird:

nicht sichtbares Fach	sichtbares Fach	
Silbermünze	Goldmünze	GS Schublade
Goldmünze	Goldmünze	GG Schublade, 1. Variante
Goldmünze	Goldmünze	GG Schublade, 2. Variante

Abbildung 4.16: Überblick über die Möglichkeiten beim *Bertrand'schen Kästchenproblem*

Aus der Abbildung geht hervor, dass in zwei von drei Fällen in dem zweiten Fach eine Goldmünze liegt.
Soll dieses Problem mit Hilfe der Bayes'schen Formel gelöst werden, so muss berücksichtigt werden, dass zu Beginn eine der drei Schubladen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ herausgezogen wird. Da sich in dem dann einsehbaren Fach eine Goldmünze befindet, scheidet die Schublade mit den beiden Silbermünzen aus. Die GS Schublade führt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 zu der Beobachtung und die GG Schublade mit einer Wahrscheinlichkeit von 1. Damit ist es doppelt so wahrscheinlich, dass sich in dem zweiten Fach eine weitere Gold- und keine Silbermünze befindet. [4, 16, 59, 62]

4.3.4.3 Das Problem der Schiffbrüchigen

Diese Aufgabenstellung geht auf Dr. B. Sabzevari, einen Mitarbeiter des Instituts für theoretische Physik der Universität Düsseldorf, zurück. Es handelt sich hierbei um kein stochastisches Paradoxon im eigentlichen Sinne. Wird es jedoch sinnvoll in den Unterrichtsverlauf eingebettet, so dient es dem Lehrer zur Überprüfung des Leistungsstandes: Er kann feststellen, ob die Schüler angemessene Intuitionen bezüglich bedingter Wahrscheinlichkeiten ausgebildet haben oder lediglich auswendig gelernte Formeln sinnlos anwenden.

Drei gekenterte Seeleute, Franz, Gustav und Hans, treiben seit Wochen hilflos auf hoher See. Als der Proviant aufgebraucht ist, beschließen sie auszulosen, wer sich den beiden anderen als Speise opfern muss. Dazu steckt Franz drei Streichhölzer in die Hand: zwei lange und ein kurzes. Nachdem sich Hans ohne Beschränkung der Allgemeinheit in Gedanken auf Streichholz Nummer eins festgelegt hat, zieht Gustav Nummer drei, eines der beiden langen. Soll Hans seine Wahl überdenken?

Diese Aufgabenstellung scheint der des *Ziegenproblems* zu gleichen, mit dem Unterschied, dass hier zwei Gewinne und nur eine Niete vorhanden sind. Nach der ausführlichen Besprechung des *Monty-Hall-Problems* werden daher die Schüler, die noch keine geeigneten Grunderfahrungen zu dem Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeiten gesammelt haben, davon ausgehen, dass Hans durch Beibehalten seiner Erstwahl seine Überlebenschance verdoppeln könnte. Um ihre falsche Vermutung zu rechtfertigen, könnten die Lernenden folgendes Baumdiagramm, das dem des *Ziegenproblems* entspricht, vorschlagen:

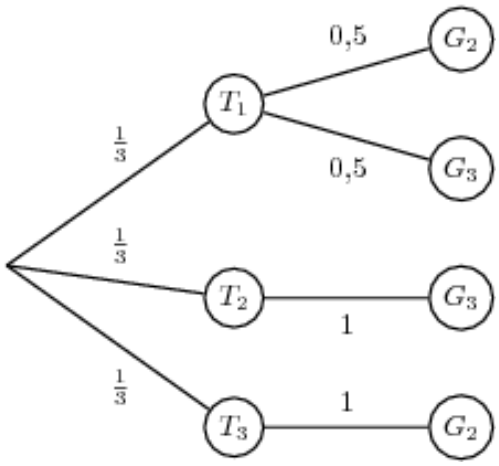

Abbildung 4.17: Baumdiagramm zum Problem der Schiffbrüchigen

Die erste Stufe beschreibt das Ereignis T_i $(i = 1, 2, 3)$, dass das Ziehen des i-ten Streichholzes den sicheren Tod bedeutet. Nun wird vorausgesetzt, dass sich Hans in seiner Erstwahl auf Streichholz Nummer eins festgelegt hat. Dann verdeutlicht die zweite Stufe des Baums die Möglichkeiten, die Gustav scheinbar bleiben, ein

Streichholz zu ziehen.

Laut Aufgabenstellung hat sich Gustav auf das Holz Nummer drei festgelegt, so dass nur noch der zweite und der dritte Ast von Bedeutung wären. Ist Hans' Erstwahl auf Streichholz Nummer eins gefallen, so geht mit Hilfe der Pfadmultiplikationsregel aus dem Baum hervor, dass er durch Wechseln auf das verbleibende Holz seine Überlebenswahrscheinlichkeit halbieren würde.

Bei diesen Überlegungen handelt es sich allerdings um einen Trugschluss:

Im Gegensatz zu dem *Ziegenproblem* ist Gustavs Wahl weder von der Verteilung der Streichhölzer noch von Hans' Erstwahl abhängig. Er kann sich mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ auf eines der drei Streichhölzer festlegen. Damit ist das oben vorgestellte Baumdiagramm falsch: Hans erhält durch Gustavs Wahl keine neuen Informationen darüber, welches Streichholz er ziehen soll, um seine Überlebenschance zu steigern, so dass die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht korrekt sind. Also hat Hans, unabhängig davon, welches Streichholz er zieht, eine 50-prozentige Überlebenswahrscheinlichkeit. [59]

Biographien

Abbildung 1: Bayes [a]

Bayes, Thomas:

* 1702 in Paris, † 17.04.1761 in Tunbridge Wells (Kent); er arbeitete in erster Linie als presbyterianischer Geistlicher. Bayes veröffentlichte nur zwei Arbeiten. Seine für die Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr bedeutungsvollen Forschungsergebnisse sind erst nach seinem Tode bekannt geworden. [a, 15, 30]

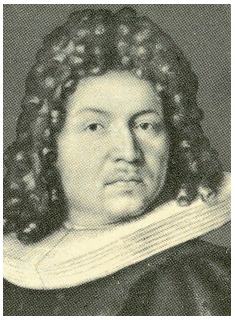

Abbildung 2: Bernoulli, Ja. I [49]

Bernoulli, Jakob I:

* 27.12.1654 in Basel, † 16.08.1705 in Basel; er war der erste Gelehrte in der für die Mathematik sehr bedeutenden Familie der Bernoulli. Er studierte Theologie und autodidaktisch Mathematik. Ab 1682 widmete er sich ausschließlich der Mathematik und der Physik. 1687 wurde er Mathematikprofessor in Basel. Angeregt von Huygens' Studien befasste er sich ab 1685 mit den Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Auf ihn geht das Gesetz der großen Zahlen zurück. Er zählt zu den Begründern der Variationsrechnung sowie der Wahrscheinlichkeitstheorie. [1, 30, 48, 49]

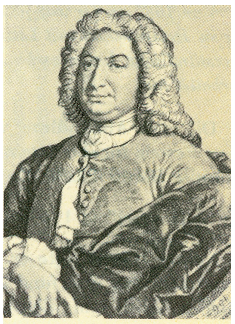

Abbildung 3: Bernoulli, Jo. I [49]

Bernoulli, Johann I:

* 06.08.1667 in Basel, † 01.01.1748 in Basel; er gehörte der für die Mathematik sehr bedeutenden Familie der Bernoulli an. Ab 1685 studierte Johann I an der Universität Basel Medizin. Sein älterer Bruder Jakob I führte ihn in die Mathematik ein. Gemeinsam beschäftigten sie sich mit der Infinitesimalrechnung. Ab 1695 war Johann I im niederländischen Groningen tätig, bis er 1705 die Nachfolge seines älteren Bruders als Mathematikprofessor in Basel antrat. [1, 30, 48, 49]

Bernoulli, Nicolaus I:

* 10.10.1687 in Basel, † 29.11.1759 in Basel; seine beiden Onkel Jakob I und Johann I unterrichteten ihn. Nachdem er 1709 sein Juraexamen abgelegt hatte, unternahm er viele Reisen, auf denen er mit einigen bedeutenden Mathematikern in Kontakt trat. Ab 1716 war er als Mathematikprofessor in Padua tätig bis er 1722 in Basel zuerst eine Professur für Logik und später für Jura annahm. Er beschäftigte sich insbesondere mit der Analysis. [30, 49]

Abbildung 4: Bertrand [b]

Bertrand, Joseph:

* 11.3.1822 in Paris, † 03.04.1900 in Paris; 1839 promovierte er. Ab 1856 war Bertrand als Professor an der Ecole Normale Superieure und später am Collège de France tätig. Er beschäftigte sich insbesondere mit der Arithmetik, der Algebra und der Thermodynamik. Im Bereich der Stochastik beschrieb er unter anderem die „Bertrand'schen Paradoxa". [b, 15, 49]

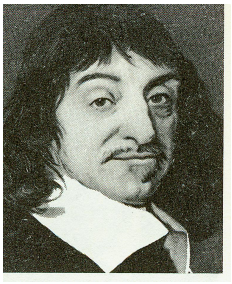

Abbildung 5: Descartes [*i*]

Descartes, René:

* 31.03.1596 in La Haye (Touraine), † 11.02.1650 in Stockholm; er studierte Jura. Während seiner Militärzeit lernte er einen deutschen Mathematiker kennen, der sein Interesse auf die Physik und die Mathematik lenkte, mit der er sich ab 1625 intensiv auseinander setzte. Sein ursprüngliches Ziel war es, eine geometrische Lösung für algebraische Probleme zu finden. Er gilt als einer der Entwickler der analytischen Geometrie. Auf ihn geht das kartesische Koordinatensystem zurück. Neben seinen mathematischen Tätigkeiten beschäftigte er sich noch intensiv mit der Philosophie. [1, 30, 48, 49]

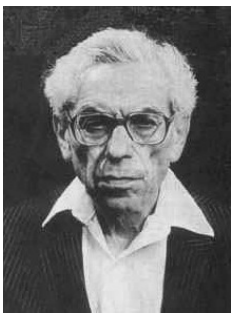

Abbildung 6: Erdös [c]

Erdös, Paul:

* 26.03.1913 in Budapest, † 20.09.1996 in Warschau; 1934 promovierte Erdös an der Universität Budapest. In seinen zahlreichen Arbeiten beschäftigte er sich mit Problemen der Zahlen-, der Wahrscheinlichkeits- und der Mengentheorie sowie der Kombinatorik. Er war weniger an den Theorien, die der Mathematik zu Grunde liegen, sondern vielmehr an den Lösungen mathematischer Probleme interessiert. [c, 30, 38]

Euler, Leonhard:

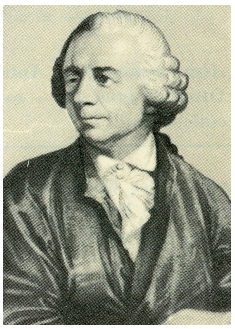

Abbildung 7: Euler [49]

* 15.04.1707 in Basel, † 18.09.1783 in St. Petersburg; ab 1720 studierte er an der philosophischen und theologischen Fakultät der Universität Basel zunächst Theologie. Mathematikvorlesungen von Johann I Bernoulli weckten in ihm das Interesse an der Mathematik, so dass er bald sein Mathematikstudium aufnahm. Als Professor lehrte er an der St. Petersburger Akademie ab 1731 Physik und ab 1733 auch Mathematik. Zwischen 1741 und 1766 war er an der Berliner Akademie tätig. Ab 1766 lebte er bis zu seinem Tode wieder in St. Petersburg. Insbesondere beschäftigte er sich mit der Analysis, aber auch in den anderen Teilgebieten der Mathematik sowie der Physik kam er zu bedeutenden Resultaten. Auf ihn gehen unter anderem die Zahlen e und i zurück. [1, 30, 49]

Fermat, Pierre de:

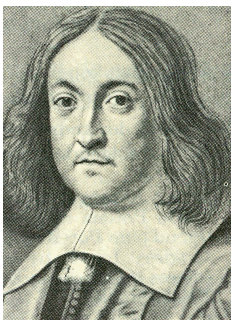

Abbildung 8: Fermat [49]

* 20.08.1601 in Beaumont-de-Lomagne, † 12.01.1665 in Castres; von 1620 bis 1631 studierte er Jura. In seiner Freizeit beschäftigte er sich mit der Mathematik, so dass er als Autodidaktiker zu betrachten ist. Neben R. Descartes ist er einer der Mitentwickler der analytischen Geometrie. Er gilt als einer der Wegbereiter der modernen Analysis. Seine für die Mathematik besonders bedeutsamen Leistungen liegen im Bereich der Zahlentheorie. In der Wahrscheinlichkeitstheorie stellte er sich zusammen mit B. Pascal den Problemen des Glücksspiels, auf die ihn Montmort aufmerksam gemacht hatte. [30, 48, 49]

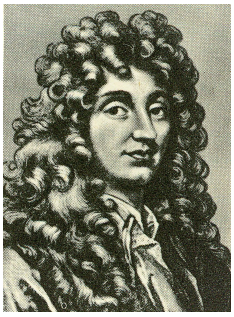

Abbildung 9: Huygens [49]

Huygens, Christiaan:

* 14.04.1629 in Den Haag, † 08.07.1695 in Den Haag; neben seinem Studium der Rechtswissenschaften besuchte er Mathematikvorlesungen. In erster Linie war er Physiker, aber er zählte auch zu den Mitbegründern der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dazu veröffentlichte er unter anderem ein Buch über Würfelspiele. [30, 49]

Abbildung 10: Lambert [d]

Lambert, Johann Heinrich:

* 26.08.1728 in Mühlhausen, † 25.09.1777 in Berlin; er bildete sich autodidaktisch in verschiedenen Naturwissenschaften, Mathematik, Astronomie und Philosophie fort. Ab 1748 arbeitete er als Hauslehrer und begleitete seine Schüler auf verschiedene Reisen, unter anderem auch nach Berlin. 1765 wurde er dort Mitglied der Akademie der Wissenschaften. Auf Grund seiner Arbeiten zum Parallelenpostulat zählt er zu den Begründern der nichteuklidschen Geometrie. Mit Hilfe seiner Entwicklung der Funktionen Tangens und Tangens hyperbolicus in Kettenbrüche führte er den ersten Beweis, dass die Zahl π irrational ist. [d, 30, 35, 49]

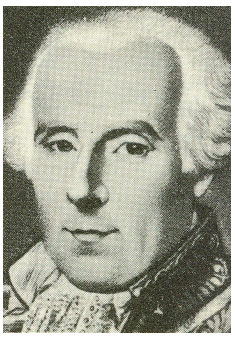

Abbildung 11: Laplace [49]

Laplace, Pierre Simon:

* 28.03.1749 in Beaumont-en-Auge, † 05.03.1827 in Paris; insbesondere beschäftigte er sich mit der mathematischen Physik. Seine ersten wissenschaftlichen Arbeiten, die sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung befassten, erschienen zwischen 1766 und 1769. Ab 1794 arbeitete er als Professor der Mathematik an der Ecole Polytechnique. 1812 erschien die „Théorie analytique des probabilités“, eine geschlossene Darstellung des bis dahin bekannten Wissens über die Wahrscheinlichkeitstheorie. [1, 30, 48, 49]

Abbildung 12: Méré [15]

Méré, Antoine Gombault Chevalier de:

* .03/04.1607 in Manoir Méré, † 29.12.1684 auf Schloss Beaussaix (Deuy-Sèvres); er stand mit verschiedenen Mathematikern (zum Beispiel Pascal) im Kontakt. Méré beschäftigte sich intensiv mit Glücksspielen, deren Probleme den Anstoß für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gaben. [30]

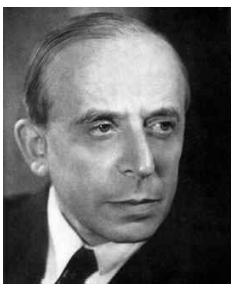

Abbildung 13: Mises [e]

Mises, Richard Edler von:

* 19.04.1883 in Lemberg, † 14.07.1953 in Boston; bis 1908 studierte und promovierte er an der Technischen Hochschule Wien. 1908 habilitierte er in Brünn. Ab 1909 arbeitete er als Professor unter anderem in Straßburg und Berlin, wo er das Institut für Angewandte Mathematik gründete und leitete. 1939 wechselte er an die Harvard Universität. R. Mises beschäftigte sich insbesondere mit allen Teilgebieten der angewandten Mathematik. Er entwickelte einen häufungstheoretischen Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. [e, 15, 30, 49]

Montmort, Pierre Rémond de:

* 27.10.1678 in Paris, † 07.10.1719 in Paris; er absolvierte ein Studium der Rechte. Die Mathematik erlernte er im Selbststudium. Ab 1706 beschäftigte er sich, angeregt von Fermat und Pascal, mit der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dazu veröffentlichte er 1708 sein „Essay d'analyse sur les jeux de hasard". Er erwähnte als Erster die negative Binominialverteilung. [30, 35]

Pascal, Blaise:

* 19.06.1623 in Clermont-Ferrand, † 19.08.1662 in Paris; er wurde von seinem Vater unterrichtet, der darauf bedacht war, jegliche Mathematik von seinem Sohn fern zu halten. Dennoch wurde im Alter von 12 Jahren Pascals Interesse an der Mathematik geweckt, als er sich eigenständig die Grundlagen der Geometrie erarbeitete. Bis zum Alter von 23 Jahren beschäftigte er sich intensiv mit der Mathematik und entwickelte in diesem Zeitraum zusammen mit Fermat die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Anstoß für seine Ausführungen waren die Überlegungen des Chevaliers de Méré zu Glücksspielen. 1642 stellte er die ersten Versuche an, eine Rechenmaschine zu bauen. Nachdem sein Interesse über einige Jahre in erster Linie der Physik und der Theologie galt, wandte er sich erst gegen Ende der 50 Jahre des 17. Jahrhunderts wieder der Mathematik zu. Bis zu seinem Tode beschäftigte er sich unter anderem mit der Infinitesimalrechnung. [1, 30, 48, 49]

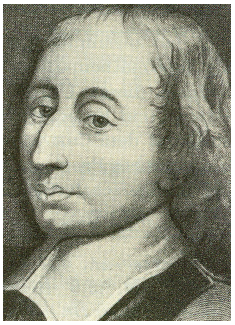

Abbildung 14: Pascal [49]

Poincaré, Jules-Henri:

Abbildung 15: Poincaré [49]

* 29.04.1854 in Nancy, † 17.07.1912 in Paris; er studierte an der Ecole Politechnique sowie an der Ecole des Mines. Ab 1879 lehrte er unter anderem in Paris als Professor für Physik. Da er sich auf kein Teilgebiet spezialisierte, überblickte er wie kaum ein anderer Mathematiker des 19. Jahrhunderts die gesamte Mathematik. Im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung zählte er zu den ersten, die diese zu axiomatisieren versuchten. Sein besonderes Interesse galt der Relativitätstheorie, so dass er als wichtiger Vorläufer von Albert Einstein angesehen wird. [30, 35, 49]

Sylvester, James Joseph:

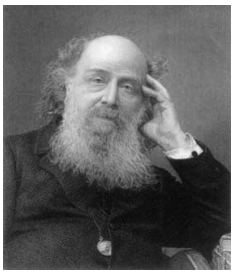

Abbildung 16: Sylvester [f]

* 03.09.1814 in London, † 15.03.1897; er studierte in London und Cambridge. Ab 1939 war er unter anderem in London, Baltimoore und Oxford als Professor tätig. Insbesondere beschäftigte er sich mit Algebra und Kombinatorik. Auf ihn gehen die Begriffe „Matrix“, „Invariante“, „Kovariante“, „Kommutant“ und „Diskriminante“ zurück. Auch für die Wahrscheinlichkeitstheorie leistete J. Sylvester bedeutungsvolle Beiträge. [f, 30, 35, 49]

Literaturverzeichnis

[1] Arnold, Wolfgang; Wußing, Hans (1985): *Biographien bedeutender Mathematiker*. 2. Auflage. Köln: Aulis-Verlag Deubner.

[2] Athen, Hermann (1973): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. 3. Auflage. Hannover Paderborn: Schoedel Verlag, Verlag Schöningh.

[3] Ball, W. W. Rouse (1959): *Mathematical recreations and essays*. Neuauflage. London: Macmillan and company limited.

[4] Barbeau, Ed (1993): *The Problem of the Car and Goats*. in: The college mathematics journal, Volume 24, No. 2, S. 149–154.

[5] Barth, Friedrich; Bergold, Helmut; Haller, Rudolf (1980): *Stochastik 2*. München: Ehrenwirth Verlag.

[6] Basieux, Pierre (2001): *Roulette: Die Zähmung des Zufalls*. 5. Auflage. München: printul Verlagsgesellschaft.

[7] Berresford, Geoffrey C. (1980): *The Uniformity Assumption in the Birthday Problem*. in: Mathematics Magazine, Volume 53, Number 1, S. 286–288.

[8] Bissell, A. F. (1981): *Maschinenausfälle und Geburtstage*. deutsche Übersetzung: König, G. in: Stochastik in der Schule, Band 1, Heft 3, S. 15–18.

[9] Bloom, D. M. (1973): *A Birthday problem*. in: The American Mathematical Monthly, Volume 80, Number 6, S. 1141–1146.

[10] Blum, Werner; Kirsch, Arnold (1994): *Elementare Behandlung des sogenannten Geburtstagsproblems*. in: Praxis der Mathematik, 36. Jahrgang, S. 7–10.

[11] Borovcnik, Manfred (1991): *Problemecke*. in: Stochastik in der Schule, Band 11, Heft 3, S. 46–51.

[12] Borovcnik, Manfred (1992): *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik*. Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich: BI-Wissenschaftsverlag.

[13] Brachinger, Hans W. (1991): *Nimm stets die andere*. in: WISU das Wirtschaftsstudium, Band 12, S. 887–890.

[14] Brown, Thad A.; Granberg, Donald (1995): *The Monty Hall dilemma*. in: Personality and social psychology bulletin, Volume 21, No. 7, S. 711–723.

[15] Büchter, Andreas; Henn, Hans-Wolfgang (2005): *Elementare Stochastik - Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

[16] Clark, Michael (2002): *Paradoxes from A to Z*. London: Routledge.

[17] Descartes, Réné (1972): *Regeln zur Ausrichtung der Erkenntniskraft*. Herausgeber: Gäbe, Lüder. Neu übersetzte Auflage. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

[18] Dubben, Hans-Hermann; Beck-Bornholdt, Hans-Peter (2005): *Mit an Wahrscheinlichkeit grenzender Sicherheit - Logisches Denken und Zufall*. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag.

[19] Engel, Arthur (1973): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik - Band 1*. 1. Auflage. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

[20] Engel, Arthur (1987): *Stochastik*. 1. Auflage. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

[21] Engel, Arthur (1991): *Mathematisches Experimentieren mit dem PC*. 1. Auflage. Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

[22] Feuerpfeil, Jürgen; Heigl, Franz (1978): *Stochastik*. 3. Auflage. München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

[23] Flachsmeyer, Jürgen (1969): *Kombinatorik - Eine Einführung in die mengentheoretische Denkweise*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[24] Freudenthal, Hans (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe - Band 2*. 1. Auflage. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

[25] Gardner, Martin (1971): *Mathematische Rätsel und Probleme*. 3. Auflage. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlag.

[26] Gardner, Martin (2001): *The Colossal Book of Mathematics - Classic Puzzles, Paradoxes, and Problems*. New York, London: W. W. Norton & Company.

[27] Gillman, Leonard (1992): *The Car and the Goats*. in: The American Mathematical Monthly, Volume 99, Number 1, S. 3–7.

[28] Glaymann, Maurice; Varga, Tamasch (1975): *Zwischen Unmöglich und Sicher*. Freiburg im Breisgau: Verlag Herder.

[29] Glickman, Leslie (1989): *Warum man historische Notizen in den Stochastik-Unterricht einbauen sollte*. in: Stochastik in der Schule, Band 9, Heft 3, S. 43–46.

[30] Gottwald, Siegfried; Ilgauds, Hans-Joachim; Schlote, Karl-Heinz (1990): *Lexikon bedeutender Mathematiker*. 1. Auflage. Thun: Verlag Harri Deutsch.

[31] Griesel, Heinz; Postel, Helmut (1990): *Mathematik heute - Grundkurs Stochastik*. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag, Verlag Ferdinand Schöningh.

[32] Halder, Heinz-Richard (1976): *Einführung in die Kombinatorik*. 1. Auflage. München Wien: Carl Hanser Verlag.

[33] Hefendehl-Hebeker, Lisa; Törner, Günter (1984): *Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik.* in: Didaktik der Mathematik, 12. Jahrgang, S. 245–262.

[34] Hefendehl-Hebeker, Lisa (2003): *Vorlesungsausarbeitung: Didaktik der Stochastik I - Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Duisburg.

[35] Henze, Norbert (2000): *Stochastik für Einsteiger - Eine faszinierende Welt des Zufalls.* 3. Auflage. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlag.

[36] Henze, Norbert (2002): *Verschwundene Socken, Rencontre-Probleme, Fußballauslosungen und Sammelbilder - eine einheitliche Betrachtungsweise.* in: Praxis der Mathematik, Band 44, Heft 5, S. 219–224.

[37] Hepperger, Georg (1991): *2 Geburtstagsprobleme.* in: Wissenschaftliche Nachrichten, Heft 86, S. 29–30.

[38] Hoffman, Paul (2000): *Der Mann, der Zahlen liebte - Die erstaunliche Geschichte des Paul Erdös und die Suche nach der Schönheit in der Mathematik.* München: Econ Taschenbuch Verlag.

[39] Jacobs, Konrad (1983): *Einführung in die Kombinatorik.* Berlin: Walter de Gruyter.

[40] Jahnke, Thomas (1997): *Drei Türen, zwei Ziegen und eine Frau.* in: mathematik lehren, Heft 85, S. 47–51.

[41] Kaballo, Winfried (2000): *Einführung in die Analysis I.* 2. Auflage. Heidelberg; Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

[42] Knapp, Thomas R. (1982): *Das Geburtstags-Problem: Einige empirische Daten und einige Approximationen.* deutsche Übersetzung: Strauß, Ingeborg. in: Stochastik in der Schule, Band 2, Heft 3, S. 36–41.

[43] Krämer, Walter (2003): *Denkste! Trugschlüsse aus der Welt des Zufalls und der Zahlen*. 5. Auflage. München: Piper Verlag.

[44] Krengel, Ulrich (2002): *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. 6. Auflage. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlag.

[45] Krickeberg, Klaus; Ziezold, Herbert (1995): *Stochastische Methoden*. 4. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

[46] Kütting, Herbert (1994): *Didaktik der Stochastik*. Mannheim/Leipzig/Wien/ Zürich: BI-Wissenschaftsverlag.

[47] Laplace, Pierre Simon de (1814): *Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit*. Herausgeber: Mises, Richard von (1932). Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.

[48] Meersmann, Willy (2001): *Mathematik Lexikon*. 2. Auflage. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

[49] Meschkowski, Herbert (1964): *Mathematiker-Lexikon*. Mannheim/Zürich: BI Hochschultaschenbücher-Verlag.

[50] Mises, Richard von (1939): *Über Aufteilungs- und Besetzungswahrscheinlichkeiten*. in: Selected Papers of Richard von Mises - volume two - Probability and Statistics, General (1964), S. 313–334. Providence, Rhode Island: American mathematical society.

[51] Montmort, Pierre Remond de (1713): *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. 2. Auflage. Paris. Herausgegeben: 1980, 3. Auflage. New York: Chelsea Publishing Company.

[52] Morgenstern, Dietrich (1968): *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*. 2. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

[53] Mosteller, Frederick; Rourke, Robert E. K.; Thomas, George B., jr. (1961): *Probability and Statistics*. Massachusetts: Addison-Wesley publishing company.

[54] Mosteller, Frederick (1962): *Understanding the birthday problem*. in: The Mathematics Teacher, S. 322–325.

[55] Paulos, John Allen (1990): *Zahlenblind*. München: Wilhelm Heyne Verlag.

[56] Paulus, Jochen (2004): *Das Rätsel der drei Türen*. in: Die Zeit, 48/2004.

[57] Pflug, G. (1980): *Paradoxien der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. in: Stochastik im Schulunterricht, Beiträge zum 3. internationalen Symposium für „Didaktik der Mathematik".

[58] Pillis, John de (2002): *777 Mathematical Conversation Starters*. Washington DC: The Mathematical Association of America.

[59] Randow, Gero von (2004): *Das Ziegenproblem - Denken in Wahrscheinlichkeiten*. Neuausgabe. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag.

[60] Rasfeld, Peter (2001): *Das Rencontre-Problem, eine Quelle für den Stochastikunterricht von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe II?* in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001, S. 496–499.

[61] Riehl, Gerd (1997): *Das Geburtstagsproblem und die Intuition*. in: Praxis der Mathematik, Jahrgang 39, S. 177–181.

[62] Riemer, Wolfgang (1985): *Neue Ideen zur Stochastik*. Zürich: Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag.

[63] Rouse Ball, Walter William (1959): *Mathematical Recreations and Essays*. Neuauflage. London: Macmillan and Company Limited.

[64] Schechter, Bruce (1999): *Mein Geist ist offen: die mathematischen Reisen des Paul Erdös*. deutsche Übersetzung: Menzel, Christof. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.

[65] Schickinger, Thomas; Steger, Angelika (2001): *Diskrete Strukturen - Band 2: Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

[66] Schrage, Georg (1980): *Schwierigkeiten mit stochastischer Modellbildung - zwei Beispiele aus der Praxis*. in: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 1, Heft1/2, S. 86–101.

[67] Schrage, Georg (1984): *Stochastische Trugschlüsse*. in: mathematica didactica, Band 7, Heft 3, S. 3–19.

[68] Schrage, Georg (1984): *Irrwege zur Stochastik*. in: mathematik lehren, Heft 5, S. 50–53.

[69] Schulz, Roland W. (1981): *Stochastische Problemaufgaben - Analysen aus didaktischer und psychologischer Perspektive*. in: IDM Materialien und Studien, Band 23.

[70] Shaughnessy, J. Michael; Dick, Thomas (1991): *Monty's Dilemma: Should You Stick or Switch?* in: The Mathematics Teacher, Volume 84, Number 4, S. 252–256.

[71] Stadler, Heinz (1986): *Paradoxien der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Teil 1*. in: Didaktik der Mathematik, 14. Jahrgang, S. 134–152.

[72] Starr, Norton (1973): *A Paradox in Probability Theory*. in: The Mathematics Teacher, Volume 66, Number 2, S. 166–168.

[73] Steger, Angelika (2001): *Diskrete Strukturen - Band 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

[74] Stewart, Ian (1991): *Mathematische Unterhaltungen.* in: Spektrum der Wissenschaft, Heft 11, S. 12–16

[75] Strick, Heinz Klaus (1991): *Überlegungen zum Geburtstagsproblem.* in: Mathematik lehren und lernen - Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.

[76] Strick, Heinz Klaus (1994): *Modellieren als Aufgabe des Stochastikunterrichts - Beispiele zur Anwendung des Kugel-Fächer-Modells.* in: mathematik lehren, Heft 85, S. 52–54.

[77] Strick, Heinz Klaus (1997): *Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern über Zufallsvorgänge.* in: Praxis der Mathematik, Band 36, Heft 2, S. 49–56.

[78] Strick, Heinz Klaus (1997): *Pressemeldungen (2) - Ergänzungen zum Rencontre-Problem.* in: Praxis der Mathematik, Band 39, Heft 3, S. 101–103.

[79] Strick, Heinz Klaus (1998): *Simulationen von Zufallsversuchen als Übungen zur Modellbildung.* in: Praxis der Mathematik, Band 40, Heft 2, S. 53–57.

[80] Székeley, Gábor J. (1990): *Paradoxa: klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik.* Thun, Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.

[81] Takács, Lajos (1980): *The Problem of Coincidences.* in: Archive for History of Exact Sciences, Volume 21, S. 229–244.

[82] Tietze, Uwe-Peter; Klika, Manfred; Wolpers, Hans (2002): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II - Band 3: Didaktik der Stochastik.* 1. Auflage. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlag.

[83] Warmuth, Elke (1991): *Was ist Wahrscheinlichkeit? - Gedanken zur Erklärung und Entwicklung des Begriffs in der Schule.* in: Didaktik der Mathematik, 19. Jahrgang, S. 165–170.

[84] Wickmann, Dieter (1998): *Zur Begriffsbildung im Stochastikunterricht.* in: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 19, Heft 1, S. 46–80.

[85] Winter, Heinrich (1992): *Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien.* in: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 13, S. 23–53.

weitere Quellen:

[*i*] *Das Bertelsmann Lexikon* (1966): Neuausgabe. Gütersloh: Bertelsmann Verlag.

[*ii*] *Schönheit des Denkens* (1991). in: Der Spiegel, Jahrgang 45, Heft 34, S. 212–213.

Internetseiten:

[a] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/∼history/Mathematicians/Bayes.html

[b] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/∼history/PictDisplay/Bertrand.html

[c] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/∼history/Mathematicians/Erdos.html

[d] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/∼history/Mathematicians/Lambert.html

[e] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/∼history/Mathematicians/Mises.html

[f] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/∼history/Mathematicians/Sylvester.html

Abbildungsverzeichnis

3.1 Baumdiagramm für ein Würfelspiel mit einem Durchgang 33

3.2 Baumdiagramm zum ersten Problem von Méré 34

4.1 Häufige Vermutung bei dem *Geburtstagsproblem* [15] 40

4.2 Verlauf der Wahrscheinlichkeit bei dem *Geburtstagsproblem* 47

4.3 1000-fache Simulation des *Geburtstagsproblems* für 23 Personen und 365 Tage 56

4.4 Baumdiagramm zum *Geburtstagsproblem* 57

4.5 Wahrscheinlichkeitsverteilung für das *Rencontreproblem* für $n = 1, \ldots, 7$ Briefe 68

4.6 Wahrscheinlichkeitsverteilung für das *Rencontreproblem* für $n = 1, \ldots, 20$ Briefe 68

4.7 5000-fache Simulation des *Rencontreproblems* für 10 Briefe 72

4.8 5000-fache Simulation des *Rencontreproblems* für 30 Briefe 72

4.9 5000-fache Simulation des *Rencontreproblems* für 100 Briefe 72

4.10 5000-fache Simulation des *Rencontreproblems* für 300 Briefe 72

4.11 Baumdiagramm für das *Rencontreproblem* mit drei Briefen [28] . . . 73

4.12 Baumdiagramm zum *Ziegenproblem* 81

4.13 Baumdiagramm zur Veranschaulichung des *Ziegenproblems.* [34] . . 87

4.14 Baumdiagramm zum Gefangenenproblem 91

4.15 Veranschaulichung des *Bertrand'schen Kästchenproblems* [18] 92

4.16 Überblick über die Möglichkeiten beim *Bertrand'schen Kästchenproblem* 93

4.17 Baumdiagramm zum Problem der Schiffbrüchigen 94

1 Bayes [a] I

2 Bernoulli, Ja. I [49] I

3 Bernoulli, Jo. I [49] II

4 Bertrand [b] II

5 Descartes [*i*] III

6 Erdös [c] III

7 Euler [49] IV

8 Fermat [49] IV

9 Huygens [49] V

10 Lambert [d] V

11 Laplace [49] VI

12 Méré [15] VI

13 Mises [e] VI

14 Pascal [49] VII

15 Poincaré [49] VIII

16 Sylvester [f] VIII

Tabellenverzeichnis

4.1 Wahrscheinlichkeiten für einen Mehrfachgeburtstag unter s zufällig ausgewählten Personen 46

4.2 Prozentzahlen der Geburten in der Monroe County für jeden Tag der Jahre 1941 - 1968 [42] 50

4.3 Vergleich der bei dem *Geburtstagsproblem* gesuchten Wahrscheinlichkeit für verschiedene s [42] 54

4.4 Einkleidungsmöglichkeiten des *Geburtstagsproblems* [8, 35, 76, 77, 85] 60

4.5 Wahrscheinlichkeiten für das Rencontreproblem für verschiedene n . 66

4.6 Mögliche Spielverläufe bei dem *Ziegenproblem* [18] 86

4.7 Mögliche Spielverläufe bei dem „erweiterten“ *Ziegenproblem* [18] . . 90