Misere Spiele am Beispiel von Chomp

Lukas Ditschinger
Betreuer: Prof. Dr. Martin Kreuzer, Universität Passau

Bachelorarbeit
April 2019

Inhaltsverzeichnis

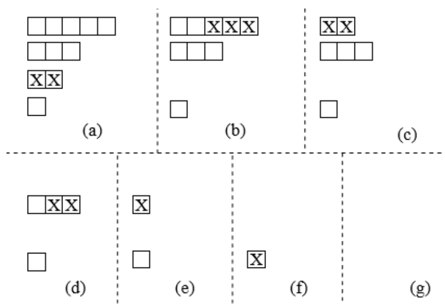
1 Einführung zu Misere Spielen

1.1 Neutrale kombinatorische Spiele

Die kombinatorische Spieltheorie beschäftigt sich mit sequenziellen 2-Personen Spielen mit perfekter Information für beide Spieler. Eine Klasse von solchen Spielen, die äußerst interessant ist, sind neutrale Spiele: Spiele, bei denen beiden Spielern dieselben Spielzüge zu jeder Zeit des Spiels zur Verfügung stehen. Im Folgenden sind einige Beispiele von neutralen kombinatorischen Spielen aufgeführt. Die vorliegende Arbeit befasst sich ausschließlich mit solchen Spielen.

Beispiel 1.1.1 (NIM) Das Fundament der kombinatorischen Spieltheorie ist das Spiel *NIM*: Es besteht aus beliebig vielen Haufen, welche jeweils beliebig viele Steine besitzen. Die Anzahl der Steine eines Haufens nennt man Größe des Haufens. Ein Spielzug eines Spielers besteht darin einen oder mehrere Steine von *einem* Haufen zu entfernen. Der Spieler, der den letzten Stein vom letzten verbleibenden Haufen entfernt, gewinnt. Ein Beispiel eines *NIM* Spiels ist in Grafik(1) zu sehen: Die sieben Teilgrafiken zeigen sieben aufeinanderfolgende Stellungen eines *NIM* Spiels. Ein mit X versehener Stein repräsentiert dabei einen Stein, welcher von dem Spieler, der an der Reihe ist, ausgewählt wurde entfernt zu werden.

Grafik(1)



Beispiel 1.1.2 (Kayles) *Kayles* besteht wie *Nim* aus beliebig vielen Haufen, die jeweils beliebig viele Steine enthalten. Ein Spielzug eines Spielers besteht darin, einen oder zwei nebeneinander gelegene Steine von *einem* Haufen zu entfernen. Falls ein Spieler einen oder zwei nebeneinanderliegende Steine aus der Mitte eines Haufens entfernt, dann werden die “Resthaufen”des “Originalhaufens”, die links und rechts von dem entfernten Stein bzw. von den entfernten Steinen entstehen, zu zwei einzelnen separaten Haufen. Der Spieler, der den letzten Stein vom letzten verbleibenden Haufen entfernt, gewinnt das Spiel.

Beispiel 1.1.3 (Dawson‘s Kayles) *Dawsons‘s Kayles* ist identisch zu *Kayles* bis auf zwei Unterschiede: (1) Ein Spielzug besteht darin, *genau* zwei nebeneinander liegende Steine von *einem* Haufen zu entfernen. (2) Die Gewinn-Bedingung wird umgekehrt: Der Spieler, der den letzten Spielzug macht, verliert.

Bemerkung 1.1.4 Man kann neutrale kombinatorische Spiele in zwei Varianten spielen:

- *Normales Spiel*: Der Spieler, der den letzten Spielzug macht, gewinnt.
- *Misere Spiel*: Der Spieler, der den letzten Spielzug macht, verliert.

Diese Variationen haben einen großen Einfluss auf die Schwierigkeit eines Spiels. Eine effiziente Gewinnstrategie für *NIM* bzw. *Kayles* wurde bereits 1902 bzw. 1956 gefunden. Für *Dawson's Kayles* ist dies immer noch ein offenes Problem. Was macht *Dawson's Kayles* so viel schwerer? Es ist genau die Eigenschaft, dass der Spieler mit dem letzten Spielzug verliert. Allgemein kann man sagen, dass es bei Spielen im Misere Spiel deutlich schwerer ist eine effiziente Gewinnstrategie zu finden.

1.2 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die wesentlichsten Definitionen behandelt.

Definition 1.2.1 (Oktalcode und Oktalspiel) Ein *Oktalcode* ist eine Folge von Ziffern $0.d_1d_2d_3\dots$ mit $0 \leq d_i < 8$ für alle $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Ein *Oktalcode* in der Kombinatorischen Spieltheorie repräsentiert die Regeln eines bestimmten *Oktalspiels. Oktalspiele* sind eine Klasse von kombinatorischen Spielen. Ein *Oktalspiel* wird mit Haufen, die wiederum aus Steinen bestehen, gespielt und der *Oktalcode* beschreibt wie viele Steine unter welchen Umständen von den Spielern entfernt werden dürfen.
Die Ziffer d_k charakterisiert dabei unter welchen Bedingungen k Steine entfernt werden dürfen.
Betrachten wir d_k als Dualzahl: $d_k = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cdot 2 + \epsilon_2 \cdot 4$, mit $\epsilon_i = 0$ oder 1, für alle $i \in \{0, 1, 2\}$.

• Man darf einen gesamten Haufen der Größe k entfernen, genau dann wenn $\epsilon_0 = 1$.
• Man darf k Steine vom Ende eines Haufens entfernen, wobei man dabei mindestens einen Stein des Haufens übrig lässt, genau dann wenn $\epsilon_1 = 1$.
• Man darf k nebeneinanderliegende Steine aus der Mitte eines Haufens entfernen, wobei man dabei mindestens einen Stein an jedem Ende des Haufens übrig lässt und die beiden "Resthaufen" an den Haufenenden zu *zwei* separaten Haufen werden, genau dann wenn $\epsilon_2 = 1$.

Beispiel 1.2.2 Für die Beispiele aus dem Abschnitt 1.1 gilt damit:

(i) *NIM* wird repräsentiert durch $0.\overline{3}$.
(ii) *Kayles* wird repräsentiert durch 0.77.
(iii) *Dawson's Kayles* wird repräsentiert durch 0.07.

In Kapitel 1 und 2 dieser Arbeit geht es ausschließlich um Oktalspiele. Insgesamt beschränken wir uns in diesen beiden Kapiteln also auf neutrale Oktalspiele.

Definition 1.2.3 Sei $n \geq 0$. Dann bezeichnet $*n$ einen Haufen der Größe n. Wir schreiben 0 bzw. $*$ als Abkürzung für $*0$ bzw. $*1$.

Definition 1.2.4 (Stellung) Sei $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $n_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Gegeben ein Oktalspiel mit Oktalcode $0.d_1d_2d_3\dots$ heißt das $k + 1$ - Tupel

$$(*n_1, \dots, *n_k, 0.d_1d_2d_3\dots)$$

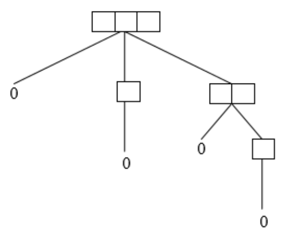
eine *Stellung*.

Interpretation: Eine *Stellung* $(*n_1, \ldots, *n_k, 0.d_1d_2d_3\ldots)$ beschreibt eine Spiellage in einem neutralen Oktalspiel: Die Spiellage besteht aus k Haufen, welche die Größen n_1 bis n_k besitzen, wobei wir uns in dem Oktalspiel mit dem Oktalcode $0.d_1d_2d_3\ldots$ befinden.

Ist eine *Stellung* S gegeben, nennen wir die *Stellungen*, welche man *genau mit einem* Spielzug erreichen kann, die *Optionen* von S.

Eine Methode, eine *Stellung* S graphisch zu repräsentieren, ist ihr Spielbaum: Die Wurzel des Spielbaums entspricht der *Stellung* S. Die *Optionen* von S sind dabei alle Kinder der Wurzel.
Im weiteren Verlauf des Spielbaums werden die *Optionen* $O_1, \ldots, O_i$ einer jeden *Stellung* S' wie folgt dargestellt: Der Knoten S' hat die Kinder $O_1, \ldots, O_i$.

Zum Beispiel kann die *Stellung* S, welche aus einem Haufen mit drei Steinen besteht und in $0.\overline{3}$ gespielt wird, durch den folgenden Spielbaum dargestellt werden:



0 bezeichnet hierin und im Folgenden die *Stellung* $(0, \ldots, 0, 0.d_1d_2d_3\ldots)$, also eine *Stellung* mit keinen möglichen Spielzügen.
0 ist also sowohl eine Abkürzung für die *Stellung* $(0, \ldots, 0, 0.d_1d_2d_3\ldots)$ als auch für $*0$. Im jeweiligen Zusammenhang sollte aber immer klar sein, wofür die Abkürzung 0 steht.

Definition 1.2.5 (Identische Stellungen) Zwei Stellungen S und T werden als *identisch* bezeichnet, falls $S = T$ gilt.

Definition 1.2.6 (Isomorphe Stellungen) Zwei Stellungen S und T heißen *isomorph*, falls sie isomorphe Spielbäume besitzen.
Falls S und T *isomorph* sind, schreiben wir $S \cong T$.
Erinnerung: Zwei Bäume heißen isomorph zueinander, falls man einen der beiden Bäume zu dem anderen Baum umwandeln kann, indem man rechte und linke Kinder von seinen Knoten vertauscht.

Beispiel 1.2.7 Es gilt:

$$(*2, *1, 0.\overline{3}) \cong (*1, *2, 0.\overline{3}).$$

Definition 1.2.8 (Ausgang) Wir bezeichnen ab jetzt mit $\mathcal{P}$ bzw. $\mathcal{P}$-Spieler den Spieler, der den letzten Spielzug gemacht bzw. den übernächsten Spielzug inne hat, und mit $\mathcal{N}$ bzw. $\mathcal{N}$-Spieler den Spieler, der den nächsten Spielzug inne hat. Sei $\mathcal{A}$ eine Menge an Stellungen. Sei $S \in \mathcal{A}$.
Der *normale Ausgang* $\sigma^+ : \mathcal{A} \to \{\mathcal{P}, \mathcal{N}\}$ bildet eine Stellung $S \in \mathcal{A}$ auf den Spieler ab, der im normalen Spiel eine gewinnbringende Strategie besitzt. Das heißt:

• $\sigma^+(S) = \mathcal{P}$, falls, bei normalem Spiel, der Spieler mit dem übernächsten Spielzug S mit geeigneter Strategie unabhängig von den Spielzügen des anderen Spielers immer gewinnen kann.
• $\sigma^+(S) = \mathcal{N}$, falls, bei normalem Spiel, der Spieler mit dem nächsten Spielzug S mit geeigneter Strategie unabhängig von den Spielzügen des anderen Spielers immer gewinnen kann.

Analog ist der *Misere Ausgang* $\sigma^- : \mathcal{A} \to \{\mathcal{P}, \mathcal{N}\}$ definiert: Er bildet eine Stellung $S \in \mathcal{A}$ auf den Spieler ab, der im Misere Spiel eine gewinnbringende Strategie besitzt. Das heißt:

• $\sigma^-(S) = \mathcal{P}$, falls, bei Misere Spiel, der Spieler mit dem übernächsten Spielzug S mit geeigneter Strategie unabhängig von den Spielzügen des anderen Spielers immer gewinnen kann.
• $\sigma^-(S) = \mathcal{N}$, falls, bei Misere Spiel, der Spieler mit dem nächsten Spielzug S mit geeigneter Strategie unabhängig von den Spielzügen des anderen Spielers immer gewinnen kann.

Wir führen folgende Begrifflichkeiten für S ein:

• S heißt *(normale) $\mathcal{P}$-Stellung*, falls $\sigma^+(S) = \mathcal{P}$.
• S heißt *(normale) $\mathcal{N}$-Stellung*, falls $\sigma^+(S) = \mathcal{N}$.
• S heißt *(Misere) $\mathcal{P}$-Stellung*, falls $\sigma^-(S) = \mathcal{P}$.
• S heißt *(Misere) $\mathcal{N}$-Stellung*, falls $\sigma^-(S) = \mathcal{N}$.

Beispiel 1.2.9 Sei $\mathcal{A} := \{(*n, 0.\overline{3}) : n \in \mathbb{N}\}$, das heißt wir betrachten *NIM*, bzw. *NIM* im Misere Spiel, mit einem einzelnen Haufen und untersuchen welche Stellungen $\mathcal{P}$- bzw. $\mathcal{N}$-Stellungen sind:

• $\sigma^+(0) = \mathcal{P}$: Falls es keine Steine mehr gibt, dann war der letzte Spielzug der den Sieg bringende Spielzug (Der Spieler mit dem letzten Spielzug hat den letzten Stein entfernt).
• $\sigma^+(*n) = \mathcal{N}$ für alle $n > 0$: Da es nur einen Haufen gibt, kann der Spieler mit dem nächsten Spielzug alle verbleibenden Steine nehmen und damit gewinnen.
• $\sigma^-(0) = \mathcal{N}$: Falls es keine Steine mehr gibt, dann hat der Spieler mit dem letzten Spielzug den letzten Stein entfernt und somit verloren. Der Spieler mit dem nächsten Spielzug hat also gewonnen.
• $\sigma^-(*) = \mathcal{P}$: Falls nur ein Stein übrig ist, dann muss der Spieler mit dem nächsten Spielzug diesen nehmen und verliert damit. Der Spieler mit dem letzten Spielzug hat also gewonnen.
• $\sigma^-(*n) = \mathcal{N}$ für alle $n > 1$: Hier ist der Sieg bringende Spielzug, alle verbleibenden Steine bis auf einen zu entfernen.

Definition 1.2.10 (Disjunkte Summe von Stellungen) Seien S und T Stellungen. Die *(disjunkte) Summe* von S und T, $S+T$, ist die folgende Stellung:

Lege eine Kopie von S und eine Kopie von T nebeneinander. Ein Spielzug in $S+T$ besteht dann darin, genau eine der beiden Komponenten auszuwählen und einen normalen Spielzug in ebendieser Komponente zu tätigen.

Durch diese Definition wird tatsächlich eine Stellung definiert. Der erste Satz setzt fest, aus welchen Haufen die Spiellage besteht. Der zweite Satz setzt fest, mit welchen Spielregeln eines welchen Oktalspiels ein jeweiliger Haufen zu behandeln ist.
Falls S und T Stellungen in demselben Oktalspiel mit Oktalcode $0.d_1d_2d_3\dots$ sind, also $S = (*n_1, \dots, *n_k, 0.d_1d_2d_3\dots)$ und $T = (*m_1, \dots, *m_l, 0.d_1d_2d_3\dots)$, dann ist die *(disjunkte) Summe* von S und T, $S+T$, die folgende Stellung:

$$(*n_1, \dots, *n_k, *m_1, \dots, *m_l, 0.d_1d_2d_3\dots).$$

Bemerkung 1.2.11 Sei S eine Stellung. Dann gilt:

$$\sigma^+(S+0) = \sigma^+(S) \text{ und } \sigma^-(S+0) = \sigma^-(S).$$

Bemerkung 1.2.12 Widmen wir uns nun der Spielstrategie für *NIM*.
Sei S eine Stellung in *NIM* $(0.\overline{3})$. Schreibe die Größe eines jeden Haufens als Dualzahl auf und addiere all diese Binär-Zahlen mit *XOR*-Addition zum Ergebnis s.
S ist eine $\mathcal{P}$-Stellung genau dann, wenn $s = 0$.
Aus diesem Fakt folgt direkt die gewinnbringende Strategie von *NIM*, welche lautet:

Entferne so viele Steine wie möglich von einem Haufen, sodass sich nach deinem Spielzug $s = 0$ ergibt.

Beispiel 1.2.13 Betrachte nochmals die Stellung S aus der Grafik(1)(a) in *NIM* $(0.\overline{3})$: Die Größen der Haufen sind jeweils 5,3,2 und 1. Daraus folgt:

Grafik(2)

$$\begin{array}{cr} & 101 = 5 \\ \oplus & 11 = 3 \\ \oplus & 10 = 2 \\ \oplus & 1 = 1 \\ \hline & 101 \end{array}$$

s ist ungleich 0 und damit ist S eine $\mathcal{N}$-Stellung.

1.3 Normales Spiel

In diesem Abschnitt bewegen wir uns im normalen Spiel.

Definition 1.3.1 (Äquivalenz von Stellungen) Seien S, T Stellungen. Wir bezeichnen S und T als *äquivalent*, und schreiben $S \approx T$, genau dann wenn,

$$\sigma^+(S+X) = \sigma^+(T+X) \text{ für alle Stellungen } X.$$

Merke, dass falls $S \cong T$ gilt, dann muss auch $S \approx T$ gelten.

Proposition 1.3.2 *Es gilt:*
(i) $S + 0 \approx S$ *für alle Stellungen* S.
(ii) $S + S \approx 0$ *für alle Stellungen* S.

Beweis. Ausgearbeitet auf Grundlage von [1], p.7.
(i): 0 zu addieren ändert die Struktur von S nicht. Daraus folgt, dass $S + 0 \cong S$ und damit $S + 0 \approx S$.

(ii): Folgendes ist zu zeigen:

$$\sigma^+(S + S + X) = \sigma^+(0 + X) \overset{1.2.11}{=} \sigma^+(X) \text{ für alle Stellungen } X.$$

Fall 1: Angenommen $\sigma^+(X) = \mathcal{P}$. Dann kann der $\mathcal{P}$-Spieler $S + S + X$ wie folgt gewinnen:
Immer wenn der $\mathcal{N}$-Spieler einen Spielzug in X macht, dann benutze dort die gewinnbringende Strategie (aus Annahme). (Damit wird die Komponente X vom $\mathcal{P}$-Spieler gewonnen, da dieser sicher den letzten Spielzug auf X bekommen wird wegen seiner gewinnbringenden Strategie in X.) Falls der $\mathcal{N}$-Spieler einen Spielzug in einer der Kopien von S macht, dann mache den identischen Spielzug in der anderen Kopie von S. (Der $\mathcal{P}$-Spieler wird auch die Komponente $S + S$ gewinnen, da er den letzten Spielzug auf $S + S$ haben wird wegen der Symmetrie von S und S.)
Fall 2: Angenommen $\sigma^+(X) = \mathcal{N}$. Dann kann der $\mathcal{N}$-Spieler $S + S + X$ wie folgt gewinnen:
Spiele die gewinnbringende Strategie auf X, außer der $\mathcal{P}$-Spieler macht einen Spielzug in einer der Kopien von S, dann mache den identischen Spielzug in der anderen Kopie von S.
Mit analoger Argumentation wie in *Fall 1* wird der $\mathcal{N}$-Spieler $S + S + X$ gewinnen.
Damit gilt $\sigma^+(S + S + X) = \sigma^+(X)$ in beiden Fällen. □

Beispiel 1.3.3 Ein einfaches Beispiel dafür, um zu sehen wie nützlich disjunkte Summen sind, um Oktalspiele zu untersuchen, ist *NIM* $(0.\overline{3})$ mit Haufen der Größe 19, 23, 16, 45, 23 und 19.
Wegen Proposition 1.3.2(ii) sind die zwei Haufen der Größe 19 äquivalent zu 0, ebenso die zwei Haufen der Größe 23.
Also ist diese Stellung äquivalent zu *NIM* $(0.\overline{3})$ mit einem Haufen der Größe 16 und einem Haufen der Größe 45.

Proposition 1.3.4 *Seien* S, T *Stellungen. Dann gilt:*

$$S \approx T \Leftrightarrow \sigma^+(S + T) = \mathcal{P}.$$

Beweis. Ausgearbeitet auf Grundlage von [1], p.8.
" $\Rightarrow$ " : Wegen $S \approx T$ gilt:

$\sigma^+(S + X) = \sigma^+(T + X)$ für alle Stellungen X.

Daraus folgt mit der Assoziativität und der Kommutativität der disjunkten Summe:

$$\sigma^+(S + S + X') = \sigma^+(S + \underbrace{(S + X')}_{\text{ist eine Stellung X}}) = \sigma^+(T + \underbrace{(S + X')}_{\text{ist eine Stellung X}}) =$$

$\sigma^+(S + T + X')$ für alle Stellungen X'.

Dies bedeutet $S + S \approx S + T$. (0)
Gemäß Proposition 1.3.2(ii) gilt $S + S \approx 0$. Damit und mit Bemerkung 1.2.11 folgt für $X' = 0$:

$\sigma^+(S+T) = \sigma^+(S+T+0) = \sigma^+(S+T+X') = \sigma^+(S+S+X') =$
$\sigma^+(0+X') = \sigma^+(0+0) = \sigma^+(0) = \mathcal{P}$ (siehe Beispiel 1.2.9).

" $\Leftarrow$ " : Wir zeigen zuerst:

$\sigma^+(X) = \sigma^+(S+T+X)$ für alle Stellungen X. (1)

Fall 1: Angenommen $\sigma^+(X) = \mathcal{P}$, dann kann der $\mathcal{P}$-Spieler $S+T+X$ wie folgt gewinnen:
Benutze immer in der Komponente (X oder $S+T$), in der der $\mathcal{N}$-Spieler seinen Spielzug macht, die jeweilige gewinnbringende Strategie. Der $\mathcal{P}$-Spieler hat nämlich sowohl in $S+T$ (aus Vor. der Richtung) sowie in X (aus Annahme des *Fall 1*) die gewinnbringende Strategie. Insgesamt wird er also auf jeden Fall den letzten Spielzug haben und das Spiel gewinnen.
Fall 2: Angenommen $\sigma^+(X) = \mathcal{N}$, dann kann der $\mathcal{N}$-Spieler $S+T+X$ wie folgt gewinnen:
Spiele immer die gewinnbringende Strategie in X (aus Annahme des *Fall 2*), außer wenn der $\mathcal{P}$-Spieler einen Spielzug in $S+T$ spielt, dann werde für einen Spielzug selbst zum "$\mathcal{P}$-Spieler *von* $S+T$" und wende dabei die gewinnbringende Strategie in $S+T$ (aus Vor. der Richtung) in diesem einen Spielzug an. Somit hat der $\mathcal{N}$-Spieler in beiden Komponenten (X und $S+T$) die gewinnbringende Strategie und wird dadurch insgesamt auf jeden Fall den letzten Spielzug haben und das Spiel gewinnen.
Somit ist (1) gezeigt. Hieraus folgt mit Bemerkung 1.2.11:

$$\sigma^+(X) = \sigma^+(0+X) = \sigma^+(S+T+X) \text{ für alle Stellungen } X.$$

Das heißt $S+T \approx 0$. Gemäß Proposition 1.3.2(ii) gilt auch $T+T \approx 0$.
Mit selber Argumentation wie bei (0) und Proposition 1.3.2(i) gilt insgesamt:

$$T \approx 0 + T \approx S + T + T \approx S + 0 \approx S.$$

□

Definition 1.3.5 (mex einer Menge) Sei M eine endliche Menge von nicht-negativen ganzen Zahlen. Man bezeichnet die kleinste nicht-negative ganze Zahl, die nicht in M enthalten ist, als *mex(M)*.

Beispiel 1.3.6 Es gilt:

$$\text{(i) } \operatorname{mex}(\{1,2,3\}) = 0$$
$$\text{(ii) } \operatorname{mex}(\{0,1,3,6,7\}) = 2.$$

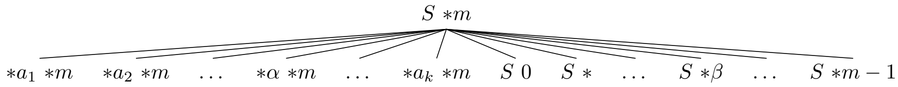
Theorem 1.3.7 (mex Regel) *Seien $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ und sei T eine Stellung in NIM $(0.\overline{3})$, die die folgenden und nur die folgenden Stellungen als Optionen hat:*

$$(*a_1, 0.\overline{3}), (*a_2, 0.\overline{3}), \ldots, (*a_k, 0.\overline{3}).$$

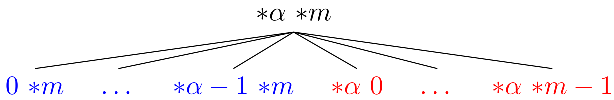
Sei S eine Stellung mit $S \cong T$. Dann gilt:

$$S \approx (*m, 0.\overline{3}), \textit{ mit } m = \mathit{mex}(\{a_1, \ldots, a_k\}).$$

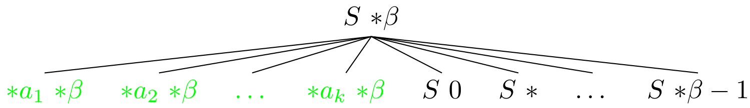
Beweis. Ausgearbeitet auf Grundlage von [1], p.8.
Gemäß Proposition 1.3.4 reicht es zu zeigen, dass $S + *m$ eine $\mathcal{P}$-Stellung ist. Die Ausgangslage für den $\mathcal{N}$-Spieler, $S + *m$, hat in Baumform folgende Darstellung:



Es gibt zwei Fälle:
Fall 1: Der $\mathcal{N}$-Spieler macht seinen Spielzug in S, wählt also eine der k Optionen von S. Diejenige Option, die er wählt, bezeichnen wir als $*\alpha$. Für den $\mathcal{P}$-Spieler ist dann die Stellung $*\alpha + *m$ gegeben:



Da $m \notin \{a_1, \dots, a_k\}$, muss $\alpha \neq m$. Falls $\alpha > m$, dann kann der $\mathcal{P}$-Spieler mit seinem Spielzug in $*m + *m$ (eines der blauen Kinder im Spielbaum) kommen. Falls $\alpha < m$ kann er in $*\alpha + *\alpha$ (eines der roten Kinder im Spielbaum) kommen. In beiden Fällen entsteht eine $\mathcal{P}$-Stellung, da der $\mathcal{N}$-Spieler nun den ersten Spielzug in $*m + *m$ bzw. $*\alpha + *\alpha$) hat. Der $\mathcal{P}$-Spieler kann das Spiel nun gewinnen, indem er jeden Spielzug, den der $\mathcal{N}$-Spieler auf der einen Komponente macht, exakt auf der anderen Komponente kopiert.
Fall 2: Der $\mathcal{N}$-Spieler macht seinen Spielzug in $*m$, wodurch für den $\mathcal{P}$-Spieler die Stellung $S + *\beta$ mit $\beta < m$ gegeben ist:



Wegen $m = mex(\{a_1, \dots, a_k\})$, muss $\beta = a_i$ für ein $i \in \{1, \dots, k\}$ gelten. Deswegen kann der $\mathcal{P}$-Spieler in $*\beta + *\beta$ (eines der grünen Kinder im Spielbaum) kommen und es entsteht dann mit derselben Argumentation wie in *Fall 1* eine $\mathcal{P}$-Stellung.
Somit ist $S + *m$ immer eine $\mathcal{P}$-Stellung. □

Nun folgt die wichtigste Erkenntnis im normalen Spiel, das Sprague-Grundy Theorem.

Theorem 1.3.8 (Sprague-Grundy Theorem) *Für jede beliebige Stellung S gibt es ein $m \geq 0$, so dass $S \approx (*m, 0.\overline{3})$.*

Beweis. Siehe [2], Theorem 1.3.2. □

Direkt aus diesem Theorem leiten wir den *Grundy-Wert* ab.

Definition 1.3.9 (Grundy-Wert) Sei S eine Stellung. Man bezeichnet die eindeutige ganze Zahl m, so dass $S \approx (*m, 0.\overline{3})$ gilt, als *Grundy-Wert* $\mathcal{G}^+(S)$ von S. Dabei gilt:

$$\mathcal{G}^+(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } S \text{ keine Optionen hat,} \\ mex(\{\mathcal{G}^+(S') : S' \text{ ist eine Option von } S\}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

1.4 Misere Spiel

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Misere Spiel. Im gesamten Abschnitt bewegen wir uns also ausschließlich in ebendiesem.
Die Äquivalenz im Misere Spiel wird analog zur Äquivalenz im normalen Spiel definiert:

Definition 1.4.1 (Misere Äquivalenz von Stellungen) Seien S, T Stellungen. Wir bezeichnen S und T als *(misere) äquivalent*, und schreiben $S \overset{m}{\approx} T$, genau dann wenn,

$$\sigma^-(S+X) = \sigma^-(T+X) \text{ für alle Stellungen } X.$$

Proposition 1.4.2 *Es gilt:*

$$S + 0 \overset{m}{\approx} S \textit{ für alle Stellungen } S.$$

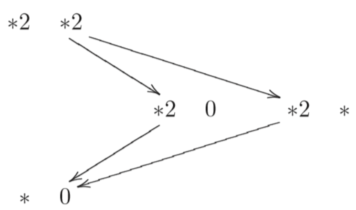
Beweis. Geht analog zum *Beweis* von Proposition 1.3.2(i). □

Proposition 1.4.3 *Proposition 1.3.2(ii) gilt im Misere Spiel im Allgemeinen nicht.*

Beweis. Ausgearbeitet auf Grundlage von [1], p.12.
Es lässt sich folgendes Gegenbeispiel finden: Sei S die Stellung $(*2, 0.\overline{3})$.
Wir zeigen:

$$S + S = *2 + *2 \overset{m}{\not\approx} 0.$$

Betrachten wir $*2 + *2$ in Baumform:



Man sieht, dass $*2+*2$ eine $\mathcal{P}$-Stellung ist, da egal was der $\mathcal{N}$-Spieler mit seinem ersten Spielzug macht, der $\mathcal{P}$-Spieler kann immer zu $* + 0 \overset{m}{\approx} *$ kommen. Dann muss der $\mathcal{N}$-Spieler den letzten Stein mit seinem Spielzug entfernen und der $\mathcal{P}$-Spieler gewinnt das Spiel.
Daraus folgt sofort, dass $*2 + *2 \overset{m}{\not\approx} 0$ gilt, denn für $X = 0$ erhält man mit Beispiel 1.2.9:

$$\sigma^-(*2+*2+X) = \sigma^-(*2+*2+0) \overset{1.2.11}{=} \sigma^-(*2+*2) = \mathcal{P} \neq$$
$$\mathcal{N} = \sigma^-(0) \overset{1.2.11}{=} \sigma^-(0+0) = \sigma^-(0+X).$$

□

Proposition 1.4.4 *Es gilt in* $0.\overline{3}$*:*

$$* + * \overset{m}{\approx} 0.$$

Beweis. Ausgearbeitet auf Grundlage von [1], Proposition 2.6.
Es gilt zu zeigen:

$$\sigma^-(0+X) \overset{1.2.11}{=} \sigma^-(X) = \sigma^-(* + * + X) \text{ für alle Stellungen } X.$$

Fall 1: $\sigma^-(X) = \mathcal{N}$. Der $\mathcal{N}$-Spieler kann dann $* + * + X$ wie folgt gewinnen: Befolge die gewinnbringende Strategie auf X (aus Annahme des *Fall 1*), außer wenn der $\mathcal{P}$-Spieler eine Kopie von $*$ entfernt, dann entferne die andere Kopie von $*$.
Diese Strategie garantiert, dass der $\mathcal{P}$-Spieler verliert: Falls der $\mathcal{P}$-Spieler nur in der Komponente X spielt, bis die Komponente X wegfällt, muss er mit dem Wegfall von X die Komponente $* + *$ hinterlassen, da X laut der Annahme des *Fall 1* eine $\mathcal{N}$-Stellung ist und folglich der $\mathcal{P}$-Spieler mit seinem Spielzug den letzten Stein des letzten Haufens von X entfernen muss.
Falls der $\mathcal{P}$-Spieler vor dem Wegfall der Komponente X einen Spielzug in der Komponente $* + *$ macht, wird die Komponente $* + *$ wegfallen und er muss am Ende des weiteren Spiels 0 hinterlassen, da X oder eine Folgestellung von X, also was nach dem Wegfall von $* + *$ vom Spiel verbleibt, laut Annahme des *Fall 1* eine $\mathcal{N}$-Stellung ist.
In jedem Fall muss der $\mathcal{P}$-Spieler also irgendwann mit einem Spielzug entweder 0 oder $* + *$ hinterlassen.
0 und $* + *$ sind aber beides $\mathcal{N}$-Stellungen gemäß Beispiel 1.2.9. Der $\mathcal{N}$-Spieler gewinnt also in jedem Fall das Spiel $* + * + X$.
Fall 2: $\sigma^-(X) = \mathcal{P}$. Geht analog zu *Fall 1*. □

Proposition 1.4.5 *Es gilt in* $0.\overline{3}$:

$$*2 + *2 + *2 + *2 \textit{ ist eine } \mathcal{P}\textit{-Stellung.}$$

Beweis. Ausgearbeitet auf Grundlage von [1], Proposition 2.7.
Betrachten wir die Stellung in Baumform:

$*2\ *2\ *2\ *2$

$*2\ *2\ *2\ *$ $\qquad$ $*2\ *2\ *2$

$*2\ *2\ *\ *$ $\quad \ldots$ $\quad *2\ *2$ $\quad \ldots$

Der $\mathcal{N}$-Spieler hat nur zwei Optionen: Wenn er $*2 + *2 + *2$ wählt, kann der $\mathcal{P}$-Spieler mit seinem Spielzug zu $*2+*2$ kommen, was eine $\mathcal{P}$-Stellung ist (siehe Proposition 1.4.3).
Wenn er $*2 + *2 + *2 + *$ wählt, kann der $\mathcal{P}$-Spieler mit seinem Spielzug zu $*2 + *2 + * + *$ kommen.
Mit Proposition 1.4.4 und Argumentation wie in (0) gilt $*2+*2+*+* \overset{m}{\approx} *2+*2$.
Für $X = 0$ gilt dann:

$$\sigma^-(*2 + *2 + * + *) \overset{1.2.11}{=} \sigma^-(*2 + *2 + * + * + 0) = \sigma^-(*2 + *2 + * + * + X) = \sigma^-(*2 + *2 + X) = \sigma^-(*2 + *2 + 0) \overset{1.2.11}{=} \sigma^-(*2 + *2) = \mathcal{P}.$$

Das heißt: Egal welche Option der $\mathcal{N}$-Spieler mit seinem ersten Spielzug wählt, der $\mathcal{P}$-Spieler kann das Spiel in eine $\mathcal{P}$-Stellung bringen. □

Bemerkung 1.4.6 Nun folgt die gewinnbringendene Strategie für Misere *NIM*, welche lautet:

Spiele genau so wie in *NIM*, außer dein Spielzug würde nur Haufen der Größe 0 oder 1 hinterlassen. In diesem Fall hinterlasse eine ungerade Anzahl an Haufen der Grösse 1 mit deinem Spielzug.

Bemerkung 1.4.7 Es ist möglich zu zeigen, dass in $0.\overline{3}$ für alle $m \geq 0$ gilt, dass $*2 + *2 \overset{m}{\not\approx} *m$. Das ist ein klarer Unterschied zum normalen Spiel, wo *jede* Stellung äquivalent zu *einem* Haufen bestimmter Größe in $0.\overline{3}$ ist (siehe Theorem 1.3.8).

2 Misere Quotienten

2.1 Herleitung

Im gesamten Kapitel behandeln wir weiter das Misere Spiel.
Die bisher kennengelernte Misere Äquivalenz von Stellungen ruft eine unhandsame Theorie hervor, denn ein Analog des Sprague-Grundy Theorems im Misere Spiel ist zum Beispiel wegen Bemerkung 1.4.7 nicht möglich. Wie können wir aber dann Stellungen im Misere Spiel in eine Struktur bringen? Die Lösung hierfür sind die so genannten *Misere Quotienten*.
Das Problem bei der Misere Äquivalenz von Stellungen ist, dass diese Äquivalenz eine zu starke Relation ist, da man verlangt, dass äquivalente Stellungen sich in jedem möglichen Kontext identisch verhalten.
Alternativ können wir uns im Voraus auf ein Oktalspiel (bzw. auf eine Einschränkung eines Oktalspiels) festlegen und dann bei der Betrachtung einer Stellung dieses Oktalspiels (bzw. dieser Einschränkung eines Oktalspiels) nur berücksichtigen, wie diese Stellung mit allen Stellungen des Oktalspiels (bzw. der Einschränkung des Oktalspiels) interagiert. Das bedeutet, dass Stellungen, die nicht im festgelegten Oktalspiel (bzw. in der festgelegten Einschränkung des Oktalspiels) vorkommen, hierbei irrelevant sind.
In diesem Sinn definieren wir eine Menge $\mathcal{A}$ von Stellungen. ($\mathcal{A}$ ist entweder die Menge aller Stellungen eines beliebigen Oktalspiels oder eine Einschränkung dieser Menge.) Wir nehmen an, dass jedes $\mathcal{A}$, das in diesem Kapitel vorkommt, unter der disjunkten Summe abgeschlossen ist.

Definition 2.1.1 ($\mathcal{A}$-Äquivalenz von Stellungen) Seien $S, T \in \mathcal{A}$. Wir bezeichnen S und T als $\mathcal{A}$ *– äquivalent*, und schreiben $S \approx_{\mathcal{A}} T$, genau dann wenn,

$$\sigma^{-}(S+X) = \sigma^{-}(T+X) \text{ für alle } X \in \mathcal{A}.$$

Mit der $\mathcal{A}$ - Äquivalenz von Stellungen eröffnet sich uns nun eine handsamere Theorie.

Bemerkung 2.1.2 *$\approx_{\mathcal{A}}$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Wir zeigen die für eine Äquivalenzrelation nötigen Eigenschaften:

• *Reflexivität*: Sei $S \in \mathcal{A}$.
Dann gilt: $\sigma^{-}(S+X) = \sigma^{-}(S+X)$ für alle $X \in \mathcal{A}$.
Damit gilt: $S \approx_{\mathcal{A}} S$.
• *Symmetrie*: Seien $S, T \in \mathcal{A}$ mit $S \approx_{\mathcal{A}} T$.
Dann gilt: $\sigma^{-}(S+X) = \sigma^{-}(T+X)$ für alle $X \in \mathcal{A}$.
Damit gilt: $T \approx_{\mathcal{A}} S$.
• *Transitivität*: Seien $S, T, U \in \mathcal{A}$ mit $S \approx_{\mathcal{A}} T$ und $T \approx_{\mathcal{A}} U$.
Dann gilt: $\sigma^{-}(S+X) = \sigma^{-}(T+X) = \sigma^{-}(U+X)$ für alle $X \in \mathcal{A}$.
Damit gilt: $S \approx_{\mathcal{A}} U$. □

Bemerkung 2.1.3 Für die Äquivalenzrelation $\approx_{\mathcal{A}}$ führen wir notationell das Folgende ein:
Wenn wir die Äquivalenzklasse modulo $\approx_{\mathcal{A}}$ von $S \in \mathcal{A}$ betrachten, dann schreiben wir $[S]_{\mathcal{A}}$ bzw. $[S]$.

Für Stellungen S, T, mit $S \approx_{\mathcal{A}} T$, schreiben wir auch: $[S]_{\mathcal{A}} = [T]_{\mathcal{A}}$.
Weiter bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen modulo $\approx_{\mathcal{A}}$ als $\mathcal{A}_{\approx_{\mathcal{A}}}$.

Natürlich sind mit analogem Beweis wie in Bemerkung 2.1.2 sowohl $\approx$ als auch $\overset{m}{\approx}$ ebenfalls Äquivalenzrelationen. Die Tatsache, dass $\approx_{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation ist, eröffnet uns aber eine neue Theorie:
Wir werden nämlich sehen, dass uns die Äquivalenzklassen modulo $\approx_{\mathcal{A}}$ zum Konzept der Misere Quotienten führen, welche das wichtigste Hilfsmittel sind, um neutrale Oktalspiele im Misere Spiel zu strukturieren und zu analysieren.

Dafür ist aber eine etwas stärkere Bedingung als Abgeschlossenheit unter der disjunkten Summe für $\mathcal{A}$ nötig:

Definition 2.1.4 ((Erbliche) Abgeschlossenheit)
(i) Eine Menge $\mathcal{O}$ von Stellungen heißt *erblich abgeschlossen*, falls für alle $S \in \mathcal{O}$ und für jede Option S' von S gilt: $S' \in \mathcal{O}$.
(ii) Eine Menge $\mathcal{O}$ von Stellungen heißt *abgeschlossen*, wenn sie sowohl erblich abgeschlossen als auch abgeschlossen unter der disjunkten Summe ist.

Bemerkung 2.1.5 Falls $\mathcal{O}$ die Menge aller Stellungen ist, die in einem Oktalspiel vorkommen, dann ist $\mathcal{O}$ abgeschlossen.

Unsere Annahme bis zum Ende des Kapitels ist nun also, dass jedes $\mathcal{A}$, das in diesem Kapitel vorkommt, abgeschlossen ist.

Definition 2.1.6 (Summe von Äquivalenzklassen modulo $\approx_{\mathcal{A}}$) Seien $[S]_{\mathcal{A}}, [T]_{\mathcal{A}}$ Äquivalenzklassen modulo $\approx_{\mathcal{A}}$.

Die Summe von $[S]_{\mathcal{A}}$ und $[T]_{\mathcal{A}}$, $[S]_{\mathcal{A}} + [T]_{\mathcal{A}}$, ist wie folgt definiert:

$$[S]_{\mathcal{A}} + [T]_{\mathcal{A}} := [S + T]_{\mathcal{A}}.$$

Da wir ja festgelegt haben, dass $\mathcal{A}$ abgeschlossen ist, gilt der folgende Satz:

Satz 2.1.7 $(\mathcal{A}_{\approx_{\mathcal{A}}}, +)$ *ist ein kommutatives Monoid*

Beweis. Wir zeigen die für ein kommutatives Monoid nötigen Eigenschaften:

- *Wohldefiniertheit*: Seien $S, T, R \in \mathcal{A}$ mit $S \approx_{\mathcal{A}} T$. Es gilt:

$\sigma^-(S + \underbrace{R + X}_{\in \mathcal{A}}) = \sigma^-(T + \underbrace{R + X}_{\in \mathcal{A}})$ für alle $X \in \mathcal{A}$.

Also: $S + R \approx_{\mathcal{A}} T + R$. (3)

Seien nun $U, \tilde{U}, V, \tilde{V} \in \mathcal{A}$ mit $U \approx_{\mathcal{A}} \tilde{U}$ und $V \approx_{\mathcal{A}} \tilde{V}$.

Mit zweimaliger Anwendung von (3) folgt zusammen mit der Kommutativität der disjunkten Summe:

$U + V \approx_{\mathcal{A}} \tilde{U} + V \approx_{\mathcal{A}} \tilde{U} + \tilde{V}$ bzw. $[U + V]_{\mathcal{A}} = [\tilde{U} + \tilde{V}]_{\mathcal{A}}$.

- *Abgeschlossenheit*: Seien $[S]_{\mathcal{A}}, [T]_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_{\approx_{\mathcal{A}}}$. Dann gilt: $S, T \in \mathcal{A}$.

Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter der disjunkten Summe. Damit folgt: $S + T \in \mathcal{A}$.

Und letztlich: $([S]_{\mathcal{A}} + [T]_{\mathcal{A}}) := [S + T]_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_{\approx_{\mathcal{A}}}$.

• *Assoziativität*: Seien $[S]_\mathcal{A}, [T]_\mathcal{A}, [U]_\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{\approx_\mathcal{A}}$. Dann gilt: $S, T, U \in \mathcal{A}$.

Mit der Assoziativität der disjunkten Summe folgt:

$\sigma^-(S + (T + U) + X) = \sigma^-((S + T) + U + X)$ für alle $X \in \mathcal{A}$.

Damit: $S + (T + U) \approx_\mathcal{A} (S + T) + U$.

Und letztlich: $[S]_\mathcal{A} + ([T]_\mathcal{A} + [U]_\mathcal{A}) := [S + (T + U)]_\mathcal{A} = [(S + T) + U]_\mathcal{A} =: ([S]_\mathcal{A} + [T]_\mathcal{A}) + [U]_\mathcal{A}$.

• *Neutrales Element*: Wenn $\mathcal{A}$ abgeschlossen ist, ist $\mathcal{A}$ erblich abgeschlossen. Daraus folgt $0 \in \mathcal{A}$ und $[0]_\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{\approx_\mathcal{A}}$.

0 ist das neutrale Element bezüglich der disjunkten Summe modulo $\approx_\mathcal{A}$, das heißt:

$S + 0 \approx_\mathcal{A} S$ für alle $S \in \mathcal{A}$,

denn wegen Bemerkung 1.2.11 gilt:

$\sigma^-(S + 0 + X) = \sigma^-(S + X)$ für alle $X \in \mathcal{A}$, für alle $S \in \mathcal{A}$.

Das heißt: $[S]_\mathcal{A} + [0]_\mathcal{A} := [S + 0]_\mathcal{A} = [S]_\mathcal{A}$ für alle $[S]_\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{\approx_\mathcal{A}}$.

• *Kommutativität*: Seien $[S]_\mathcal{A}, [T]_\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{\approx_\mathcal{A}}$. Dann gilt: $S, T \in \mathcal{A}$.

Mit der Kommutativität der disjunkten Summe folgt:

$\sigma^-(S + T + X) = \sigma^-(T + S + X)$ für alle $X \in \mathcal{A}$.

Damit: $S + T \approx_\mathcal{A} T + S$.

Und letztlich: $[S]_\mathcal{A} + [T]_\mathcal{A} := [S + T]_\mathcal{A} = [T + S]_\mathcal{A} =: [T]_\mathcal{A} + [S]_\mathcal{A}$. □

Bemerkung 2.1.8 Wir bezeichnen das kommutative Monoid $(\mathcal{A}_{\approx_\mathcal{A}}, +)$ als

$$\mathcal{Q}_\mathcal{A} := \{[S]_\mathcal{A} : S \in \mathcal{A}\}.$$

Für $S, T \in \mathcal{A}$, mit $S \approx_\mathcal{A} T$, folgt wegen $0 \in \mathcal{A}$ (aus der erblichen Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$): $\sigma^-(S + 0) = \sigma^-(T + 0)$.
Daraus folgt:

$$S \text{ ist eine } \mathcal{P}\text{-Stellung} \Leftrightarrow T \text{ ist eine } \mathcal{P}\text{-Stellung.}$$

Damit können wir die Teilmenge $\mathcal{P}_\mathcal{A} \subset \mathcal{Q}_\mathcal{A}$ wie folgt definieren:

$$\mathcal{P}_\mathcal{A} := \{[S]_\mathcal{A} : S \in \mathcal{A} \text{ ist eine } \mathcal{P}\text{-Stellung}\}.$$

Definition 2.1.9 (Misere Quotient) Das Paar $(\mathcal{Q}_\mathcal{A}, \mathcal{P}_\mathcal{A})$ heißt der *Misere Quotient* von $\mathcal{A}$ und wir bezeichnen ihn als $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$.
Dabei heißt $\mathcal{Q}_\mathcal{A}$ der *$\mathcal{Q}$-Teil* des *Misere Quotienten* von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{P}_\mathcal{A}$ der *$\mathcal{P}$-Teil* des *Misere Quotienten* von $\mathcal{A}$.

Bemerkung 2.1.10 Im Misere Spiel bilden gemäß Satz 2.1.7 die Äquivalenzklassen modulo $\approx_\mathcal{A}$ ein kommutatives Monoid, welches der $\mathcal{Q}$-Teil des Misere Quotienten von $\mathcal{A}$ ist. Es stellt sich nun die Frage, wie Äquivalenzklassen modulo $\approx_\mathcal{A}$ im normalen Spiel zu interpretieren sind:
Falls $\mathcal{A}$ also im normalen Spiel gespielt wird (und demnach alle Begriffe im Abschnitt 2.1 mit dem normalen Ausgang anstatt dem Misere Ausgang definiert werden), dann entsprechen die Äquivalenzklassen modulo $\approx_\mathcal{A}$ genau den Grundy-Werten der Stellungen, die in $\mathcal{A}$ vorkommen (siehe Theorem 1.3.8).

2.2 Beispiel für einen Misere Quotienten

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns ausschließlich mit der Menge an Stellungen

$$\mathcal{A} := \{(m \cdot *, 0.\overline{3}) + (n \cdot *2, 0.\overline{3}) : m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Alle Ergebnisse dieses Abschnitts sind also in diesem Kontext zu betrachten.

Untersuchung 2.2.1 In dieser Untersuchung versuchen wir die Äquivalenzklassen modulo $\approx_{\mathcal{A}}$ zu berechnen:

- $* \not\approx_{\mathcal{A}} 0$, da $0 \in \mathcal{A}$ gilt und $* + 0 \overset{m}{\approx} *$ eine $\mathcal{P}$-Stellung und $0 + 0 \overset{m}{\approx} 0$ eine $\mathcal{N}$-Stellung ist (siehe Beispiel 1.2.9).
- $*2 \not\approx_{\mathcal{A}} *$, da $0 \in \mathcal{A}$ gilt und $*2 + 0 \overset{m}{\approx} *2$ eine $\mathcal{N}$-Stellung ist und $* + 0 \overset{m}{\approx} *$ eine $\mathcal{P}$-Stellung ist (siehe Beispiel 1.2.9).
Weiter ist $*2 \not\approx_{\mathcal{A}} 0$, denn für $X = *2 \in \mathcal{A}$ ist $*2 + X = *2 + *2$ eine $\mathcal{P}$-Stellung (siehe Proposition 1.4.3), aber $0 + X \overset{m}{\approx} *2$ ist eine $\mathcal{N}$-Stellung (siehe Beispiel 1.2.9).
- $*2 + * \not\approx_{\mathcal{A}} *$, da $0 \in \mathcal{A}$ gilt und $* + 0 \overset{m}{\approx} *$ eine $\mathcal{P}$-Stellung ist (siehe Beispiel 1.2.9) und $*2 + * + 0 \overset{m}{\approx} *2 + *$ eine $\mathcal{N}$-Stellung ist, denn wenn der $\mathcal{N}$-Spieler beide Steine des $*2$-Haufens entfernt, dann muss der $\mathcal{P}$-Spieler im nächsten Spielzug den einzigen Stein des $*$-Haufens entfernen, welcher gleichzeitig der letzte Stein der gesamten Spiels ist. Somit gewinnt der $\mathcal{N}$-Spieler das Spiel.
Weiter ist $*2 + * \not\approx_{\mathcal{A}} 0$, denn für $X = * \in \mathcal{A}$ ist $*2 + * + X = *2 + * + *$ eine $\mathcal{N}$-Stellung, vgl. die folgende Baumform:

$*2 \; * \; *$

$* \; * \qquad * \; * \; * \qquad *2 \; *$

Der $\mathcal{N}$-Spieler kann die Option $* + * + *$ wählen, welche selbst eine $\mathcal{P}$-Stellung ist, denn die beiden Spieler müssen mit ihren Spielzügen abwechselnd jeweils einen $*$-Haufen entfernen, wodurch der $\mathcal{P}$-Spieler das Misere Spiel gewinnt. Daraus folgt, dass $*2 + * + *$ eine $\mathcal{N}$-Stellung ist. Jedoch ist $0 + X = 0 + * \overset{m}{\approx} *$ eine $\mathcal{P}$-Stellung (siehe Beispiel 1.2.9).
Weiter ist $*2 + * \not\approx_{\mathcal{A}} *2$, denn für $X = *2 \in \mathcal{A}$ ist $*2 + * + X = *2 + * + *2$ eine $\mathcal{N}$-Stellung, vgl. die folgende Baumform:

$*2 \; * \; *2$

$*2 \; * \qquad *2 \; * \; * \qquad *2 \; *2$

Der $\mathcal{N}$-Spieler kann die Option $*2 + *2$ wählen, welche selbst eine $\mathcal{P}$-Stellung ist (siehe Proposition 1.4.3). Daraus folgt, dass $*2 + *2 + *$ eine $\mathcal{N}$-Stellung ist. Jedoch ist $*2 + X = *2 + *2$ eine $\mathcal{P}$-Stellung (siehe Proposition 1.4.3).

Damit haben wir vier Äquivalenzklassen modulo $\approx_{\mathcal{A}}$:

$[0]$	$\mathcal{N}$-Stellung
$[*]$	$\mathcal{P}$-Stellung
$[*2]$	$\mathcal{N}$-Stellung
$[*2 + *]$	$\mathcal{N}$-Stellung

Zusätzlich zu diesen findet man noch folgende:

• $*2 + *2$ ist eine $\mathcal{P}$-Stellung (siehe Proposition 1.4.3) und ist somit entweder $\mathcal{A}$-äquivalent zu $*$ oder eine neue Äquivalenzklasse modulo $\approx_{\mathcal{A}}$.
Es gilt $*2 + *2 \not\approx_{\mathcal{A}} *$, denn für $X = (*2 + *2) \in \mathcal{A}$ ist $* + X = * + (*2 + *2)$ eine $\mathcal{N}$-Stellung (siehe oben). Jedoch ist $*2 + *2 + X = *2 + *2 + *2 + *2$ eine $\mathcal{P}$-Stellung (siehe Proposition 1.4.5).
Das bedeutet, dass $*2 + *2$ eine neue Äquivalenzklasse modulo $\approx_{\mathcal{A}}$ ist.
• Mit ähnlicher Argumentation kann man zeigen, dass $*2 + *2 + *$ eine weitere Äquivalenzklasse modulo $\approx_{\mathcal{A}}$ ist.

Wir haben also insgesamt mindestens sechs Äquivalenzklassen modulo $\approx_{\mathcal{A}}$:

$[0]$	$\mathcal{N}$-Stellung
$[*]$	$\mathcal{P}$-Stellung
$[*2]$	$\mathcal{N}$-Stellung
$[*2 + *]$	$\mathcal{N}$-Stellung
$[*2 + *2]$	$\mathcal{P}$-Stellung
$[*2 + *2 + *]$	$\mathcal{N}$-Stellung

Wir zeigen nun, dass diese sechs Äquivalenzklassen modulo $\approx_{\mathcal{A}}$ die Einzigen sind.

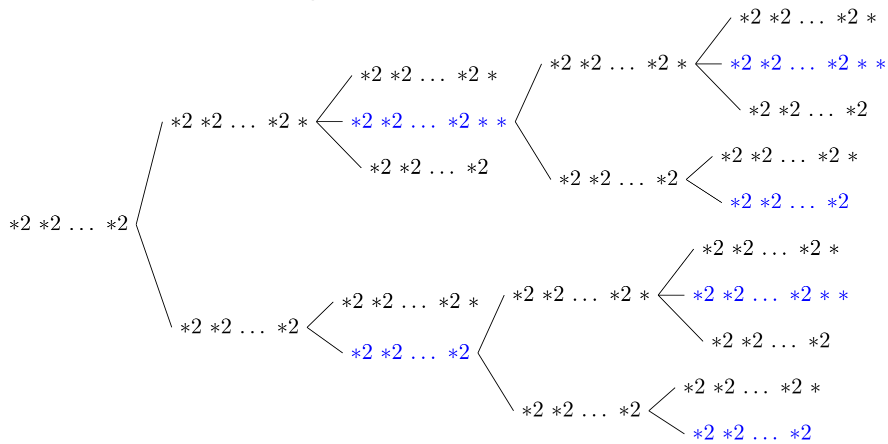
Satz 2.2.2 *Sei $n \geq 1$. Dann gilt:*

$$n \cdot *2 \text{ ist eine } \mathcal{P}\text{-Stellung} \Leftrightarrow n \text{ ist gerade.}$$

Beweis. Ausgearbeitet auf Grundlage von [1], Lemma 2.12.
" $\Leftarrow$ " : Wenn n gerade ist, dann kann der $\mathcal{P}$-Spieler die Stellung $n \cdot *2$ gewinnen, indem er mit seinem m-ten Spielzug dafür sorgt, dass die von ihm hervorgerufene Stellung ausschließlich von der Form

$$(n - 2m) \cdot *2$$

ist.
Betrachten wir die Stellung in Baumform:



Aufgrund von Proposition 1.4.4 gilt

$$*2 + *2 + \cdots + *2 + * + * \overset{m}{\approx} *2 + *2 + \cdots + *2 + 0 \overset{m}{\approx} *2 + *2 + \cdots + *2.$$

Die Strategie entspricht also immer der blauen Option in obiger Baumform.
Bei einer Weiterführung des obigen Spielbaums wird schnell klar, dass jede dieser blauen Optionen immer denselben Spielbaum hat.
Schließlich wird der $\mathcal{P}$-Spieler mit seinem $\frac{n-2}{2}$-ten Spielzug die Stellung $*2+*2$ hinterlassen, welche gemäß Proposition 1.4.3 eine $\mathcal{P}$-Stellung ist.
" $\Rightarrow$ " : Wir zeigen die Kontraposition dieser Richtung, also die folgende Aussage:

$$n \text{ ist ungerade} \Rightarrow n \cdot *2 \text{ ist eine } \mathcal{N}\text{-Stellung.}$$

Sei n ungerade.
Fall 1: Angenommen $n \geq 3$. Dann kann der $\mathcal{N}$-Spieler die Stellung $n \cdot *2$ gewinnen, indem er die Option $(n-1) \cdot *2$ wählt, welche eine $\mathcal{P}$-Stellung ist, da $(n-1)$ gerade ist (siehe " $\Leftarrow$ ").
Fall 2: Angenommen $n = 1$, somit betrachten wir die Stellung $*2$. Diese ist gemäß Beispiel 1.2.9 eine $\mathcal{N}$-Stellung. □

Satz 2.2.3 *Sei $n \geq 1$. Dann gilt:*

$$n \cdot *2 + * \text{ ist eine } \mathcal{N}\text{-Stellung.}$$

Beweis. Ausgearbeitet auf Grundlage von [1], Lemma 2.13.
Fall 1: Angenommen n ist gerade. Dann kann der $\mathcal{N}$-Spieler $n \cdot *2 + *$ gewinnen, indem er die Option $n \cdot *2$ wählt, welche laut Satz 2.2.2 eine $\mathcal{P}$-Stellung ist.
Fall 2: Sei n ungerade.
Fall 2.1: Angenommen $n \geq 3$. Dann kann der $\mathcal{N}$-Spieler $n \cdot *2 + *$ gewinnen, indem er die Option $(n-1) \cdot *2 + * + * \overset{m}{\approx} (n-1) \cdot *2 + 0 \overset{m}{\approx} (n-1) \cdot *2$ wählt, welche wiederum ein $\mathcal{P}$-Stellung ist, da $(n-1)$ gerade ist (siehe Satz 2.2.2).
Fall 2.2: Angenommen $n = 1$. Dann kann der $\mathcal{N}$-Spieler $n \cdot *2 + *$ gewinnen, indem er die Option $*$ wählt, welche eine $\mathcal{P}$-Stellung ist (siehe Beispiel 1.2.9).
Damit sind alle möglichen Fälle bearbeitet. □

Korollar 2.2.4 *Sei die Stellung $S \overset{m}{\approx} m \cdot * + n \cdot *2$ und die Stellung $T \overset{m}{\approx} m' \cdot * + n' \cdot *2$. Falls $n \geq 1$, dann hängt $\sigma^-(S+T)$ nur von den Paritäten von $m+m'$ und $n+n'$ ab.*

Beweis. Ausgearbeitet auf Grundlage von [1], Corollary 2.14.
Es gilt:

$$\begin{aligned} S+T \overset{m}{\approx} m \cdot * + n \cdot *2 + m' \cdot * + n' \cdot *2 \overset{m}{\approx} (m+m') \cdot * + (n+n') \cdot *2 = \\ k_1 \cdot * + k_2 \cdot *2, \text{ wobei } (m+m') := k_1 \text{ und } (n+n') := k_2. \end{aligned}$$

Wegen $n \geq 1$ gilt auch $k_2 \geq 1$ (, womit die Voraussetzung der Sätze 2.2.2 und 2.2.3 erfüllt ist und diese in der folgenden Fallunterscheidung angewendet werden dürfen):
Fall 1: Angenommen k_1 ist gerade und k_2 ist ungerade. Dann gilt mit Proposition 1.4.4

$$k_1 \cdot * + k_2 \cdot *2 = (*+*) + (*+*) + \cdots + (*+*) + k_2 \cdot *2 \overset{m}{\approx} 0+0+\cdots+0+k_2 \cdot *2 \overset{m}{\approx} k_2 \cdot *2.$$

$k_2 \cdot *2$ ist gemäß Satz 2.2.2 eine $\mathcal{N}$-Stellung, da k_2 ungerade ist.
Fall 2: Angenommen k_1 ist gerade und k_2 ist gerade. Dann gilt mit Proposition 1.4.4

$k_1 \cdot * + k_2 \cdot *2 = (* + *) + (* + *) + \cdots + (* + *) + k_2 \cdot *2 \overset{m}{\approx} 0 + 0 + \cdots + 0 + k_2 \cdot *2 \overset{m}{\approx} k_2 \cdot *2.$

$k_2 \cdot *2$ ist gemäß Satz 2.2.2 eine $\mathcal{P}$-Stellung, da k_2 gerade ist.
Fall 3: Angenommen k_1 ist ungerade und k_2 ist beliebig. Dann gilt mit Proposition 1.4.4

$k_1 \cdot * + k_2 \cdot *2 = (* + *) + (* + *) + \cdots + (* + *) + * + k_2 \cdot *2 \overset{m}{\approx}$
$0 + 0 + \cdots + 0 + * + k_2 \cdot *2 \overset{m}{\approx} * + k_2 \cdot *2.$

$* + k_2 \cdot *2$ ist gemäß Satz 2.2.3 eine $\mathcal{N}$-Stellung. □

Korollar 2.2.5 *Sei die Stellung* $S \overset{m}{\approx} m' \cdot * + n' \cdot *2$ *und die Stellung* $T \overset{m}{\approx} m'' \cdot * + n'' \cdot *2$. *Falls* $n', n'' \geq 1, m' \equiv m''$ *mod* 2 *und* $n' \equiv n''$ *mod* 2, *dann gilt:*

$$S \approx_{\mathcal{A}} T.$$

Beweis. Wir wollen zeigen:

$$\sigma^-(S + X) = \sigma^-(T + X) \text{ für alle } X \in \mathcal{A}.$$

Also:
$\sigma^-(m' \cdot * + n' \cdot *2 + m \cdot * + n \cdot *2) = \sigma^-(m'' \cdot * + n'' \cdot *2 + m \cdot * + n \cdot *2) \Leftrightarrow$
$\sigma^-((m' + m) \cdot * + (n' + n) \cdot *2) = \sigma^-((m'' + m) \cdot * + (n'' + n) \cdot *2) \Leftrightarrow$
$\sigma^-(k_1 \cdot * + k_2 \cdot *2) = \sigma^-(k_1' \cdot * + k_2' \cdot *2),$ (2)
wobei $(m' + m) =: k_1, (n' + n) =: k_2, (m'' + m) =: k_1'$ und $(n'' + n) =: k_2'$.

Mit der Voraussetzung gilt:
$m' \equiv m''$ mod 2 $\Rightarrow k_1 \equiv k_1'$ mod 2,
$n' \equiv n''$ mod 2 $\Rightarrow k_2 \equiv k_2'$ mod 2.
Damit:
k_1 gerade bzw. ungerade $\Rightarrow k_1'$ gerade bzw. ungerade,
k_2 gerade bzw. ungerade $\Rightarrow k_2'$ gerade bzw. ungerade.
Dadurch folgt die Gleichheit in (2), da der Misere Ausgang der beiden Stellungen $k_1 \cdot * + k_2 \cdot *2$ und $k_1' \cdot * + k_2' \cdot *2$, gemäß der Fallunterscheidung im *Beweis* von Korollar 2.2.4, der Gleiche ist, wenn *sowohl* die Paritäten von k_1 und k_1' übereinsimmen *als auch* die Paritäten von k_2 und k_2' übereinstimmen, was hier somit der Fall ist. □

Lemma 2.2.6 *Sei die Stellung* $S \overset{m}{\approx} m \cdot *$.
(i) Falls $m \equiv 0$ *mod* 2, *dann gilt:* $S \approx_{\mathcal{A}} 0$.
(ii) Falls $m \equiv 1$ *mod* 2, *dann gilt:* $S \approx_{\mathcal{A}} *$.

Beweis. (i): Es gilt $m \equiv 0$ mod 2. Somit ist m also gerade. Daraus folgt mit Proposition 1.4.4

$$m \cdot * = (* + *) + (* + *) + \cdots + (* + *) \overset{m}{\approx} 0 + 0 + \cdots + 0 \overset{m}{\approx} 0.$$

Und damit: $m \cdot * \approx_{\mathcal{A}} 0$.

(ii): Es gilt $m \equiv 1$ mod 2. Somit ist m also ungerade. Daraus folgt mit Proposition 1.4.4

$$m \cdot * = (* + *) + (* + *) + \cdots + (* + *) + * \overset{m}{\approx} 0 + 0 + \cdots + 0 + * \overset{m}{\approx} *.$$

Und damit: $m \cdot * \approx_{\mathcal{A}} *$. $\square$

Satz 2.2.7 *Es gibt genau sechs Äquivalenzklassen modulo $\approx_{\mathcal{A}}$.*

Beweis. Ausgearbeitet auf Grundlage von [1], Corollary 2.16.
Sei $S \in \mathcal{A}$, das heißt:

$$S \overset{m}{\approx} m \cdot * + n \cdot *2.$$

Fall 1: Angenommen $n \geq 1$. Dann ist S, gemäß Korollar 2.2.5, $\mathcal{A}$-äquivalent zu

$$m' \cdot * + n' \cdot *2 \text{ für ein } (m', n') \in \{0, 1\} \times \{1, 2\}.$$

Daraus folgt:

$$|\{[S]_{\mathcal{A}} : S \text{ aus } \textit{Fall 1}\}| \leq 4.$$

Fall 2: Angenommen $n = 0$. Dann gilt:

$$S \overset{m}{\approx} m \cdot *.$$

S ist dann, gemäß Lemma 2.2.6, $\mathcal{A}$-äquivalent zu

$$m' \cdot * \text{ für ein } m' \in \{0, 1\}.$$

Daraus folgt:

$$|\{[S]_{\mathcal{A}} : S \text{ aus } \textit{Fall 2}\}| \leq 2.$$

Insgesamt (aus *Fall 1* und *Fall 2*) folgt dann:

$$|\{[S]_{\mathcal{A}} : S \in \mathcal{A}\}| \leq 6.$$

Wir hatten am Anfang des Abschnitts sechs paarweise verschiedene Äquivalenzklassen modulo $\approx_{\mathcal{A}}$ gefunden. Daraus folgt:

$$|\{[S]_{\mathcal{A}} : S \in \mathcal{A}\}| \geq 6.$$

Somit ist klar, dass es genau sechs Äquivalenzklassen modulo $\approx_{\mathcal{A}}$ gibt. $\square$

Daraus folgt, dass wir in Untersuchung 2.2.1 bereits alle Äquivalenzklassen modulo $\approx_{\mathcal{A}}$ gefunden hatten.
Der Misere Quotient $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ hat somit die folgende Gestalt:

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} = \{[0], [*], [*2], [*2 + *], [*2 + *2], [*2 + *2 + *]\}, \mathcal{P}_{\mathcal{A}} = \{[*], [*2 + *2]\}.$$

Dieser Misere Quotient $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ wird auch $\mathcal{T}_2$ genannt (mehr dazu in Abschnitt 2.3).

2.3 Zahmheit

Definition 2.3.1 Seien $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ kommutative Monoide und $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}, \mathcal{P}' \subset \mathcal{Q}'$. Die beiden Paare $(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ und $(\mathcal{Q}', \mathcal{P}')$ heißen *isomorph* zueinander, falls es einen Monoid-Isomorphismus $\phi : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ gibt, bei dem für alle $S \in \mathcal{Q}$ gilt:

$$S \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \phi(S) \in \mathcal{P}'.$$

Beispiel 2.3.2 Betrachten wir nun noch einmal den Misere Quotienten $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ bzw. $(\mathcal{Q}_\mathcal{A}, \mathcal{P}_\mathcal{A})$ aus dem Abschnitt 2.2.
Weiter sei

$\mathcal{Q}' = \langle a, b : a^2 = 1, b^3 = b \rangle = \{1, a, b, ab, b^2, ab^2\}$.

ein kommutatives Monoid mit der Teilmenge

$\mathcal{P}' = \{a, b^2\} \subset \mathcal{Q}'$.

In $\mathcal{Q}_\mathcal{A}$ ist sowohl $[*] + [*] = [0]$ (siehe Proposition 1.4.4) als auch $[*2] + [*2] + [*2] = [*2]$ (siehe Korollar 2.2.5) der Fall.
Damit ist ersichtlich, dass $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ isomorph zu $(\mathcal{Q}', \mathcal{P}')$ ist.

Definition 2.3.3 Sei S eine Stellung. Die Menge $sub(S)$ ist definiert als

$$\{S' : S' \text{ ist eine Stellung im Spielbaum von } S\}.$$

Definition 2.3.4 ((Erblicher) Abschluss) Sei $\mathcal{O}$ eine Menge von Stellungen. Der *erbliche Abschluss* von $\mathcal{O}$, $hcl(\mathcal{O})$, ist definiert als

$$\bigcup_{S \in \mathcal{O}} sub(S).$$

Der *Abschluss* von $\mathcal{O}$, $cl(\mathcal{O})$, ist definiert als

$$\{\sum_{i=0}^{j} S_i : S_0, \ldots, S_j \in hcl(\mathcal{O}), j \in \mathbb{N}\}.$$

Proposition 2.3.5 Es gilt in $0.\overline{3}$:

$$cl(\{*2\}) \text{ entspricht der Menge } \{m \cdot * + n \cdot *2 : m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis. Wir haben:

$hcl(\{*2\}) = \bigcup_{S \in \{*2\}} sub(S) = sub(*2) = \{0, *, *2\}$.

Und mit Proposition 1.4.2 gilt:

$cl(\{*2\}) = \{\sum_{i=0}^{j} S_i : S_0, \ldots, S_j \in \{0, *, *2\}, j \in \mathbb{N}\} =$

$\{l \cdot 0 + m \cdot * + n \cdot *2 \overset{m}{\approx} m \cdot * + n \cdot *2 : l, m, n \in \mathbb{N}\}$.

□

Bemerkung 2.3.6 Sei S eine Stellung.
Wir bezeichnen $\mathcal{Q}(cl(\{S\}))$ meist als $\mathcal{Q}(S)$.

Bemerkung 2.3.7 Wie in Abschnitt 2.2 bewegen wir uns in $0.\overline{3}$.
Wir setzen:

$\mathcal{T}_0 = \mathcal{Q}(0)$,
$\mathcal{T}_n = \mathcal{Q}(*2^{n-1})$ für $n \geq 1$,
$\mathcal{T}_\infty = \mathcal{Q}(0, *, *2, *3, \dots) = \mathcal{Q}(\mathcal{A})$,
mit $\mathcal{A} := \{S : S$ ist eine Stellung in Misere *NIM*$\}$.

Wir haben dann:

$\mathcal{T}_0$ ist isomorph zu $(\{1\}, \emptyset)$,
$\mathcal{T}_1$ ist isomorph zu $(\langle a : a^2 = 1\rangle = \{1, a\}, \{a\})$,
$\mathcal{T}_2$ ist isomorph zu $(\langle a, b : a^2 = 1, b^3 = b\rangle, \{a, b^2\})$,
$\mathcal{T}_n$ ist isomorph zu $(\langle a, b_1, b_2, \dots, b_{n-1} : a^2 = 1,$
$b_1^3 = b_1, b_2^3 = b_2, \dots, b_{n-1}^3 = b_{n-1}, b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = \dots = b_{n-1}^2\rangle, \{a, b_1^2\})$,
$\mathcal{T}_\infty$ ist isomorph zu $(\langle a, b_1, b_2, \dots : a^2 = 1,$
$b_1^3 = b_1, b_2^3 = b_2, \dots, b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = \dots\rangle, \{a, b_1^2\})$.

Die Misere Quotienten $\mathcal{T}_n$ stehen in Zusammenhang mit einer bedeutenden Eigenschaft, welche als *Zahmheit* bezeichnet wird:

Definition 2.3.8 (Zahmheit) Eine Menge $\mathcal{A}$ von Stellungen heißt *zahm*, falls der Misere Quotient von $\mathcal{A}$ isomorph zu $\mathcal{T}_n$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist. Ansonsten heißt $\mathcal{A}$ *wild*.

Interpretation: Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Stelllungen eines beliebigen Oktalspiels. Grob gesagt wird $\mathcal{A}$ als *zahm* bezeichnet, wenn die gewinnbringende Strategie im Misere Spiel von diesem Oktalspiel beschrieben werden kann durch die gewinnbringende Strategie von Misere *NIM* aus Bemerkung 1.4.6.

3 Analyse von Chomp

3.1 Was ist Chomp?

Chomp ist ein neutrales kombinatorisches Spiel im Misere Spiel, das man wie folgt darstellen kann:
Betrachten wir eine $m \times n$ -Matrix als Schokoladentafel und ihre Einträge als deren Stücke, wobei das Stück (bzw. der Eintrag) *(1,1)* giftig ist.
Spieler wählen abwechselnd ein verbleibendes Stück der Schokoladentafel. Mit der Wahl eines Stücks *(i,j)* müssen die Spieler gleichzeitig alle noch vorhandenen Stücke *(l,k)* $\in \{i, \dots, m\} \times \{j, \dots, n\}$ essen bzw. entfernen.
Der Spieler, der das giftige Stück isst, verliert das Spiel. Natürlich wird kein Spieler das giftige Stück freiwillig essen. Ein Spieler, der gewinnen möchte, wird das giftige Stück also nur dann essen, wenn er vom Gegner dazu gezwungen wird.

Chomp lässt sich nicht in die Klasse der Oktalspiele einordnen.
Eine Stellung in Chomp hat deswegen eine andere Gestalt als in Definition 1.2.4:

Definition 3.1.1 (Stellung) Seien $s_1, s_2, \dots, s_m \in \mathbb{N}$ und außerdem $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m \geq 0$. Dann heißt das m - Tupel

$$(s_1, s_2, \dots, s_m)$$

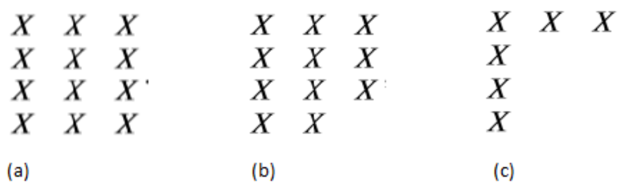
eine *Stellung.*

Interpretation: Eine *Stellung* $(s_1, s_2, \dots, s_m)$ beschreibt eine Spiellage in Chomp mit einer $m \times n$ Schokoladentafel. Sie gibt an, welche Stücke der Schokoladentafel im Moment noch nicht gegessen sind. Hierbei entspricht s_k der Anzahl der Stücke in der k-ten Zeile der Schokoladentafel.

Ein Stück, welches ein Spieler zum Essen wählt, bezeichnen wir als *(i,j).*

Beispiel 3.1.2 Seien $m = 4$ und $n = 3$, dann haben wir eine Ausgangslage wie in Grafik(3)(a).

Grafik(3)



Wenn der $\mathcal{N}$-Spieler das Stück *(4,3)* wählt, dann hinterlässt er Grafik(3)(b), also die Stellung $(3, 3, 3, 2)$. Falls er das Stück *(2,2)* wählt, dann hinterlässt er Grafik(3)(c), also die Stellung $(3, 1, 1, 1)$, etc.

Bemerkung 3.1.3 Chomp ist also kein Oktalspiel. Die Theorie aus den Kapiteln 1 und 2 kann aber mit Definition 3.1.1 auf Chomp übertragen werden. Es wäre also durchaus interessant den Misere Quotienten von Chomp mit einer

bestimmten $m \times n$ Schokoladentafel zu finden.
Die Menge aller möglichen Stellungen von einem solchen Spiel ist

$$\mathcal{A}' := hcl(\{(n, n, \ldots, n)\}).$$

Die Menge $\mathcal{A}'$ ist zwar erblich abgeschlossen, aber nicht abgeschlossen unter der disjunkten Summe. Die Menge

$$\mathcal{A} := cl(\{(n, n, \ldots, n)\})$$

besteht aus endlichen disjunkten Summen von Elementen aus $\mathcal{A}'$ und ist sowohl erblich abgeschlossen als auch abgeschlossen unter der disjunkten Summe. Hierzu gibt es also einen Misere Quotienten.
Dieser Misere Quotient, $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{Q}((n, n, \ldots, n))$, bezieht sich aber nicht auf das Spiel

Chomp mit einer $m \times n$ Schokoladentafel

sondern auf das

Parallele Spielen von k Chomp mit $m \times n$ Schokoladentafeln, $k \in \mathbb{N}$.

Dies ist wenig aufschlussreich, da wir lediglich *Chomp mit einer $m \times n$ Schokoladentafel* untersuchen wollten.
Es gibt zwar eine Methode, die den gewünschten Misere Quotienten berechnen kann (siehe [8]). Diese basiert aber auf einer unüblichen Herangehensweise an neutrale kombinatorische Spiele, auf welche wir aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht näher eingehen.

Chomp ist offensichtlich in unterschiedlichen Varianten spielbar, je nachdem welche Matrix als Schokoladentafel gewählt wird. Wir werden uns mit einigen Varianten auseinandersetzen und genau untersuchen, welche Stellungen $\mathcal{P}$- bzw. $\mathcal{N}$-Stellungen sind.
Bevor wir damit beginnen, widmen wir uns einem eher theoretischen Argument, welches auch als *Strategiediebstahl* bekannt ist:

Satz 3.1.4 *Für jede $m \times n$ Schokoladentafel, außer einer 1×1 Schokoladentafel, hat der $\mathcal{N}$-Spieler eine gewinnbringende Strategie.*

Beweis. Ausgearbeitet auf Grundlage von [4], p.169.
Angenommen der $\mathcal{P}$-Spieler hat eine gewinnbringende Strategie, egal was der $\mathcal{N}$-Spieler mit dem allerersten Spielzug des Spiels macht. Nehmen wir dann an, dass der $\mathcal{N}$-Spieler mit seinem allerersten Spielzug das Stück *(m,n)* wählt. Mit unserer Annahme hat der $\mathcal{P}$-Spieler einen Antwortspielzug, mit dem er zum Sieg kommen kann. Aber wenn ein solcher gewinnbringender Spielzug existiert, dann hätte der $\mathcal{N}$-Spieler diesen Spielzug schon als allerersten Spielzug gespielt und wäre damit zum Sieg gekommen. Der $\mathcal{P}$-Spieler kann also keine gewinnbringende Strategie haben. $\square$

Das Problem an Satz 3.1.4 ist es, dass eine allgemeine gewinnbringende Strategie für eine $m \times n$ Schokoladentafel unbekannt ist. Satz 3.1.4 ist also nicht konstruktiv. Beginnen wir nun mit der Untersuchung des Spiels bezüglich verschiedener Schokoladentafeln.

3.2 Chomp mit einer $m \times m$ Schokoladentafel

Bemerkung 3.2.1 Im Falle einer $m \times m$-Matrix als Schokoladentafel existiert eine triviale gewinnbringende Strategie für den $\mathcal{N}$-Spieler:
Wenn der $\mathcal{N}$-Spieler das Stück *(2,2)* wählt, dann bleibt nach seinem Spielzug eine "L"-förmige symmetrische Schokoladentafel. Dann wird der $\mathcal{N}$-Spieler gewinnen, indem er nach jedem Spielzug des $\mathcal{P}$-Spielers dessen Spielzug auf dem einen Arm des "L" auf dem anderen Arm des "L" kopiert.

3.3 Chomp mit einer $2 \times n$ Schokoladentafel

Ebenfalls trivial ist Chomp mit einer Schokoladentafel mit zwei Zeilen und beliebig vielen Spalten, wie man mit folgendem Satz feststellen kann:

Satz 3.3.1 *Es gilt:*
(i) Für jedes $a \geq 1$ ist $P_1(a) = (a, a-1)$ eine $\mathcal{P}$-Stellung.
(ii) Gilt $a \geq b \geq 0$ und $a - b \neq 1$, so ist $P_2(b) = (a, b)$ eine $\mathcal{N}$-Stellung.

Beweis. Ausgearbeitet auf Grundlage von [4], Proposition 0.
Wir beweisen beide Teile zusammen mit *vollständiger Induktion*:
Induktionsanfang: Wir haben für $a = 1$: $P_1(1) = (1, 0)$, das heißt die Schokoladentafel besteht nur aus dem gifigen Stück. Dies ist eine $\mathcal{P}$-Stellung, da der $\mathcal{N}$-Spieler das giftige Stück mit seinem Spielzug also essen muss.
Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir nehmen an: (i) mit $P_1(k)$ gilt für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.
Induktionsschritt: Wir betrachten $P_2(k')$ für $k' \in \{0, \dots, n\}$. Der $\mathcal{N}$-Spieler kann jede Stellung $P_2(k')$ mit seinem Spielzug in eine Stellung $P_1(k)$ mit $k \in \{1, \dots, n\}$ bringen:

- Im Fall $k' = a$, wählt der $\mathcal{N}$-Spieler einfach das Stück *(a,a)*.
- Im Fall $k' < a - 1$, wählt der $\mathcal{N}$-Spieler einfach das Stück *(1,k'+2)*.

Da laut *Induktionsannahme* $P_1(k)$ ein $\mathcal{P}$-Stellung ist, folgt, dass $P_2(k')$ eine $\mathcal{N}$-Stellung ist.
Insgesamt folgt also: (ii) mit $P_2(k')$ gilt für alle $k' \in \{0, \dots, n\}$. (4)
Nun betrachten wir $P_1(n+1) = (n+1, n)$. Die Optionen von $(n+1, n)$ sind $(n, n), (n-1, n-1), \dots, (1, 1), (0, 0)$ und $(n+1, n-1), (n+1, n-2), (n+1, n-3), \dots, (n+1, 0)$. All diese Stellungen erfüllen die Voraussetzungen von $P_2(k')$ aus (ii) mit $k' \in \{0, \dots, n\}$. All diese Stellungen sind also laut (4) $\mathcal{N}$-Stellungen. Wenn alle Optionen einer Stellung $\mathcal{N}$-Stellungen sind, dann ist die Stellung selbst natürlich eine $\mathcal{P}$-Stellung.
(i) gilt also für $P_1(n+1)$.
Damit folgt, dass $P_1(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und, wie im *Beweis* gezeigt, auch dass $P_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. □

Korollar 3.3.2 *Sei (a, b) eine Stellung. Dann ist der gewinnbringende Spielzug, bei $a = b$, die Schokoladentafel $(a, a-1)$ zu hinterlassen und, bei $a - b \geq 2$, die Schokoladentafel $(b+1, b)$ zu hinterlassen.*

Beweis. Folgt direkt aus Satz 3.3.1(i) □

Bemerkung 3.3.3 Mit Satz 3.3.1 folgt auch die gewinnbringende Strategie für Chomp mit einer $2 \times n$ Schokoladentafel: Die Ausgangsstellung eines solchen Spiels ist (n, n). Der $\mathcal{N}$-Spieler hat dann folgende gewinnbringende Strategie:

Bringe mit deinem Spielzug das Spiel in die Stellung $(a, a-1)$ für das $a \geq 1$, für das ein solcher Spielzug möglich ist.

Im *Beweis* von Satz 3.3.1 wurde nämlich gezeigt, dass der $\mathcal{N}$-Spieler das Spiel bei obiger Strategie in jedem Fall mit seinem Spielzug in eine Stellung $(a, a-1)$ für ein $a \geq 1$ bringen kann. Weil in jedem Spielzug Stücke entfernt werden, gilt mit obiger Strategie irgendwann $a = 1$, es entsteht also die Stellung $(1, 0)$ mit dem $\mathcal{P}$-Spieler am Zug, das heißt der $\mathcal{N}$-Spieler gewinnt das Spiel.

3.4 Chomp mit einer $3 \times n$ Schokoladentafel

Nicht mehr trivial ist Chomp mit einer Schokoladentafel mit drei Zeilen und beliebigen Spalten. Eine Stellung in diesem Spiel hat also folgende Form: (a, b, c) mit $a \geq b \geq c \geq 0$.

Untersuchung 3.4.1 Im Fall $c = 0$ sind wir wieder in Abschnitt 3.3.
Deswegen untersuchen wir zunächst den Fall $c = 1$ und welche Stellungen darin $\mathcal{P}$-Stellungen sind.
Wir wissen, dass $(b+1, b, 1)$ eine $\mathcal{N}$-Stellung ist, da die Wahl des $\mathcal{N}$-Spielers von *(3,1)* die Stellung $(b+1, b, 0)$ hinterlässt, welche laut Satz 3.3.1(i) eine $\mathcal{P}$-Stellung ist.
Wir wissen auch, dass $(1, 1, 1)$ und $(a, 0, 0), a > 1$, $\mathcal{N}$-Stellungen sind, da die $\mathcal{P}$-Stellung $(1, 0, 0)$ von ihnen aus erreichbar ist.
Aus Abschnitt 3.3 erfuhren wir, dass $(a, a, 0)$ und $(a, b, 0)$ mit $a - b \geq 2$ beide $\mathcal{N}$-Stelllungen sind.
Was sind die "kleinsten" $\mathcal{P}$-Stellungen mit $c \leq 1$?
Wir sehen, dass alle möglichen Stellungen mit vier Stücken, $(4, 0, 0), (3, 1, 0)$, $(2, 2, 0)$ und $(2, 1, 1)$, $\mathcal{N}$-Stellungen sind.
Unter den Stellungen mit fünf Stücken sind $(5, 0, 0)$ und $(4, 1, 0)$ $\mathcal{N}$-Stellungen, da erstere Stellung mit einem Spielzug zur Stellung $(1, 0, 0)$, einer $\mathcal{P}$-Stellung, gebracht werden kann und letztere Stellung mit einem Spielzug zu $(2, 1, 0)$, einer $\mathcal{P}$-Stellung, gebracht werden kann.
Aus Abschnitt 3.3 ist auch klar, dass $(3, 2, 0)$ eine $\mathcal{P}$-Stellung ist.
Weiter können wir auch zeigen, dass $(2, 2, 1)$ und $(3, 1, 1)$ beides $\mathcal{P}$-Stellungen sind, da in beiden Fällen alle ihre Optionen $\mathcal{N}$-Stellungen sind.
Da $(2, 2, 1)$ und $(3, 1, 1)$ also $\mathcal{P}$-Stellungen sind, ergibt sich aber auch folgendes: Die Stellungen $(2+\alpha, 2+\beta, 1)$ mit $\alpha \geq \beta \geq 0$ und $\alpha \geq 1$ sind $\mathcal{N}$-Stellungen, da man mit einem Spielzug von ihnen zu der Stellung $(2, 2, 1)$ gelangen kann.
Analog sind die Stellungen $(3+\alpha, 1, 1), \alpha \geq 1$, $\mathcal{N}$-Stellungen, da man mit einem Spielzug von ihnen zu der Stellung $(3, 1, 1)$ gelangen kann.
Es ist einfach zu sehen, dass diese $\mathcal{N}$-Stellungen alle möglichen Stellungen mit mehr als fünf Stücken und $c \leq 1$ abdecken. Daraus folgt:

Satz 3.4.2 *Die einzigen $\mathcal{P}$-Stellungen (a, b, c) mit $c = 1$ sind $(2, 2, 1)$ und $(3, 1, 1)$.*
Jede $\mathcal{N}$-Stellung (a, b, c) mit $c = 1$, und mit mindestens sechs Stücken, entspricht genau einer der folgenden beiden Formen:
$(3+\alpha, 1, 1)(\alpha \geq 1)$ *und* $(2+\alpha, 2+\beta, 1)(\alpha \geq \beta \geq 0, \alpha \geq 1)$.
Gewinnbringende Spielzüge sind bei diesen $\mathcal{N}$-Stellungen jeweils:

$$(3, 2, 1) \to (3, 1, 1) \text{ oder } (2, 2, 1),$$

$$(3,3,1) \to (3,1,1) \textit{ oder } (2,2,1),$$
$$(3+\alpha,1,1) \to (3,1,1),$$
$$(2+\alpha,2+\beta,1) \to (2,2,1).$$

Untersuchung 3.4.3 Mit dem Fall $c = 1$ nun abgeschlossen, widmen wir uns dem Fall $c = 2$.
Aus Abschnitt 3.3 wissen wir, dass $(b+1, b, 0)$ eine $\mathcal{P}$-Stellung ist. Somit ist $(b+1, b, 2)$ eine $\mathcal{N}$-Stellung, da man durch Wählen des Stücks *(3,1)* zu der Stellung $(b+1, b, 0)$ kommt.
Ebenso ist $(3,2,2)$ bzw. $(2,2,2)$ eine $\mathcal{N}$-Stellung, da man von ihr zur $\mathcal{P}$-Stellung $(3,1,1)$ bzw. $(2,2,1)$ kommen kann.
Analog ist $(3,3,2)$ auch eine $\mathcal{N}$-Stellung, da man von ihr zur $\mathcal{P}$-Stellung $(3,1,1)$ kommen kann.
$(4,2,2)$ ist eine $\mathcal{P}$-Stellung, da alle ihre Optionen $\mathcal{N}$-Stellungen sind. Demnach ist $(4,2,2)$ die $\mathcal{P}$-Stellung mit den wenigsten Stücken. Letzteres impliziert, dass $(4,3,2)$ und $(4,4,2)$ $\mathcal{N}$-Stellungen sind.
Weiter ist $(5,3,2)$ eine $\mathcal{P}$-Stellung, da alle ihre Optionen $\mathcal{N}$-Stellungen sind. Das impliziert erneut, dass $(5,4,2)$ und $(5+\alpha, 3, 2), \alpha \geq 1$, $\mathcal{N}$-Stellungen sind.
Die Stellung mit den wenigsten Stücken, die bis jetzt noch nicht behandelt wurde, ist $(6,4,2)$. Man kann herausfinden, dass alle Optionen von $(6,4,2)$ $\mathcal{N}$-Stellungen sind. Es folgt also, dass $(6,4,2)$ eine $\mathcal{P}$-Stellung ist.
Indem man diesem Schema folgt, wird man auch sehen, dass $(7,5,3)$ eine $\mathcal{N}$-Stellung ist. Es ist also naheliegend, dass folgender Satz gelten muss:

Satz 3.4.4 *Eine Stellung* $(a,b,2)$ *ist eine* $\mathcal{P}$*-Stellung* $\Leftrightarrow a - b = 2$.

Beweis. Siehe [4], Proposition 2. □

Untersuchung 3.4.5 Setzt man solche Untersuchungen bis $c = 5$ fort, so kommt man auf folgendes Ergebnis:

- Wenn $c = 3$, dann sind $(6,3,3), (7,4,3)$ und $(5,5,3)$ $\mathcal{P}$-Stellungen.
- Wenn $c = 4$, dann sind $(8,4,4), (9,5,4), (10,6,4)$ und $(7,7,4)$ $\mathcal{P}$-Stellungen.
- Wenn $c = 5$, dann sind $(10,5,5), (9,6,5)$ und $(11+\alpha, 7+\alpha, 5)$ mit $\alpha \geq 0$ $\mathcal{P}$-Stellungen.

Man kann c stetig erhöhen und die Analyse genauso fortführen, aber es ist zu bezweifeln, dass ein Mensch weiter gehen kann als $c = 10$, da die Anzahl der Fälle schnell sehr groß wird. Man nimmt für größere c also den Computer zur Hilfe.
Eine Hoffnung dabei ist, dass für ein beliebiges c eine Struktur hervortritt, welche ein Mensch dann zum Beispiel mit Induktion beweisen kann. Obwohl aber bereits mehrere Programme geschrieben wurden, war eine solche Struktur für ein allgemeines c nie auszumachen. Es lassen sich aber periodische Verhaltensweisen und ein paar andere interessante Aspekte festmachen.
Um tiefer in die Sache einzusteigen, benötigen wir eine neue Abbildung:

Definition 3.4.6 Für eine Stellung (a,b,c), definieren wir die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$
$$(b,c) \mapsto a,$$
$$\text{sodass } (a, \min(a,b), \min(a,b,c)) \text{ eine } \mathcal{P}\text{-Stellung ist.}$$

Der Wert von $f(b, c)$ ist also die positive ganze Zahl a, sodass es keinen Spielzug von $(a, \min(a, b), \min(a, b, c))$ zu einer $\mathcal{P}$-Stellung (a', b', c') gibt.

Im Folgenden analysieren wir also Chomp mit einer $3 \times n$- Schokoladentafel mit Hilfe der Abbildung f, die die $\mathcal{P}$-Stellungen beschreibt.
Diese Abbildung kann in einer Tabelle dargestellt werden. In Grafik(4) sieht man einen Auszug des Anfangs der Tabelle von $f(b, c)$ mit b auf der horizontalen Achse und c auf der vertikalen Achse.

Grafik(4)

24																									42
23																								40	41
22																							39	38	40
21																						37	38	36	39
20																					35	36	37	33	38
19																				34	33	35	36	31	37
18																			32	33	31	29	35	34	36
17																		30	31	29	32	33	34	26	35
16																	28	29	26	31	30	32	33	**23**	23
15																27	26	28	29	30	23	31	**22**	22	22
14															25	26	23	27	28	22	29	30	31	32	33
13														24	23	22	25	26	27	**19**	19	19	19	19	19
12													21	23	22	24	19	**17**	17	17	17	17	17	17	17
11												20	19	22	17	23	24	25	21	26	27	28	29	30	31
10											18	19	20	21	**14**	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
9										16	17	14	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
8									15	14	16	17	**12**	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
7								13	14	12	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
6							11	12	13	**9**	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
5						10	9	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
4					8	9	10	**7**	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
3				6	7	**5**	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
2			4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1		3	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Satz 3.4.7 *Für die Abbildung f ergibt sich die folgende Rekursion:*

(i) Falls $c > b$, dann gilt $f(b, c) = f(b, b)$.
Dies bedeutet: Die Einträge der Tabelle von f überhalb der Diagonalen sind alle gleich dem Diagonaleintrag der jeweiligen Spalte. Aufgrund dieser Redundanz stellen wir in der Tabelle von f die Einträge für $b < c$ nicht dar.

(ii) Falls $b \geq c$ und $f(b, c) \leq b$, dann gilt $f(b + 1, c) = f(b, c)$.
Dies bedeutet: Falls $f(b, c) = b$ gilt, dann hat die Tabelle von f auch für den Rest der Zeile c den Wert b.

(iii) Falls weder (i) noch (ii) zutrifft, dann ist $f(b, c)$ die kleinste positive ganze Zahl, die nicht $f(t_1, c)$ für $t_1 < b$ oder $f(b, t_2)$ für $t_2 < c$ ist.

Beweis. Dies ist ohne Beweis aufgeführt in [5], p.5. $\square$

Im weiteren Verlauf des Abschnitts werten wir die Ergebnisse von $f(b, c)$ für $b, c \leq 100000$ aus.

Bemerkung 3.4.8 Für $c \in \{0, 2, 5\}$ sieht man, dass die Folge $(f(b, c) - b)_{b \in \mathbb{N}}$ letztlich periodisch mit Periode 1 wird. Für $c = 2$ hat uns das Satz 3.4.4 schon gelehrt. Für $c = 120$ wird sie letztlich periodisch mit Periode 2 (siehe Grafik(5)). Für größere c findet man noch größere Perioden, zum Beispiel die Periode 25 für $c = 782$ oder die Periode 720 für $c = 7751$.

Grafik(5)

122	240	241	242	178	243	244	245	175	246	**174**	174	174	174	174	174	174
121	178	240	175	241	242	243	174	**172**	172	172	172	172	172	172	172	172
120	175	238	240	239	172	242	241	244	243	246	245	248	247	250	249	252
119	237	174	239	238	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251
118	236	237	238	**168**	168	168	168	168	168	168	168	168	168	168	168	168
117	168	**166**	166	166	166	166	166	166	166	166	166	166	166	166	166	166
116	164	164	164	164	164	164	164	164	164	164	164	164	164	164	164	164
115	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248
114	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162
	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180

Insgesamt fasst folgender Satz, der bereits bewiesen wurde, die allgemeine Struktur der Periodizität der Tabelle von f zusammen:

Satz 3.4.9 *Für ein festgesetztes c gilt für die Menge von $\mathcal{P}$-Stellungen $\{(f(b, c), \min(f(b, c), b), \min(f(b, c), b, c)) : b \in \mathbb{N}\}$, dass $(f(b, c) - b)_{b \in \mathbb{N}}$ nach einer endlichen Vorperiode immer periodisch wird.*

Beweis. Siehe [5], p.6. □

Bemerkung 3.4.10 Was sagt Satz 3.4.9 über Chomp mit einer $3 \times n$ Schokoladentafel aus?
Der Satz liefert uns eine periodische Struktur für $\mathcal{P}$-Stellungen in Chomp mit einer $3 \times n$ Schokoladentafel. Das Problem an dieser Struktur ist aber, dass sie für jedes c unterschiedlich ist, da zwischen den Vorperioden und Periodenlängen für verschiedene c kein Zusammenhang festzumachen ist. Von einer allgemeinen Struktur kann also nicht die Rede sein.

Im Folgenden wollen wir uns mit den Diagonalelementen der Tabelle von f beschäftigen.

Bemerkung 3.4.11 Die Folge an Diagonalelementen $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, also $d_n = f(n, n)$ für alle $n \geq 0$, hat die folgende Form:

$$1, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 34, 35, 37, 39, 40, \ldots.$$

Diese mit b indexierte Folge entspricht den Werten a, für welche es eine $\mathcal{P}$-Stellung $(a, \min(a, b), \min(a, b))$ gibt.
Da (a, a, a) wegen Satz 3.1.4 eine $\mathcal{N}$-Stellung ist, kann man den letzten Satz wie folgt vereinfachen:
Diese mit b indexierte Folge entspricht den Werten a, für welche es eine $\mathcal{P}$-Stellung (a, b, b) gibt.

Die Folge ist nicht monoton steigend, da zum Beispiel auf 89 die 88 folgt, wie man in Grafik(6) sieht.

Grafik(6)

55										95
54									93	94
53								92	91	90
52							88	91	90	92
51						89	86	90	88	91
50					87	88	84	89	86	81
49				85	86	84	87	88	89	79
48			83	84	85	86	81	79	87	88
47		82	81	79	84	83	85	86	77	87
46	80	81	79	82	83	77	75	85	84	86
	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55

Jedoch findet in den ersten 100000 Elementen der Folge keine Abnahme, die größer als 1 ist, statt.
Tatsächlich sind die Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Elementen $-1, 1, 2, 3$ oder 4 mit den zugehörigen Anteilen $0.015, 0.353, 0.537, 0.085, 0.010$. Sei $\gamma = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1.7$. Es hat den Anschein, dass die Folge so wächst wie γn. (Für $n < 100000$ haben wir $\gamma n - 1.242 < d_n < \gamma n + 2.141$.)

Ein wichtiger Satz, der eine Aussage über die Diagonalelemente der Tabelle zu f macht, folgt demnächst. Um ihn zu beweisen benötigen wir aber zwei Lemmata:

Lemma 3.4.12 *Eine Spalte b in der Tabelle zu f hat $b+1$ verschiedene positive ganze Zahlen $f(b,c)$ für $c \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wegen Satz 3.4.7(i) reicht es zu zeigen, dass für ein beliebiges $c \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$f(b,c) \neq f(b,c+k) \text{ für alle } k > 0, b \geq c+k.$$

Dies tun wir mit einem Widerspruchsbeweis. Angenommen es gibt ein $c \in \mathbb{N}$, sodass $a := f(b,c) = f(b,c+k)$ für ein $k > 0$ und ein $b \geq c+k$ gilt, dann ist sowohl $(a, \min(a,b), \min(a,c))$ aber auch $(a, \min(a,b), \min(a,c+k))$ eine $\mathcal{P}$-Stellung.
Kann $a \leq c+k$ überhaupt gelten? Angenommen $a \leq c+k$ gilt tatsächlich, dann entspricht die Stellung $(a, \min(a,b), \min(a,c+k))$ der Stellung (a,a,a). Diese kann aber gemäß Satz 3.1.4 keine $\mathcal{P}$-Stellung sein. Es gilt also $a > c+k$.
Die zu betrachtenden $\mathcal{P}$-Stellungen sind dann also $(a, \min(a,b), c)$ und $(a, \min(a,b), c+k)$.
Egal ob $a \leq b$ oder $a > b$, durch das Wählen des Stücks *(3,c+1)* kann ein Spieler von $(a, \min(a,b), c+k)$ zu $(a, \min(a,b), c)$, einer $\mathcal{P}$-Stellung, gelangen. Damit ist $(a, \min(a,b), c+k)$ aber keine $\mathcal{P}$-Stellung, da sie eine Option hat, die eine $\mathcal{P}$-Stellung ist und es folgt der Widerspruch. □

Lemma 3.4.13 *Sei $b, c', s, t \in \mathbb{N}$, wobei $b \geq s \geq c'+1$ und $t \leq c'$. Es gilt:*

$$f(b,s) \neq f(t,t).$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit einem Widerspruchsbeweis.
Angenommen es gibt $b, c', s, t \in \mathbb{N}$ mit $b \geq s \geq c'+1$ und $t \leq c'$, sodass $a := f(b,s) = f(t,t)$.
Dann wären $(a, \min(a,b), \min(a,s))$ sowie (a,t,t) (siehe Bemerkung 3.4.11) beides $\mathcal{P}$-Stellungen.

Fall 1: Angenommen $a > b$. Dann entspricht $(a, \min(a, b), \min(a, s))$ der Stellung (a, b, s).
Aus den Voraussetzungen wissen wir, dass $b > t$ und $s > t$ gilt. Durch das Wählen des Stücks *(2,t+1)* kann ein Spieler aber von (a, b, s) zu (a, t, t), einer $\mathcal{P}$-Stellung, gelangen. Damit ist (a, b, s) aber keine $\mathcal{P}$-Stellung, da sie eine Option hat, die eine $\mathcal{P}$-Stellung ist und es folgt der Widerspruch.
Fall 2: Angenommen $b \geq a$ und $a > s$. Dann entspricht $(a, \min(a, b), \min(a, s))$ der Stellung (a, a, s).
Wegen $s > t$ ist klar, dass man durch das Wählen des Stücks *(2,t+1)* von (a, a, s) zu (a, t, t) gelangen kann, was eine Widerspruch ist.
Fall 3: Angenommen $a \leq s$. Dann entspricht $(a, \min(a, b), \min(a, s))$ der Stellung (a, a, a). Diese kann aber laut Satz 3.1.4 keine $\mathcal{P}$-Stellung sein, ein Widerspruch. □

Jetzt sind wir bereit für folgenden Satz:

Satz 3.4.14 *In der Tabelle zu f sind die Diagonalelemente die größten Zahlen pro Spalte.*

Beweis. Ausgearbeitet auf Grundlage von [5], p.6-7.
Diesen Satz zeigen wir mit einem Widerspruchsbeweis. Nehmen wir an $f(b, b)$ ist nicht die größte Zahl in der Spalte b der Tabelle von f, sondern $f(b, c')$ mit $c' < b$ ist größer. Warum ist keine der Zahlen $f(b, s)$ für $c' + 1 \leq s \leq b$ auf der Position (b, c') der Tabelle von f?
Laut Lemma 3.4.12 hat $f(b, c)$ für $c \in \mathbb{N}$ genau $b+1$ verschiedene positive ganze Zahlen als Werte. Es folgt:

$$f(b, c') = \max_{c=0,\ldots,b} \{f(b, c)\} > b.$$

Erinnern wir uns nochmal an die Rekursion, die von f ausgeht (Satz 3.4.7). Da sowohl $c' < b$ als auch $f(b, c') > b$ gilt, ist $f(b, c')$ in *Fall (iii)* der Rekursion zu f einzuordnen, das heißt $f(b, c')$ ist die kleinste positive ganze Zahl ist, die nicht früher in Zeile c' oder Spalte b vorkommt. (5)
Da die Zahlen $f(b, s)$ nicht auf der Position (b, c') der Tabelle von f sind und somit kleiner sind als $f(b, c')$, folgt mit (5) und Lemma 3.4.12, dass sie alle früher in der Zeile c' vorkommen müssen.
Sie können aber in diesem früheren Teil der Zeile c' nicht auf den Positionen (t, c'), für $t \leq c'$, der Tabelle von f sein, da Einträge der Tabelle von f überhalb der Diagonalen alle gleich dem Diagonaleintrag der jeweiligen Spalte sind und $f(b, s) \neq f(t, t)$ für $b \geq s \geq c' + 1$ und $t \leq c'$ (siehe Lemma 3.4.13).
Die Zahlen $f(b, s)$ kommen also alle auf den Positionen (q, c'), für $c' + 1 \leq q \leq b - 1$, der Tabelle von f vor. Aber es gibt mehr Zahlen s als Positionen q, ein Widerspruch.
Insgesamt folgt also, dass $f(b, b)$ die größte Zahl in der Spalte b ist. □

Korollar 3.4.15 *Es gilt:*

$$f(b, b) > b \textit{ für alle } b \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Folgt trivialerweise aus Satz 3.4.14 zusammen mit Lemma 3.4.12. □

Für den *Fall (ii)* der Rekursion zu f (Satz 3.4.7) wollen wir nun eine Terminologie einführen.

Definition 3.4.16 (Konstante Zeile) Eine Zeile c der Tabelle zu f heißt *konstant*, wenn sie letztlich konstant wird, das heißt wenn es ein b gibt für das gilt:

$$b = f(b, c).$$

Dann nennen wir die Position (b, c) der Tabelle von f den *Start* und $b = f(b, c)$ den *Wert* der konstanten Zeile.

Konstante Zeilen haben eine besondere Eigenschaft:

Bemerkung 3.4.17 Die konstanten Zeilen der Tabelle zu f sind genau die Zeilen c, für die es nur endlich viele $\mathcal{P}$-Stellungen (a, b, c) gibt.
Ein Beispiel dafür ist $c = 1$. In Grafik(4) sehen wir, dass die Position $(2, 1)$ der Tabelle zu f der Start der konstanten Zeile mit Wert 2 ist. Und wie wir in Satz 3.4.2 sehen gibt es im Fall $c = 1$ nur endlich viele, nämlich zwei, $\mathcal{P}$-Stellungen.

Bemerkung 3.4.18 Betrachten wir die aufsteigende Folge der Werte $(e_n)_{n\geq 1}$ der konstanten Zeilen:

$$2, 5, 7, 9, 12, 14, 17, 19, 22, 23, 26, 29, 31, 33, 36, 38, 41, 43, 46, 47, 50, 52, 55, \ldots.$$

Diese Folge entspricht den Werten a, für welche es eine $\mathcal{P}$-Stellung (a, a, b) gibt. Sei $\sigma = 1+\sqrt{2} \approx 2.4$. Es hat den Anschein, dass die Folge so wächst wie σn. (Für $n < 41420$ haben wir $\sigma n - 1.506 < e_n < \sigma n + 1.493$.) Die Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgende Elementen sind $1, 2, 3, 4$ oder 5 mit den zugehörigen Anteilen $0.116, 0.430, 0.376, 0.077, 0.0001$.
Zusätzlich zur Folge $(e_n)_{n\geq 1}$ definieren wir die Folge $(r_n)_{n\geq 1}$, die den Werten b entspricht, für welche es eine $\mathcal{P}$-Stellung (a, a, b) gibt. Sie hat die folgende Form:

$$1, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 30, 32, 33, 35, 37, 39, 41, \ldots.$$

Diese Folge ähnelt $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ist aber im Gegensatz zu ihr monoton steigend.
Es hat den Anschein, dass die Folge so wächst wie γn. (Für $n < 41420$ haben wir $\gamma n - 1.853 < r_n < \gamma n + 0.780$.) Die Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Elementen sind $1, 2$ oder 3 mit den zugehörigen Anteilen $0.317, 0.658, 0.024$.

Es gibt eine lineare obere Grenze für $(e_n)_{n\geq 1}$:

Satz 3.4.19 *Es gilt:*

$$e_n \leq 3n - 1 \text{ für alle } n \geq 1.$$

Beweis. Siehe [5], p.9. □

Wenn man sich nur die ersten Elemente beider Folgen ansieht, entsteht der Eindruck, dass $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Komplement von $(e_n)_{n\geq 1}$ ist. Für ein solches Verhalten konnte man einen interessanten Zusammenhang beweisen:

Satz 3.4.20 *Die Folgen $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n\geq 1}$ sind komplementär* $\Leftrightarrow$
Die gewinnbringende Strategie für die Stellung (n, n, n) mit $n \geq 1$ ist eindeutig.

Beweis. Dies ist ohne Beweis aufgeführt in [7], sc. “Sequences from 3-by-n Chomp”. □

Bemerkung 3.4.21 Es wird vermutet, dass $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n\geq 1}$ tatsächlich komplementär sind. Für Chomp mit einer $3 \times n$ Schokoladentafel würde das bedeuten, dass die gewinnbringende Strategie bei der Stellung (n, n, n) mit $n \geq 1$ eindeutig ist, was für $n < 100000$ wahr ist, da jedes solche n zu genau einer der beiden Folgen gehört.

Satz 3.4.22 *Jede Zahl $k \geq 1$, die nicht Element von $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, ist Element von $(e_n)_{n\geq 1}$.*

Beweis. Siehe [5], p. 8. □

Lemma 3.4.23 *Sei $b, b', c' \in \mathbb{N}$ und $c' > b$ sowie $b' \geq c'$. Dann gilt:*

$$f(b, b) \neq f(b', c').$$

Beweis. Diese Aussage zeigen wir mit einem Widerspruchsbeweis.
Angenommen es gibt $b, b', c' \in \mathbb{N}$ mit $c' > b$ und $b' \geq c'$, sodass $f(b, b) = f(b', c') := a$. Dann sind sowohl (a, b, b) (siehe Bemerkung 3.4.11) als auch $(a, \min(a, b'), \min(a, c'))$ beides $\mathcal{P}$-Stellungen.
Fall 1: Angenommen $a \geq b'$. Dann sind (a, b, b) und (a, b', c') beides $\mathcal{P}$-Stellungen. Da $c' > b$, kann man aber durch Wählen des Stücks *(2, b+1)* von (a, b', c') zu (a, b, b) gelangen, ein Widerspruch.
Fall 2: Angenommen $a < b'$ und $a \geq c'$. Dann sind (a, b, b) und (a, a, c') beides $\mathcal{P}$-Stellungen. Da $c' > b$, kann man aber durch Wählen des Stücks *(2, b+1)* von (a, a, c') zu (a, b, b) gelangen, ein Widerspruch.
Fall 3: Angenommen $a < c'$. Dann entspricht $(a, \min(a, b'), \min(a, c'))$ der Stellung (a, a, a). Diese kann aber laut Satz 3.1.4 keine $\mathcal{P}$-Stellung sein, ein Widerspruch. □

Bemerkung 3.4.24 Falls es wahr ist, dass $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n\geq 1}$ sich so wie γn verhalten und $(e_n)_{n\geq 1}$ sich so wie σn verhält, dann wäre es plausibel, dass $(e_n)_{n\geq 1}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplementär zueinander sind. Dies wollen wir kurz erläutern:
Da Satz 3.4.22 bereits bewiesen ist, gilt es nur noch zu zeigen, dass es keine Zahl gibt, die sowohl in $(e_n)_{n\geq 1}$ als auch in $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.
Falls x eine Zahl ist, die auf der Diagonalen der Tabelle zu f vorkommt, dann haben wir $x = d_n = \gamma n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es folgt: $n = \gamma^{-1}x$, also dass x ungefähr in Zeile und Spalte $\gamma^{-1}x = (2 - \sqrt{2})x \approx 0.6x$ auftritt.
Falls x der Wert einer konstanten Zeile ist, dann haben wir $x = e_n = \sigma n$ für ein $n \geq 1$. Es folgt: $\sigma^{-1}x = n$, also dass x der Wert der $\sigma^{-1}x$-ten konstanten Zeile ist, die in der Tabelle zu f vorkommt. Das ist ungefähr die Zeile $\gamma\sigma^{-1}x = x/\sqrt{2} \approx 0.7x$. Somit ist der Start der konstanten Zeile zum Wert x der konstante Zeile die Position $(x, 0.7x)$ der Tabelle von f.
Falls die Zahl x sowohl Diagonalelement als auch Wert einer konstante Zeile ist, dann ist x also in der Tabelle zu f sowohl auf der Position $(0.6x, 0.6x)$ als auch auf der Position $(x, 0.7x)$. Da, außer möglicherweise für sehr kleine x, $0.6x < 0.7x$ gilt, ist das ein Widerspruch zu Lemma 3.4.23.
Die Zahl x kann also nicht zugleich Element von $(e_n)_{n\geq 1}$ und Element von $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein.

3.5 Chomp mit einer $m \times n$ Schokoladentafel

Beginnen wir diesen Abschnitt wie frühere Abschnitte, indem wir uns mit Spezialfällen widmen, für die bereits bewiesen wurde, dass es $\mathcal{P}$-Stellungen sind:

Satz 3.5.1 *Damit eine Chomp Stellung mit z Zeilen,* $(a, b, 1, \ldots, 1)$ *mit* $a \geq b \geq 1$, *eine* $\mathcal{P}$*-Stellung ist, muss folgendes gelten:*

$$z = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2a+b}{2} \right\rfloor, & a+b \text{ gerade} \\ \min\{\left\lceil \frac{2a-b}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{3(a-b)}{2} \right\rceil\}, & a+b \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Beweis. Siehe [6], p.2. □

Weiter wurde auch folgendes bereits herausgefunden:

Satz 3.5.2 *Damit eine Chomp Stellung mit z Zeilen,* $(a, b, 2, 1, \ldots, 1)$ *mit* $a \geq b \geq 2$, *eine* $\mathcal{P}$*-Stellung ist, muss folgendes gelten:*

$$z = \begin{cases} 1, & a = 1 \\ 2, & a = b+1 \\ \left\lfloor \frac{2a+b}{2} \right\rfloor, & a+b \text{ ungerade} \wedge a \neq b+1 \\ \left\lfloor \frac{3a}{2} \right\rfloor + 1, & a = b \\ \min\{\left\lceil \frac{2a-b}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{3(a-b)}{2} \right\rceil\}, & a+b \text{ gerade} \wedge a \neq b \end{cases}.$$

Beweis. Siehe [6], Theorem 1. □

Bemerkung 3.5.3 Die in den zwei obigen Sätzen beschriebenen Stellungen sind im Wesentlichen die einzigen Stellungen, für die man beweisen konnte, dass es sich um $\mathcal{P}$-Stellungen handelt.
Insgesamt jedoch sind Computerprogramme in der Lage, für beliebige Stellungen auf $m \times n$ Schokoladentafeln angemessener Größe zu berechnen, ob es sich bei der Stellung um eine $\mathcal{P}$- oder eine $\mathcal{N}$-Stellung handelt.

Bemerkung 3.5.4 (Gewinnbringende Strategien) Allgemeine gewinnbringende Strategien für eine $m \times n$ Schokoladentafel-Ausgangsstellung sind nicht bekannt, bis auf Spezialfälle wie zum Beispiel in Abschnitt 3.2 und 3.3.

Bemerkung 3.5.5 (Eindeutigkeit gewinnbringender Strategien) Es gilt hierbei noch zu anzumerken, dass gewinnbringende Strategien für $m \times n$ Schokoladentafeln im Allgemeinen nicht eindeutig sind. Das kleinste bekannte Beispiel, für das es zwei unterschiedliche gewinnbringende Strategien gibt, ist Chomp auf einer 8×10 Schokoladentafel, vgl. [5], p. 4.

Literatur

[1] A. N. Siegel, “Misere Games and Misere Quotients,” Lecture notes, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel, 2006. Available: `http://arxiv.org/abs/math.CO/0612616`. [Accessed: Aug. 29, 2018].

[2] M.R. Allen, “Impartial Combinatorial Misere Games,” 2006, MSc Thesis, Dalhousie University, Halifax, NS, Canada, 2006. Available: `http://www.reluctantm.com/thesis/meghan.pdf`. [Accessed: Aug. 29, 2018].

[3] T. E. Plambeck and A. N. Siegel, “Misere quotients for impartial games,” *Journal of Combinatorial Theory Series A* (`J COMB THEORY A`), pp. 593-622, May 2008. Available: `https://arxiv.org/abs/math/0609825`. [Accessed: Aug. 29, 2018].

[4] D. Zeilberger, “Three-Rowed CHOMP,” *Advances in Applied Mathematics* (`ADV APPL MATH`), Volume 26, pp. 168-179, February 2001. Available: `https://core.ac.uk/download/pdf/82356946.pdf`. [Accessed: Aug. 29, 2018].

[5] A. E. Brouwer, G. Horváth, I. Molnár-Sáska, C. Szabó, “On three-rowed chomp,”, *Integers*, Volume 5(1), G07, pp. 11, November 2005. Available: `https://www.emis.de/journals/INTEGERS/papers/fg7/fg7.pdf`. [Accessed: Aug. 29, 2018].

[6] X. Sun, “Improvements on Chomp,” *Integers*, Volume 2, G01, pp. 8, May 2002. Available: `http://ftp.gwdg.de/pub/EMIS/journals/INTEGERS/papers/cg1/cg1.pdf`. [Accessed: Aug. 29, 2018].

[7] A. E. Brouwer, “The game of Chomp,” win.tue.nl. Available: `https://www.win.tue.nl/~aeb/games/chomp.html`. [Accessed: Nov. 11, 2018].

[8] M. Weimerskirch, “An algorithm for computing indistinguishability quotients in misére impartial combinatorial games,” in *Games of No Chance 4*, R. J. Nowakowski, Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2015, pp. 267-279. Available: `http://library.msri.org/books/Book63/files/131106-Weimerskirch.pdf`. [Accessed: Nov. 11, 2018].

Hiermit versichert der Autor, dass diese Bachelorarbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt wurde und alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, als solche gekennzeichnet sind, sowie dass die Bachelorarbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Passau, April 2019