

**Beiträge zur Theorie
der nulldimensionalen Unterschemata
projektiver Räume**

Habilitationsschrift

vorgelegt an der
NWF I – Mathematik
der Universität Regensburg
von Martin Kreuzer
aus Ihrlersstein
im April 1997

Vorwort

Noch vor weniger als zwei Jahrzehnten trafen Mathematiker, die einen Vortrag über 0-dimensionale Schemata ankündigten, oftmals auf Verwunderung und Skepsis. “Nulldimensionale Schemata? Sind die nicht alle isomorph? Gibt es da überhaupt etwas zu erforschen?” So oder so ähnlich hieß es nicht selten. Zu frisch waren noch die Triumphe der abstrakten Methode, und die Gegenbewegung, die Besinnung auf die klassischen Probleme der algebraischen Geometrie und der Versuch, diese mit der Theorie der Schemata und den diversen Kohomologietheorien zu lösen, hatte gerade erst eingesetzt.

Dabei kann das Thema im Falle reduzierter 0-dimensionaler Unterschemata projektiver Räume auf eine lange und reichhaltige Geschichte zurückblicken. Schon im 18. Jahrhundert hatten G. Cramer und L. Euler in ihrem Briefwechsel (vgl. [Eu]) über ein Phänomen diskutiert, das man heutzutage als “Cayley-Bacharach Eigenschaft” bezeichnet, und das in der vorliegenden Arbeit eine große Rolle spielen wird. Die Formel von C.G.J. Jacobi aus dem Jahre 1835 (vgl. [J1]), die nichts anderes ist als eine konkrete Version des Residuensatzes in der projektiven Ebene, erlaubt (wie von C.G.J. Jacobi in [J2] bereits selbst angedeutet) den Beweis subtiler Eigenschaften der Hilbert-Funktionen endlicher Teilmengen von \mathbb{P}^2 . Und die Dissertation von L.O. Hesse aus dem Jahre 1840 (vgl. [He]) würde man jetzt als eine Untersuchung von Punktemengen betrachten, die vollständige Durchschnitte vom Typ $(2, 2, 2)$ in \mathbb{P}^3 sind und die mit ihrer Gale-Transformierten übereinstimmen (vgl. §3 und §7). In der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts wurden die verschiedenen Zusammenhänge, in denen 0-dimensionale Unterschemata projektiver Räume auftraten und untersucht wurden, bereits so zahlreich, daß es zu weit führen würde zu versuchen, sie hier alle vorzustellen.

In den letzten 20 Jahren hat das Thema, gerade unter Einschluß und Anwendung der Theorie der Schemata, wieder viel an Aktualität und Interesse gewonnen, und vor einigen Jahren fand sogar die erste internationale Konferenz mit dem Titel “Zero-Dimensional Schemes” statt. Man entdeckte eine ganze Reihe von Verbindungen mit anderen Teilen der Mathematik, z.B. mit der Theorie der gewöhnlichen Kurvensingularitäten (vgl. [O]), mit der Castelnuovo-Theorie (vgl. [HE]) oder mit der Kodierungstheorie (vgl. [Han]). Schon während meines Hauptstudiums hatte ich das Glück, im Zuge eines Auslandsaufenthalts an der Brandeis University mit Mathematikern wie D. Eisenbud, A.V. Geramita und E.D. Davis zusammenzutreffen, die mich für die algebraische Geometrie im allgemeinen und die 0-dimensionalen Unterschemata projektiver Räume im speziellen begeisterten und mich in viele der aktuellen Entwicklungen und Forschungen einführten. Seitdem hat mich diese Begeisterung nicht wieder verlassen, und meine diesbezüglichen Forschungen und Veröffentlichungen bilden die Grundlage der vorliegenden Schrift.

Wie es unsere Habilitationsordnung verlangt, habe ich versucht, meine eigenen Beiträge und Ergebnisse deutlich zu machen. Jedem Abschnitt sind kurze Einleitungen

und Anmerkungen vorausgestellt, die auch die Quellen des präsentierten Materials nennen. Der Hauptteil der Arbeit basiert auf meinen Veröffentlichungen [K2] und [K3] sowie auf dem noch unveröffentlichten Manuskript [K4], für die ich alleine verantwortlich bin. Besonders in den Abschnitten über Anwendungen habe ich auch Ergebnisse verwendet, die in gemeinsamen Publikationen mit anderen Autoren enthalten sind, oder in noch unveröffentlichten solchen Werken. Ich hoffe, daß ich keinem meiner Mitautoren Unrecht zufüge, wenn ich den Leser einfach bitte, mir die Urheberschaft an diesem Material anteilig zuzurechnen.

Selbstverständlich hätte ich die dieser Arbeit zugrunde liegenden Forschungen nicht ohne die tatkräftige Hilfe einer ganzen Reihe von Menschen durchführen können. An erster Stelle möchte ich hier meinem Lehrer, Mentor und Dienstherrn Ernst Kunz danken, der mich nicht nur sehr viel kommutative Algebra und algebraische Geometrie lehrte, sondern der mir auch immer wieder die Gelegenheit verschaffte, meine Ergebnisse in Seminaren und bei Tagungen vorzutragen, und der mir über viele Jahre hinweg hervorragende Arbeitsbedingungen bot. Mein Dank gilt auch Tony Geramita, der mich vor einem Dutzend Jahren für die 0-dimensionalen Schemata begeisterte und seitdem nie mehr aufgehört hat, mir als Freund und Mitstreiter beizustehen, und an Lorenzo Robbiano, von dem ich das meiste gelernt habe, was ich über Computeralgebra weiß, und der mir in der Mathematik wie im Leben schon so manchen Freundschaftsdienst erwies. Natürlich danke ich auch meinen anderen Koautoren G. de Dominicis, J.C. Migliore, U. Nagel, C. Peterson und R. Waldi: ich hoffe, sie alle hatten an unseren gemeinsamen Forschungen genausoviel Freude und Gewinn wie ich. Noch viele weitere Mathematiker haben mich durch Ideen und Anregungen unterstützt: D. Eisenbud, S. Giuffrida, L.G. Roberts und G. Valla sind nur einige, die ich hier stellvertretend nennen möchte. Schließlich, aber eigentlich zuallererst, danke ich meiner Frau Bettina, nicht nur für die tatkräftige Unterstützung beim Korrekturlesen dieser Schrift, sondern auch dafür, daß sie mit mir jahraus, jahrein die Sorgen des Alltags teilt und mir so hilft, mich auf die Mathematik zu konzentrieren.

Ihrlerstein, im April 1997

Inhalt

| | |
|----------------------|-----|
| Vorwort | i |
| Inhalt | iii |
| Einleitung | v |

I. Grundlegende Objekte

| | |
|---|----|
| 1. Der homogene Koordinatenring | 1 |
| 2. Der kanonische Modul | 7 |
| 3. Das kanonische Ideal | 11 |
| 4. Der Kählersche Differentialmodul | 19 |

II. Uniformitätsbedingungen

| | |
|--|----|
| 5. Cayley-Bacharach Schemata | 27 |
| 6. Allgemeine Lage | 36 |
| 7. Uniforme Lage | 41 |
| 8. Kohomologische Uniformität | 46 |
| 9. Hilbert-Funktionen kohomologisch uniformer Schemata | 54 |
| 10. Die Hierarchie der Cayley-Bacharach Schemata | 64 |

III. Spezialfälle und Anwendungen

| | |
|--|-----|
| 11. Level-Schemata | 71 |
| 12. Hyperebenenschnitte von Kurven | 77 |
| 13. Freie Auflösungen | 82 |
| 14. Der Syzygienmodul des kanonischen Ideals | 86 |
| 15. Maximale Cayley-Bacharach Schemata | 93 |
| 16. Liaison | 99 |
| 17. Nulldimensionale Unterschemata der projektiven Ebene | 103 |
| 18. Determinantielle nulldimensionale Schemata | 109 |
| 19. Kodierungstheorie | 113 |
| 20. Computeralgebra | 117 |
| Arbeiten des Verfassers | 124 |
| Weitere Literaturhinweise | 125 |

Einleitung

Der Gegenstand der vorliegenden Schrift ist die Untersuchung der 0-dimensionalen Schemata \mathbb{X} , die in einen projektiven Raum \mathbb{P}^d über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K eingebettet sind. Bezeichnen wir den homogenen Koordinatenring von \mathbb{X} mit $R = K[X_0, \dots, X_d]/I_{\mathbb{X}}$, so beschäftigen wir uns u.a. mit den folgenden Fragen.

1) Welche grundlegenden algebraischen Objekte kann man der Einbettung $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ zuordnen?

2) Wie sind verschiedene geometrische Eigenschaften von $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ in der Struktur dieser algebraischen Objekte gespeichert?

3) Welche geometrischen Interpretationen haben ringtheoretische Eigenschaften von R (z.B. Gorenstein-Ring, vollständiger Durchschnitt) oder modultheoretische Eigenschaften ausgezeichneter R -Moduln?

4) Welche numerischen Invarianten sind der Einbettung $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ in natürlicher Weise zugeordnet (z.B. Hilbert-Funktion, Betti-Zahlen) und welche Werte können diese annehmen?

5) Wie kann man 0-dimensionale Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit vorgegebenen Eigenschaften konstruieren?

6) Welche Auswirkungen hat es, wenn wir voraussetzen, daß \mathbb{X} reduziert ist und aus über einem endlichen Körper rationalen Punkten besteht?

7) Wie kann man geometrische Eigenschaften oder Invarianten von $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit Hilfe der Computeralgebra prüfen bzw. berechnen?

Unsere Beiträge zur Beantwortung dieser Fragen haben wir dabei in drei Kapiteln unterteilt. Im ersten Kapitel führen wir einige der grundlegenden algebraischen Objekte ein, die der Einbettung $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ zugeordnet sind, nämlich den homogenen Koordinatenring, den kanonischen Modul bzw. das kanonische Ideal und den Kählerschen Differentialmodul. Wir besprechen die wichtigsten Eigenschaften dieser Objekte und machen uns mit ihrer Struktur vertraut. Im zweiten Kapitel charakterisieren wir verschiedene geometrische Uniformitätsbegriffe für $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit Hilfe der algebraischen Struktur der Objekte aus dem ersten Kapitel. Wir verwenden diese Charakterisierungen auch dazu, um Einschränkungen für die numerischen Invarianten, besonders für die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} zu finden. Das letzte Kapitel besteht aus einer Reihe von Spezialfällen und Anwendungen der Resultate aus den ersten beiden Kapiteln. Es behandelt auch die praktischen Fragen der Konstruktion 0-dimensionaler Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit vorgegebenen Eigenschaften sowie ihre explizite Berechnung mit den Mitteln der Computeralgebra.

Nun beschreiben wir den Inhalt der einzelnen Abschnitte genauer. Im ersten Abschnitt legen wir die für das weitere gültigen Notationen und Definitionen fest. Wir studieren die algebraische Struktur des homogenen Koordinatenrings R von \mathbb{X} , führen die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}}(i) = \dim_K R_i$ für $i \in \mathbb{Z}$ ein, und definieren die Invarianten $\alpha_{\mathbb{X}} = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid (I_{\mathbb{X}})_i \neq 0\}$, $\sigma_{\mathbb{X}} = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid H_{\mathbb{X}}(i) < \deg \mathbb{X}\}$ sowie

$\Delta_{\mathbb{X}} = \deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}})$. Die wichtigste Erkenntnis in diesem Abschnitt ist, daß wir den homogenen Koordinatenring R in den Graden $i \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ mit Hilfe der kanonischen Abbildung $R \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{X}})$ genau beschreiben können. Verwenden wir die jedem Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$ zugeordneten Separatoren $f_{\mathbb{Y}} \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$, so können wir im reduzierten Fall besonders einfache K -Vektorraumbasen der homogenen Komponenten R_i mit $i \geq \sigma_{\mathbb{X}}$ konstruieren (vgl. Lemma 1.10.c und Lemma 1.11), und wir beherrschen auch die multiplikative Struktur von R in diesen Graden (vgl. Lemma 1.10.d).

Der zweite Abschnitt dient der Vorstellung des kanonischen Moduls ω_R von R und seiner wichtigsten Eigenschaften. Es handelt sich um einen endlich erzeugten, graduierten R -Modul, der in der Kategorie aller endlich erzeugten, graduierten R -Moduln als dualisierendes Objekt fungiert (vgl. Satz 2.2) und unter unserer Generalvoraussetzung $\text{Supp}(\mathbb{X}) \cap D_+(X_0) = \emptyset$ durch die Formel $\omega_R \cong \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])(-1)$ gegeben ist, wobei $x_0 = X_0 + I_{\mathbb{X}} \in R_1$ einen linearen Nichtnullteiler darstellt. Auf Grund dieser Formel können wir die homogenen Elemente von ω_R als homogene $K[x_0]$ -lineare Abbildungen $\varphi : R \rightarrow K[x_0]$ betrachten, und es ist gerade diese Betrachtungsweise, die es uns erlaubt, mit den Elementen von ω_R explizit zu rechnen und die Modulstruktur von ω_R zu studieren. Im letzten Teil des zweiten Abschnitts verallgemeinern wir den Führer von R in seinem ganzen Abschluß auf den nicht notwendig reduzierten Fall und beschreiben ihn sowohl als Ideal von R als auch als R -Untermodul von $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{X}})$ (vgl. Satz 2.9).

Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, so gibt es ein Ideal von R , das bis auf eine Gradverschiebung zu ω_R isomorph ist. Im dritten Abschnitt konstruieren wir ein solches kanonisches Ideal explizit. Das Ergebnis $\mathfrak{J}_{R/K[x_0]} \subseteq R$ hängt noch von der Wahl des linearen Nichtnullteilers $x_0 \in R_1$ ab, aber wir können diese Abhängigkeit sehr explizit beschreiben (vgl. Satz 3.8). Das kanonische Ideal ist in den homogenen Komponenten R_i vom Grad $i \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ enthalten, die wir nach dem ersten Abschnitt genauestens kennen. So können wir dann auch explizite K -Basen für seine wichtigsten homogenen Komponenten konstruieren (vgl. Korollar 3.10, Korollar 3.11 und Satz 3.15) sowie eine Multiplikationsmatrix für die weiter unten betrachtete Abbildung $R_{\sigma_{\mathbb{X}}} \otimes_K (\mathfrak{J}_{R/K[x_0]})_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \rightarrow (\mathfrak{J}_{R/K[x_0]})_{2\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ aufstellen (vgl. Korollar 3.12). Es ergibt sich auch, daß wir mit Hilfe der homogenen Komponente $(\mathfrak{J}_{R/K[x_0]})_{2\sigma_{\mathbb{X}}}$ des kanonischen Ideals die sogenannte Gale-Transformierte von \mathbb{X} (vgl. [EP]) beschreiben können (vgl. Lemma 3.16 und Definition 3.17).

Das nächste grundlegende Objekt, das der Einbettung $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ zugeordnet ist, und das wir im vierten Abschnitt betrachten, ist der Kählersche Differentialmodul $\Omega_{R/K}^1$. In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Resultate aus [K6] so weit wie möglich auf den nicht notwendig reduzierten Fall. Dabei erweist es sich als günstig, nicht nur den Modul $\Omega_{R/K}^1$, sondern auch $\Omega_{R/K[x_0]}^1$ sowie $\Omega_{\bar{R}/K}^1$ mit $\bar{R} = R/(x_0)$ zu untersuchen. Für alle drei Moduln geben wir explizite Präsentationen an (vgl. Satz 4.2 und Satz 4.3). Im reduzierten Fall steckt der wesentliche Aspekt der Modulstruktur von $\Omega_{R/K}^1$

bereits in seinem Torsionsuntermodul $\mathcal{T}_{R/K}$ (vgl. Satz 4.5), welchen wir ebenfalls explizit präsentieren (vgl. Satz 4.7). Wir beschreiben die Hilbert-Funktion des graduierten R -Moduls $\Omega_{R/K}^1$ (vgl. Satz 4.8) sowie seine Regularität (vgl. Satz 4.12 und Satz 4.13). Zum Schluß geben wir noch eine Beschreibung des Derivationsmoduls von R/K in unserer Situation, die uns von E. Kunz mitgeteilt wurde.

Im fünften Abschnitt beginnt die Untersuchung geometrischer Eigenschaften der Einbettung $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ an Hand der Cayley-Bacharach Eigenschaft. Wir sagen dabei, ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ habe die Cayley-Bacharach Eigenschaft vom Grad $i \geq 0$, wenn jede Hyperfläche vom Grad i , die ein Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$ enthält, automatisch ganz \mathbb{X} umfaßt. Hat \mathbb{X} die Cayley-Bacharach Eigenschaft vom maximal möglichen Grad $\sigma_{\mathbb{X}}$, so heißt \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema. Diese Eigenschaft wird mit Hilfe der Separatoren von \mathbb{X} (vgl. Satz 5.6) und mit Hilfe der Modulstruktur von ω_R (vgl. Satz 5.15) charakterisiert. Ist \mathbb{X} zusätzlich lokal Gorenstein, so bedeutet sie, daß es in $(\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}}$ ein Element φ mit $\text{Ann}_R(\varphi) = (0)$ gibt (vgl. Satz 5.8), was zu Einschränkungen für das Wachstum der Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}}$ führt (vgl. Korollar 5.9). Wir erhalten auch eine Charakterisierung arithmetischer Gorenstein-Schemata durch die Cayley-Bacharach Eigenschaft und die Symmetrie der Hilbert-Funktion (vgl. Korollar 5.13 und [K7]), die den ursprünglichen Satz von Cayley-Bacharach (vgl. Satz 5.1) verallgemeinert. Der zweite Teil des fünften Abschnitts ist der Frage gewidmet, welche Unterschemata von Cayley-Bacharach Schemata selbst Cayley-Bacharach Schemata sind (vgl. die Sätze 5.17 und 5.18 sowie die Korollare 5.19 und 5.20). Schließlich beweisen wir mit Hilfe der Eagon-Northcott Auflösung, daß 0-dimensionale Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$, die durch die maximalen Minoren gewisser homogener Matrizen definiert sind, Beispiele von Cayley-Bacharach Schemata darstellen. Für eine weitergehende Einführung in die Geschichte der ‘‘Cayley-Bacharach Theorie’’ verweisen wir den Leser auf [EGH1], und für Beziehungen zu aktuellen Fragen der Castelnuovo-Theorie empfehlen wir, einen Blick auf [EGH2] zu werfen.

Im sechsten Abschnitt wenden wir uns der Bedingung der linear allgemeinen Lage zu. Im reduzierten Fall bedeutet sie gerade, daß je $d+1$ Punkte von \mathbb{X} den ganzen Raum \mathbb{P}^d aufspannen bzw. daß \mathbb{X} einen $(\deg \mathbb{X} - 1)$ -dimensionalen linearen Raum aufspannt, falls \mathbb{X} aus weniger als $d+1$ Punkten besteht. Der Satz von der allgemeinen Lage besagt dann einfach, daß sich der generische Hyperebenenschnitt einer nicht ausgearteten, nicht seltsamen, integren Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ in linear allgemeiner Lage befindet (vgl. Satz 6.1). Wie in [EH] verallgemeinern wir diesen Begriff auch auf den nicht notwendig reduzierten Fall und charakterisieren ihn mit Hilfe der Struktur des kanonischen Moduls ω_R (vgl. Satz 6.6), woraus sich zusammen mit dem Lemma über biinjektive Abbildungen (vgl. Lemma 6.7) dann Ungleichungen für die Werte der Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{X}}(i) = H_{\mathbb{X}}(i) - H_{\mathbb{X}}(i-1)$ von \mathbb{X} ergeben. In [Y1], Thm. 3.1 wurde diese Charakterisierung verwendet, um M. Green’s starkes Castelnuovo-Lemma auf den Fall nicht notwendig reduzierter 0-dimensionaler Schemata auszudehnen, und in [Y2] wurden hieraus neue Restriktionen für die Hilbert-Funktionen graduerter Cohen-Macaulay Bereiche gewonnen. Außerdem definieren wir für jedes $i \geq 1$ ein Konzept der allgemeinen Lage

i -ter Ordnung, das sich im Fall $i = 1$ auf die linear allgemeine Lage spezialisiert, und charakterisieren dieses Konzept wiederum mit Hilfe der Modulstruktur von ω_R (vgl. Satz 6.10). Schließlich erklären wir noch den Zusammenhang des Begriffs der allgemeinen Lage i -ter Ordnung mit dem klassischen Begriff “ \mathbb{X} stellt unabhängige Bedingungen an das lineare System der Hyperflächen vom Grad i ” (vgl. Satz 6.15).

Einen besonders wichtiger Uniformitätsbegriff ist die Bedingung der uniformen Lage eines 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$, die wir im siebten Abschnitt unter die Lupe nehmen. Der Satz von der uniformen Lage von J. Harris (vgl. Satz 7.1) besagt, daß ein generischer Hyperebenenschnitt $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ einer integren Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ im Fall $\text{char}(K) = 0$ die Eigenschaft hat, daß je zwei Teilmengen der gleichen Mächtigkeit auch die gleiche Hilbert-Funktion besitzen. Allgemeiner sagen wir für jedes $i \in \{1, \dots, \deg \mathbb{X} - 1\}$, ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ sei i -uniform, wenn alle Unterschemata $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{X} - i \leq \deg \mathbb{Y} \leq \deg \mathbb{X}$ die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{Y}}(j) = \min\{H_{\mathbb{X}}(j), \deg \mathbb{Y}\}$ für $j \in \mathbb{Z}$ haben. Die uniforme Lage entspricht dann dem Fall $i = \deg \mathbb{X} - 1$, und Cayley-Bacharach Schemata sind nichts anderes als 1-uniforme Schemata (vgl. Bemerkung 7.3). Für $0 \leq i \leq \sigma_{\mathbb{X}}$ charakterisieren wir $(\deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(i))$ -uniforme Schemata durch die Struktur ihres kanonischen Moduls ω_R (vgl. Satz 7.6) und folgern Ungleichungen für ihre Hilbert-Funktionen (vgl. Korollar 7.7). Außerdem verallgemeinern wir diesen Begriff noch weiter und definieren ein Konzept (i, j) -uniformer Schemata, das nicht nur die i -Uniformität, sondern auch die linear allgemeine Lage umfaßt (vgl. Definition 7.12 und Bemerkung 7.13). Dieses Konzept liefert uns die richtigen Bedingungen, unter denen wir die oben erwähnte Gale-Transformierte zu einer ganzen Reihe kanonisch transformierter 0-dimensionaler Schemata $\kappa_i(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{P}^{r-1}$ mit $r = \deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(i)$ für $1 \leq i \leq \sigma_{\mathbb{X}}$ ausbauen können (vgl. Satz 7.14).

Die Ungleichungen, die sich für die Hilbert-Funktion eines reduzierten Cayley-Bacharach Schemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ergeben haben, sind nur geringfügig schwächer als diejenigen, die wir im Falle der $\Delta_{\mathbb{X}}$ -Uniformität erhalten. Und Beispiele reduzierter Cayley-Bacharach Schemata, die die stärkeren Ungleichungen nicht erfüllen, sind nur schwer zu finden (vgl. Beispiel 8.1). Deshalb definieren wir im achten Abschnitt für reduzierte 0-dimensionale Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ den Begriff der kohomologischen Uniformität. Anschaulich soll dieser Begriff Fälle wie Beispiel 8.1 ausschließen, wo \mathbb{X} aus zwei disjunkten Punktmengen \mathbb{Y} und \mathbb{Y}' besteht, die auf disjunkten Varietäten “kleinen” Grades liegen. Die exakte Definition besagt, daß die Restklassen der Separatoren von \mathbb{Y} und \mathbb{Y}' nicht in zwei Untervektorräumen von $\overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ liegen dürfen, deren direkte Summe der ganze Raum ist. Man kann dies auch mit Hilfe der Relationenmatrix \mathfrak{B} dieser Restklassen formulieren (vgl. Satz 8.3) oder mit Hilfe der Struktur der homogenen Komponente vom Grad $\sigma_{\mathbb{X}}$ des lokalen Kohomologiemoduls $H_{\mathfrak{m}}^1(R)$ (vgl. Bemerkung 8.6). Wiederum charakterisieren wir die kohomologische Uniformität an Hand der Struktur des Moduls ω_R (vgl. Satz 8.8) und sehen, daß sie gerade zwischen der 1-Uniformität und der $\Delta_{\mathbb{X}}$ -Uniformität anzusiedeln ist (vgl. Korollar 8.9). Im Fall $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$ entspricht sie auch gerade dem Nicht-Zerfallen von \mathbb{X} in der Form $\mathbb{X} = (\mathbb{X} \cap L_1) \cup (\mathbb{X} \cap L_2)$ mit disjunkten linearen Teilräumen $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{P}^d$ (vgl. Satz 8.13).

Einer der Hauptsätze dieser Arbeit ist nun Satz 9.1, der die stärkeren Ungleichungen $H_{\mathbb{X}}(i) + H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - i) \leq \deg \mathbb{X} - \Delta_{\mathbb{X}} + 1$ bereits für kohomologisch uniforme, reduzierte, 0-dimensionale Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ liefert. Der Beweis dieses Satzes basiert auf einer eingehenden Untersuchung der Struktur des kanonischen Ideals kohomologisch uniformer Schemata in Abschnitt 9. Wir zeigen, daß \mathbb{X} genau dann kohomologisch uniform ist, wenn es Elemente $r \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ und $\varphi \in (\mathfrak{J}_{R/K[x_0]})_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ gibt, so daß für jede Ergänzung von $\{\varphi\}$ zu einer K -Basis $\{\varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_{\Delta_{\mathbb{X}}}\}$ von $(\mathfrak{J}_{R/K[x_0]})_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ gilt

$$(\mathfrak{J}_{R/K[x_0]})_{2\sigma_{\mathbb{X}}+1} = R_{\sigma_{\mathbb{X}}} \cdot \varphi \oplus K \cdot r\varphi_2 \oplus \dots \oplus K \cdot r\varphi_{\Delta_{\mathbb{X}}}$$

(vgl. Satz 9.9). Der Beweis von Satz 9.1 läuft dann darauf hinaus zu zeigen, daß man für $r \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ die $\sigma_{\mathbb{X}}$ -te Potenz einer generisch gewählten Linearform $\ell \in R_1$ wählen kann (vgl. Satz 9.12).

Im zehnten Abschnitt fassen wir die betrachteten Uniformitätsbegriffe noch einmal unter einem anderen Aspekt zusammen. Dazu betrachten wir die Multiplikationsabbildung $R_{\sigma_{\mathbb{X}}} \otimes_K (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} \rightarrow (\omega_R)_0$ und die Mengen $Z_i \subseteq R_{\sigma_{\mathbb{X}}} \oplus (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}}$, wo die Faserprodukte $F(r, \varphi) = \{(r', \varphi') \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}} \oplus (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} \mid r'\varphi = r\varphi'\}$ mindestens die Dimension $i \in \{1, \dots, \deg \mathbb{X}\}$ haben. Aus der Struktur der Kette $R_{\sigma_{\mathbb{X}}} \oplus (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} = Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_{\deg \mathbb{X}} \supseteq \{(0, 0)\}$ erkennen wir z.B., ob \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema, ein Cayley-Bacharach Schema mit $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$ oder ein $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniformes Schema ist (vgl. die Sätze 10.3, 10.4 und 10.6). Berechnen wir im reduzierten Fall die die Mengen Z_i definierenden Gleichungen, so tauchen gerade diejenigen Matrizen auf, die im Beweis des Satzes 9.1 eine Rolle spielten (vgl. Bemerkung 10.8). Schließlich stellen wir eine detaillierte Hierarchie der Cayley-Bacharach Schemata auf (vgl. Satz 10.9), die die Uniformität eines Cayley-Bacharach Schemas fein abgestuft klassifiziert, und belegen an Beispielen, daß die betrachteten Abstufungen wirklich alle verschieden sind.

Das dritte Kapitel über Spezialfälle und Anwendungen beginnt mit einigen Ausführungen über 0-dimensionale Level-Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$. Diese sind dadurch definiert, daß alle Sockelelemente von \overline{R} den gleichen Grad haben bzw. daß ω_R von seinen homogenen Elementen kleinsten Grades erzeugt wird (vgl. Definition 11.5 und Satz 11.6). In seiner Arbeit [Hi1] hat T. Hibi gezeigt, daß die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} noch stärkeren Einschränkungen als den oben erwähnten genügt, wenn das Ordnungsideal von $J_{\mathbb{X}} = I_{\mathbb{X}}|_{X_0=1}$ bzgl. einer geeigneten Termordnung nur maximale Elemente vom Grad $\sigma_{\mathbb{X}} + 1$ hat (vgl. Satz 11.3). Wir zeigen, daß diese Bedingung impliziert, daß \mathbb{X} ein Level-Schema ist (vgl. Satz 11.7) und vermuten dieselben Einschränkungen für die Hilbert-Funktionen genügend uniformer Level-Schemata (vgl. Vermutung 11.12). Neben einigen elementaren Eigenschaften der Hilbert-Funktion von Level-Schemata (vgl. Satz 11.9) beweisen wir auch, daß diese stets Cayley-Bacharach Schemata sind (vgl. Satz 11.13), und daß aus unserer Vermutung die Unimodalität der höchsten Differenzenfunktion der Hilbert-Funktion eines standard-graduierten Gorenstein-Bereichs folgen würde (vgl. Satz 11.15). Anschließend diskutieren wir noch eine Vermutung von T. Hibi, die allerdings in ihrer allgemeinsten Form in [NR] widerlegt wurde.

Eine wichtige Motivation für die Untersuchung 0-dimensionaler Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ist die Castelnuovo-Theorie. Am Ende des letzten Jahrhunderts begann G. Castelnuovo systematisch, Ergebnisse über integrale Kurven $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ aus dem Studium der Hilbert-Funktion eines ihrer generischen Hyperebenenschnitte $\mathbb{X} = C \cap H \subseteq H \cong \mathbb{P}^d$ abzuleiten (vgl. [C1], [C2]). Mittlerweile stellt diese Methode neben der Brill-Noether Theorie eine der Hauptmethoden zum Studium projektiver algebraischer Kurven dar. Eine gut lesbare Einführung in die Castelnuovo-Theorie findet der Leser in [HE]. Wir haben unsere Beiträge zu diesem Thema in Abschnitt 12 zusammengefaßt. Im ersten Teil beschäftigen wir uns mit der Frage, wie viel vom Satz von der uniformen Lage richtig bleibt, wenn man die Voraussetzung $\text{char}(K) = 0$ wegläßt, und ob man dafür einen rein algebraischen Beweis finden kann. Der Zusammenhang zwischen den kanonischen Modulen des homogenen Koordinatenrings von $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ und $\mathbb{X} = C \cap H \subseteq H \cong \mathbb{P}^d$ wird durch eine exakte Sequenz beschrieben (vgl. Satz 12.1), und unter der Zusatzvoraussetzung $\sigma_{\mathbb{X}} = \sigma_C + 1$ zeigen wir damit, daß der generische Hyperebenenschnitt \mathbb{X} einer integralen Kurve C stets ein Cayley-Bacharach Schema ist (vgl. Satz 12.3). Dies hat wiederum Auswirkungen für die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} im speziellen und standard-graduierten Cohen-Macaulay Bereichen im allgemeinen (vgl. Korollar 12.4). Im zweiten Teil studieren wir einen Satz von R. Strano (vgl. [Str], Thm. 6), der besagt, daß eine integrale Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^3$ ein vollständiger Durchschnitt ist, wenn ein generischer Hyperebenenschnitt dies ist und wenn $\alpha_C \geq 3$ gilt. Wir erklären, wie sich der Beweis dieses Satzes aus zwei Teilbarkeitseigenschaften des Hartshorne-Rao Moduls von C ergibt (vgl. die Sätze 12.9, 12.10 und 12.12), und wie er mit deren Hilfe später verallgemeinert wurde.

Im Abschnitt 13 wenden wir uns der minimalen graduiert-freien Auflösung von $R = K[X_0, \dots, X_d]/I_{\mathbb{X}} = A/I_{\mathbb{X}}$ als A -Modul zu und erinnern daran, daß diese zu der A -Auflösung von ω_R dual ist. Wir charakterisieren 0-dimensionale Schemata mit linearer Auflösung, d.h. in deren Auflösung an jeder Stelle nur die kleinstmögliche Gradverschiebung vorkommt (vgl. Korollar 13.3) und mit fast linearer Auflösung, d.h. in deren Auflösung an jeder Stelle bis auf die letzte nur die kleinstmögliche Gradverschiebung vorkommt (vgl. Satz 13.4). Wieder erhalten wir Ungleichungen für die Hilbert-Funktionen solcher 0-dimensionalen Schemata (vgl. Korollar 13.5) und können auch Auflösungen, die fast von höherer Ordnung sind, mit Hilfe der Struktur des kanonischen Moduls ω_R charakterisieren (vgl. Satz 13.7 und [K2], 5.4).

Im 14. Abschnitt betrachten wir nur nicht ausgeartete, reduzierte, 0-dimensionale Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$, die $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$ erfüllen und kohomologisch uniform sind. Für sie kennen wir nach den Ergebnissen der Abschnitte 8 und 9 bereits ein minimales homogenes Erzeugendensystem $\{\varphi, \pi_2, \dots, \pi_{\Delta}\}$ des kanonischen Ideals $\mathfrak{J}_{R/K[x_0]}$. Jetzt konstruieren wir auch ein explizites homogenes Erzeugendensystem des ersten Syzygienmoduls $\text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_{\Delta})$ dieses kanonischen Ideals (vgl. Korollar 14.3). Dazu analysieren wir zunächst die Beziehung dieses Syzygienmoduls zu $\text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_{\Delta})$ (vgl. Bemerkung 14.1) und konstruieren dann ein explizites homogenes Erzeugendensystem des letzteren A -Moduls (vgl. Satz 14.2). Als Anwendung zeigen wir, daß der R -Modul $\text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2)$ im Fall $\text{deg } \mathbb{X} = d + 3$ von seinen homogenen Elementen mi-

nimalen Grades erzeugt wird (vgl. Satz 14.4) und vergleichen dies mit den analogen Resultaten aus [CRV2] für den Modul $\text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2)$ (vgl. Satz 14.5 und Beispiel 14.6). Außerdem geben wir noch einen schnellen Algorithmus an, wie man das konstruierte Erzeugendensystem effektiv berechnen kann (vgl. Bemerkung 14.7).

Will man ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit vorgegebenen Eigenschaften konstruieren, so bieten sich mehrere Verfahren an.

1) Man startet mit einem bekannten 0-dimensionalen Schema und fügt induktiv Punkte hinzu, wobei man Acht gibt, daß die gesuchten Eigenschaften bei diesem Prozeß erhalten bleiben oder herbeigeführt werden.

2) Man startet mit einem “großen” 0-dimensionalen Schema $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{P}^d$, das arithmetisch Gorenstein ist (z.B. mit einem vollständigen Durchschnitt), und versucht, das zu dem gesuchten Schema residuelle Unterschema von \mathbb{V} zu konstruieren, nachdem man die gesuchten Eigenschaften mit Hilfe von Eigenschaften des residuellen Schemas charakterisiert hat.

3) Man konstruiert ein Erzeugendensystem des affinen Ideals von $\mathbb{X} \subseteq D_+(X_0) \cong \mathbb{A}^d$, wie es im Gestaltlemma auftritt, und wendet dann eine Art “Galois-Theorie für Punkte” an.

Die ersten beiden Methoden werden in den Abschnitten 15 und 16 besprochen, und für die dritte verweisen wir auf [Ga] sowie [NR]. Bei der iterativen Konstruktionsmethode können wir die Cayley-Bacharach Eigenschaft von \mathbb{X} nicht immer beibehalten. Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein Cayley-Bacharach Schema mit der Eigenschaft, daß kein 0-dimensionales Schema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} + 1$ und $\mathbb{Y} \supseteq \mathbb{X}$ ein Cayley-Bacharach Schema ist, so heißt \mathbb{X} ein maximales Cayley-Bacharach Schema. Wir zeigen an Beispielen, daß man in dieser Definition auch nichtreduzierte Schemata \mathbb{Y} zulassen muß, selbst wenn man mit einem reduzierten Schema \mathbb{X} startet (vgl. die Beispiele 15.2 und 15.3). Dann geben wir einen Zusammenhang zwischen der Existenz eines Cayley-Bacharach Schemas $\mathbb{Y} \supseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} + 1$ und den Graden der minimalen homogenen Erzeuger des Verschwindungsideals $I_{\mathbb{X}}$ an (vgl. Satz 15.4). Hieraus erhalten wir z.B., daß die meisten 0-dimensionalen vollständigen Durchschnitte maximale Cayley-Bacharach Schemata sind (vgl. Korollar 15.8). Andererseits geben wir auch Kriterien dafür an, daß ein Cayley-Bacharach Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ nicht maximal ist. Diese Kriterien hängen von der Beschaffenheit des Ideals $\langle (I_{\mathbb{X}})_{\leq \sigma_{\mathbb{X}}} \rangle$ ab (vgl. Satz 15.6). Aus ihnen ergibt sich z.B., daß Cayley-Bacharach Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit generischer Hilbert-Funktion fast nie maximal sind (vgl. Korollar 15.7). Es liegt also nahe zu vermuten, daß “spezielle” Cayley-Bacharach Schemata maximal sind, während “allgemeine” dies nicht sind. In einer Reihe weiterer Situationen bestätigt sich diese Vermutung, etwa für 0-dimensionale Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$, die arithmetisch Gorenstein sind und $\alpha_{\mathbb{X}} \geq 3$ erfüllen, oder für gewisse determinantielle 0-dimensionale Schemata (vgl. Satz 15.11).

Versuchen wir, 0-dimensionale Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{V}$ eines 0-dimensionalen arithmetischen Gorenstein-Schemas $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{P}^d$ mittels Liaison aus dem zu \mathbb{X} residuellen Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{V}$ zu konstruieren, so benötigen wir die Zusammenhänge zwischen den numerischen Invarianten dieser drei Schemata (vgl. Satz 16.2) sowie eine Charakterisierung

der Cayley-Bacharach Schemata mittels Liaison (vgl. Satz 16.3). Die letztere Charakterisierung lautet, daß \mathbb{X} genau dann ein Cayley-Bacharach Schema darstellt, wenn die homogenen Elemente kleinsten Grades des Ideals $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}$ von \mathbb{Y} im homogenen Koordinatenring von \mathbb{V} nicht auf einem Unterschema $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{V}$ mit $\mathbb{Y}' \supseteq \mathbb{Y}$ und $\deg \mathbb{Y}' = \deg \mathbb{Y} + 1$ verschwinden. Dies ist insbesondere der Fall, wenn $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}$ von seinen homogenen Elementen kleinsten Grades erzeugt wird (vgl. Korollar 16.5). Wir zeigen an Beispielen, wie man auf diese Weise interessante Cayley-Bacharach Schemata konstruieren kann (vgl. die Beispiele 16.6 und 16.7 sowie [K8], §4). Auch maximale Cayley-Bacharach Schemata lassen sich mit Liaison charakterisieren (vgl. Korollar 16.8). Schließlich verallgemeinern wir [K1], 4.11 auf den nicht notwendig reduzierten Fall. Wir erhalten eine Serie von Bedingungen, die unter der Liaison dazu äquivalent sind, daß \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema darstellt, und die besonders für die effektive Prüfung dieser Eigenschaft mit Hilfe eines Computers geeignet sind (vgl. Satz 16.9 und Abschnitt 20).

In Abschnitt 17 betrachten wir 0-dimensionale Unterschemata \mathbb{X} der projektiven Ebene \mathbb{P}^2 . In diesem Fall haben wir gegenüber der allgemeinen Situation zusätzliche Eigenschaften der Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{X}}$ und weitere zusätzliche Techniken zur Verfügung (vgl. Lemma 17.1). Insbesondere entspricht im reduzierten Fall der Zerlegung der Castelnuovo-Funktion in Schichten (vgl. Definition 17.2) eine Zerlegung des Schemas selbst, die wir die kanonische Zerlegung nennen (vgl. Satz 17.3). Mit Hilfe der kanonischen Zerlegung beweisen wir eine obere Schranke für die Kolänge des Führers $\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R} = \{r \in \tilde{R} \mid r \cdot \tilde{R} \subseteq R\} \subseteq R$ von R in seinem ganzen Abschluß \tilde{R} (vgl. Satz 17.8). Diese Schranke hängt nur von der Castelnuovo-Funktion von \mathbb{X} ab und ist scharf, wie wir dadurch nachweisen, daß wir geeignete reduzierte 0-dimensionale Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ konstruieren (vgl. Satz 17.10). Ebenso beweisen wir eine untere Schranke für die Kolänge des Führeres $\ell(R/\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R})$ und zeigen, daß diese von den sogenannten Castelnuovo-Schemata angenommen wird (vgl. Definition 17.11 und Satz 17.13). Am Ende dieses Abschnitts beweisen wir auch Abschätzungen für den Singularitätsgrad $\ell(\tilde{R}/R)$ und die Superabundanz $\delta_{\mathbb{X}} = \ell(\tilde{R}/R) - \ell(R/\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R})$ eines reduzierten 0-dimensionalen Schemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ (vgl. Satz 17.16), die die Ungleichungen aus der lokalen Situation in [HK], 3.7 verfeinern und auch D. Gorensteins ursprüngliche Charakterisierung der Gorenstein-Ringe (vgl. [Gor], Thm. 6) verallgemeinern.

Als wir weiter oben Beispielklassen für Cayley-Bacharach Schemata betrachteten, fanden wir, daß viele determinantielle Schemata dazugehören. Daher studieren wir im 18. Abschnitt einige Charakterisierungen determinantieller 0-dimensionaler Schemata. Dabei unterscheiden wir zwischen standard determinantiellen Schemata, d.h. solchen, die von den maximalen Minoren einer homogenen $t \times (t+r)$ -Matrix \mathfrak{A} homogener Polynome mit $r = \text{codim}(\mathbb{X}) - 1$ definiert werden, und gut determinantiellen Schemata, d.h. solchen, bei denen man zusätzlich verlangen kann, daß die Matrix \mathfrak{A} (eventuell nach einem Basiswechsel) eine $(t-1) \times (t+r)$ -Untermatrix enthält, deren maximale Minoren ein Unterschema der Kodimension $r+2$ definieren.

Für 0-dimensionale Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ bedeutet dabei die Bedingung, gut determi-

nantiell zu sein, nichts anderes als standard determinantiell und ein lokal vollständiger Durchschnitt zu sein (vgl. Satz 18.8). Ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ ist genau dann gut determinantiell, wenn es eine Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^3$ gibt, die arithmetisch Cohen-Macaulay und ein lokal vollständiger Durchschnitt ist, so daß $\mathbb{X} \subseteq C$ das zu einem subkanonischen effektiven Cartier-Divisor assoziierte abgeschlossene Unterschema darstellt (vgl. Satz 18.5). Diese Charakterisierung verallgemeinert das entsprechende Resultat für 0-dimensionale vollständige Durchschnitte $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ in [K7], 1.3. Wollen wir sie zu einer Charakterisierung gut determinantieller 0-dimensionaler Unterschemata beliebiger projektiver Räume ausbauen, so brauchen wir die Beschreibung gut determinantieller Schemata als die Nullstellenschemata regulärer globaler Schnitte der Duale von ersten Buchsbaum-Rim Garben vom Rang $\text{codim } \mathbb{X}$ (vgl. Satz 18.8). Hierbei sind erste Buchsbaum-Rim Garben definiert als die Kerne generisch surjektiver Morphismen endlich erzeugter, lokal freier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}$ -Moduln, deren Kokern einen Träger der erwarteten Dimension besitzt (vgl. Definition 18.6). Nun erhalten wir, daß ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ genau dann gut determinantiell ist, wenn es auf einer gut determinantiellen Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^d$, die ein lokal vollständiger Durchschnitt ist, das zu einem effektiven Cartier-Divisor assoziierte abgeschlossene Unterschema darstellt, und wenn es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(i) \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \longrightarrow 0$$

mit $i, j \in \mathbb{Z}$ und einem gewissen Modul $M \in \mathcal{M}_C$ gibt (vgl. Korollar 18.12). Wir geben auch noch Verallgemeinerungen zur Charakterisierung beliebig kodimensionaler, gut determinantieller Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ sowie zur Charakterisierung vollständiger Durchschnitte an (vgl. die Sätze 18.11 und 18.13).

Im 19. Abschnitt betrachten wir den Fall, daß $\text{char}(K) = p > 0$ ist und $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema darstellt, das für ein $q = p^e$ mit $e > 0$ nur aus \mathbb{F}_q -rationalen Punkten besteht. In diesem Fall gibt es starke Einschränkungen an die möglichen Hilbert-Funktionen von \mathbb{X} . Zum Beispiel kann die Invariante $\sigma_{\mathbb{X}}$ nur bestimmte Werte annehmen (vgl. Satz 19.2). In den Fällen $p = 2$ und $d = 2$ geben wir diese möglichen Werte alle an (vgl. die Sätze 19.5 und 19.6), und im allgemeinen Fall bestimmen wir sie für viele Fälle im Bereich $d + 1 \leq \deg \mathbb{X} \leq \frac{q^{d+1}-1}{q-1} = \deg \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q)$ (vgl. Satz 19.3). Derartige 0-dimensionale Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^d$ liefern eine ganze Reihe von linearen Kodern $C^r \subseteq \mathbb{F}_q^s$ mit $1 \leq r \leq \sigma_{\mathbb{X}}$ und $s = \deg \mathbb{X}$ (vgl. Bemerkung 19.8). Die Invarianten und geometrischen Eigenschaften von \mathbb{X} sind auf das Engste mit den in der Kodierungstheorie untersuchten Größen wie Länge, Dimension und Minimalabstand linearer Kodern verbunden (vgl. die Sätze 19.9 und 19.10). Beispielsweise gibt es in der Kodierungstheorie die sogenannten MDS-Kodern $C \subseteq \mathbb{F}_q^s$, die dadurch definiert sind, daß sie in der Singleton-Schranke (vgl. Satz 19.7) den Maximalwert für den Minimalabstand annehmen. Für aus 0-dimensionalen Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ wie oben gewonnene Kodern $C^r \subseteq \mathbb{F}_q^s$ bedeutet diese Bedingung, daß \mathbb{X} ein $(s - H_{\mathbb{X}}(r))$ -uniformes Schema sein muß (vgl. Korollar 19.11). Die Matrix \mathfrak{B} (bzw. $\widetilde{\mathfrak{B}}$) aus den ersten beiden Kapiteln ist gerade die Parity-Check Matrix des Kode $C^{\sigma_{\mathbb{X}}}$, der damit dual ist zu dem der $\sigma_{\mathbb{X}}$ -ten kanonischen

Transformierten von \mathbb{X} zugeordneten Kode (vgl. auch [RT]). Allgemeiner kann man auf analoge Weise allen homogenen Komponenten des kanonischen Ideals von \mathbb{X} lineare Kodens zuordnen, die zu den Kodens dual sind, die den kanonischen Transformierten von \mathbb{X} entsprechen.

Unser 20. und letzter Abschnitt stellt die wichtigsten Methoden vor, wie man die im Verlauf der Arbeit aufgetretenen Bedingungen, Begriffe und Invarianten mit Hilfe der Computeralgebra berechnen oder prüfen kann. Für reduzierte 0-dimensionale Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$, die durch die Koordinaten ihrer Punkte gegeben sind, empfiehlt sich der Buchberger-Möller Algorithmus zur Bestimmung des homogenen Verschwindungsideals, da er sehr effizient ist und zugleich weitere wertvolle Informationen liefert (vgl. Satz 20.1). Der Algorithmus zur Berechnung einer minimalen homogenen Präsentation des A -Moduls ω_R beruht auf der Formel $\omega_R \cong \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])(-1)$, mit der wir die Elemente von ω_R als $K[x_0]$ -lineare Abbildungen auffassen können. Ist das Ordnungsideal von $J_{\mathbb{X}} = I_{\mathbb{X}}|_{X_0=1}$ bzgl. einer gradkompatiblen Termordnung von $K[X_1, \dots, X_d]$ gegeben durch $\{T_1, \dots, T_s\}$ mit $s = \deg \mathbb{X}$, so stellen die Bilder $t_i = T_i + I_{\mathbb{X}} \in R$ mit $1 \leq i \leq s$ eine $K[x_0]$ -Basis von R dar, und die Projektionen $p_i(t_j) = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, s$ erzeugen ω_R (vgl. Satz 20.2). Man kann sich dabei sogar auf die Projektionen auf die Sockelmonome $\mathfrak{S}(O_\sigma(J_{\mathbb{X}})) = \{T \in O_\sigma(J_{\mathbb{X}}) \mid X_i \cdot T \notin O_\sigma(J_{\mathbb{X}}) \text{ für } i = 1, \dots, d\}$ beschränken und erhält eine Gröbner-Basis von ω_R (vgl. Satz 20.3). Nun muß man noch die Syzygien dieser Gröbner-Basis berechnen und minimalisieren.

Das kanonische Ideal eines reduzierten 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ergibt sich aus diesem Algorithmus und dem Isomorphismus $\mathfrak{J}_{R/K[x_0]} \cong \omega_R(-2\sigma_{\mathbb{X}} - 1)$, und den Kählerschen Differentialmodul $\Omega_{R/K}^1$ haben wir im vierten Abschnitt sowieso explizit präsentiert. Will man prüfen, ob ein durch sein Verschwindungsideal $I_{\mathbb{X}} \subseteq A$ gegebenes 0-dimensionales Schema \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema ist, so kann man aus der Liaison-Technik aus Abschnitt 16 einen geeigneten Algorithmus ableiten. Die Prüfung höherer Uniformitäten läuft wegen Satz 7.6 meist darauf hinaus, daß man eine lineare Abbildung $U \otimes V \rightarrow W$ endlichdimensionaler K -Vektorräume auf Bijektivität hin testen muß. Hierfür geben wir ebenfalls zwei geeignete Algorithmen an (vgl. die Bemerkungen 20.5 und 20.6). Ist man an den graduierten Betti-Zahlen und den Gradverschiebungen in der minimalen graduiert-freien A -Auflösung von R interessiert, so kann man diese entweder mit den Standardverfahren der Gröbner-Basis Theorie berechnen, oder – falls man z.B. nur die letzten Moduln der Auflösung wissen will – zuerst den obigen Algorithmus zur Bestimmung einer Präsentation von ω_R anwenden und dann diesen Modul auflösen. Besitzt ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ schließlich eine generische Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}}(i) = \min\{H_{\mathbb{P}^d}(i), \deg \mathbb{X}\}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$, so genügt es, den linearen Teil der Auflösung von $I_{\mathbb{X}}$ oder den linearen Teil der Auflösung von ω_R zu finden (vgl. Satz 20.7 und Definition 20.8), um alle graduierten Betti-Zahlen und alle Gradverschiebungen zu erhalten.

I. Grundlegende Objekte

1. Der homogene Koordinatenring

Zu Beginn dieser Arbeit beschreiben wir die ihr zugrunde liegende Situation. Wir führen eine Reihe von Vereinbarungen und Notationen ein, die wir im weiteren beibehalten. Die meisten Ergebnisse sind auch in den Arbeiten [K1], [K2], [K3] und [K4] erklärt. Für allgemeine Resultate der algebraischen Geometrie verweisen wir auf das Buch [H1].

In dieser Arbeit gehen wir stets von einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper K beliebiger Charakteristik aus. Mit \mathbb{P}^d bezeichnen wir den d -dimensionalen projektiven Raum über K . Unser Hauptinteresse gilt dem Studium eines 0-dimensionalen abgeschlossenen Unterschemas \mathbb{X} von \mathbb{P}^d . Da wir die Einbettung $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ immer festhalten, sagen wir auch “ \mathbb{X} hat die Eigenschaft \mathcal{P} ” anstelle von “die Einbettung $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ hat die Eigenschaft \mathcal{P} ”.

Der homogene Koordinatenring von \mathbb{P}^d ist der Polynomring $A = K[X_0, \dots, X_d]$, den wir mit der Graduierung $\deg X_0 = \dots = \deg X_d = 1$ versehen. Mit $I_{\mathbb{X}}$ bezeichnen wir das homogene Verschwindungsideal von \mathbb{X} , d.h. wir setzen $I_{\mathbb{X}} = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(\mathbb{P}^d, \mathcal{J}_{\mathbb{X}}(i))$, wenn $\mathcal{J}_{\mathbb{X}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}$ die \mathbb{X} definierende Idealgarbe ist. Bekanntlich ist $I_{\mathbb{X}}$ ein saturiertes Ideal von A , d.h. aus $(X_0, \dots, X_d)^i \cdot F \in I_{\mathbb{X}}$ für ein $F \in A$ und ein $i \geq 0$ folgt $F \in I_{\mathbb{X}}$. Der Restklassenring $R = A/I_{\mathbb{X}}$ heißt der *homogene* (oder *projektive*) *Koordinatenring* von \mathbb{X} . Der Ring $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i = \bigoplus_{i \geq 0} A_i/(I_{\mathbb{X}})_i$ ist ein sogenannter standard-graduierter Ring, d.h. es ist $R_0 = K$ ein Körper, der K -Vektorraum R_1 ist endlich-dimensional, und R wird als K -Algebra von R_1 erzeugt. Das eindeutige homogene maximale Ideal von R bezeichnen wir mit $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i > 0} R_i$, und für $i = 0, \dots, d$ schreiben wir x_i für die Restklasse von X_i in R .

Als 0-dimensionales Schema besitzt \mathbb{X} einen Träger $\text{Supp}(\mathbb{X}) = \{P_1, \dots, P_s\}$, der aus endlich vielen abgeschlossenen Punkten von \mathbb{P}^d besteht. Der Grad von \mathbb{X} als projektives Unterschema von \mathbb{P}^d ist durch $\deg \mathbb{X} = \sum_{i=1}^s \text{length}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}) = \sum_{i=1}^s \dim_K(\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i})$ gegeben und stimmt überein mit der Länge des Rings $H^0(\mathbb{X}, \mathcal{O}_{\mathbb{X}})$. Für $i = 1, \dots, s$ entspricht der Punkt P_i einem homogenen Primideal \mathfrak{P}_i von A , dessen Bild in R ein minimales homogenes Primideal \mathfrak{p}_i ist. Der lokale Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}$ ist dann auch die homogene Lokalisation von R im Primideal \mathfrak{p}_i .

1.1. Voraussetzung. Wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, setzen wir für den Rest dieser Arbeit stets voraus, daß das Koordinatensystem $\{X_0, \dots, X_d\}$ von \mathbb{P}^d so gewählt wurde, daß kein Punkt des Trägers von \mathbb{X} auf der Hyperebene $\mathcal{Z}(X_0)$ liegt.

Gelegentlich werden wir $\mathcal{Z}(X_0)$ als die unendlich ferne Hyperebene bezeichnen. Das Schema \mathbb{X} ist ein abgeschlossenes Unterschema des zu $\mathcal{Z}(X_0)$ komplementären affinen Raums $\mathbb{A}^d \cong D_+(X_0)$ und hat als solches den affinen Koordinatenring $S = H^0(\mathbb{X}, \mathcal{O}_{\mathbb{X}}) \cong \prod_{i=1}^s \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}$.

1.2. Lemma. a) Unter der obigen Voraussetzung sind x_0 und $x_0 - 1$ Nichtnullteiler des Rings R .

b) Es gilt $S \cong R/(x_0 - 1)$.

c) Der Ring R ist ein 1-dimensionaler Cohen-Macaulay Ring.

d) Der Ring $\bar{R} = R/(x_0)$ ist ein 0-dimensionaler lokaler Ring mit maximalem Ideal $\bar{\mathfrak{m}} = (\mathfrak{m} + (x_0))/(x_0)$ und insbesondere ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum.

Beweis: Nach Vor. 1.1 liegt das Element x_0 in keinem der minimalen Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ von R und ist daher ein Nichtnullteiler. Gilt $(x_0 - 1)f = 0$ für ein $f \in R \setminus \{0\}$, so zerlegen wir f in seine homogenen Komponenten $f = f_0 + \dots + f_\delta$ mit $f_i \in R_i$ und $f_\delta \neq 0$ und erhalten aus $x_0 f_\delta = 0$ einen Widerspruch. Also ist auch $x_0 - 1$ ein Nichtnullteiler von R . Behauptung b) folgt aus $(R_{x_0})_0 \cong R/(x_0 - 1)$ und [H1], II.5.11 sowie II.5.16. Teil c) ergibt sich aus a) und [H1], I.7.5, und d) ist eine Konsequenz von c). \square

Die Funktion $H_{\mathbb{X}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, die durch $i \mapsto \dim_K R_i$ gegeben ist, heißt die *Hilbert-Funktion* von \mathbb{X} . Ihre erste Differenzenfunktion $\Delta H_{\mathbb{X}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\Delta H_{\mathbb{X}}(i) = H_{\mathbb{X}}(i) - H_{\mathbb{X}}(i - 1)$ für $i \in \mathbb{Z}$ nennen wir auch die *Castelnuovo-Funktion* von \mathbb{X} . Das nächste Lemma faßt einige wichtige Eigenschaften dieser Funktionen zusammen.

1.3. Lemma. a) Für $i < 0$ gilt $H_{\mathbb{X}}(i) = 0$ und $H_{\mathbb{X}}(0) = 1$.

b) Die Zahl $H_{\mathbb{X}}(1) - 1$ ist die Dimension des kleinsten linearen Teilraums von \mathbb{P}^d , der \mathbb{X} enthält.

c) Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl $\sigma_{\mathbb{X}} \geq -1$ mit $H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}}) < \deg \mathbb{X}$ und $H_{\mathbb{X}}(i) = \deg \mathbb{X}$ für $i \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$.

d) Es gilt $1 = H_{\mathbb{X}}(0) < \dots < H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}}) < \deg \mathbb{X}$.

e) Genau dann gilt $\Delta H_{\mathbb{X}}(i) \neq 0$, wenn $i \in \{0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}} + 1\}$ ist.

Beweis: Die Behauptungen a) und b) sind klar. Für $i \gg 0$ stimmt $H_{\mathbb{X}}(i)$ mit dem Hilbert-Polynom von \mathbb{X} überein, welches das konstante Polynom $\deg \mathbb{X}$ ist. Wegen Lemma 1.2.a ist $H_{\mathbb{X}}$ monoton zunehmend. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow R(-1) \xrightarrow{x_0} R \longrightarrow \bar{R} \longrightarrow 0$$

ergibt sich, daß $\Delta H_{\mathbb{X}}$ auch die Hilbert-Funktion von \bar{R} ist. Da \bar{R} ebenfalls eine standard-graduierte K -Algebra darstellt, folgen die Behauptungen d) und e). \square

Den letzten nichtverschwindenden Wert der Castelnuovo-Funktion bezeichnen wir mit $\Delta_{\mathbb{X}} = H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} + 1) - H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}})$. Außerdem werden wir gelegentlich die Zahl $\alpha_{\mathbb{X}} = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid H_{\mathbb{X}}(i) < \binom{d+i}{d}\} = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid (I_{\mathbb{X}})_i \neq (0)\}$ benötigen. Aus der Tatsache, daß $\dim_K R_i = \deg \mathbb{X}$ ist für $i \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$, und weil x_0 ein Nichtnullteiler von R ist, folgt $R_i = x_0^{i - \sigma_{\mathbb{X}} - 1} R_{\sigma_{\mathbb{X}} + 1}$ für jedes $i \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$. Um den Ring R vom Grad $\sigma_{\mathbb{X}} + 1$ an zu kennen, genügt es also, die homogene Komponente $R_{\sigma_{\mathbb{X}} + 1}$ genauer zu beschreiben.

Der kanonische Epimorphismus $R \twoheadrightarrow R/(x_0 - 1) = S$ wirkt durch die Dehomogenisierung $x_0 \mapsto 1$. Setzen wir $J_{\mathbb{X}} = I_{\mathbb{X}}/(I_{\mathbb{X}} \cap (X_0 - 1))$, so gilt $S = K[X_1, \dots, X_d]/J_{\mathbb{X}}$,

und wir können S mit der durch die Gradfiltrierung von $K[X_1, \dots, X_d]$ induzierten aufsteigenden Filtrierung \mathcal{F} versehen. Das Ideal $I_{\mathbb{X}}$ ist dann die Homogenisierung von $J_{\mathbb{X}}$ bzgl. dieser Filtrierung, d.h. es gilt $I_{\mathbb{X}} = (F^*)_{F \in J_{\mathbb{X}}}$ mit $F^* = X_0^{\deg F} \cdot F(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_d}{X_0})$ für $F \in K[X_1, \dots, X_d]$.

1.4. Lemma. *Die Einschränkung der Dehomogenisierung $R \longrightarrow S$ ($x_0 \mapsto 1$) auf die homogenen Elemente vom Grad $\sigma_{\mathbb{X}} + 1$ liefert einen Isomorphismus $R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \xrightarrow{\sim} S$ von K -Vektorräumen.*

Beweis: Da das Hauptideal $(x_0 - 1) \subseteq R$ keine nichttrivialen homogenen Elemente enthält, ist die angegebene Abbildung injektiv. Sie ist auch surjektiv, weil jedes Element $f \in S$ wegen $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S) \cong \bar{R}$ einen Repräsentanten F vom Grad $\deg F \leq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ in $K[X_1, \dots, X_d]$ besitzt, und da $X_0^{\sigma_{\mathbb{X}}+1-\deg F} \cdot F^* + I_{\mathbb{X}}$ auf f abgebildet wird. \square

Kombinieren wir diesen mit dem kanonischen Isomorphismus $S \cong \prod_{i=1}^s \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}$, so erhalten wir einen Isomorphismus von K -Vektorräumen $\iota : R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^s \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}$, der jedes homogene Element $r \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ auf das Tupel seiner Keime $(r_{P_1}, \dots, r_{P_s})$ abbildet. Insbesondere gilt hierbei $\iota(x_0^{\sigma_{\mathbb{X}}+1}) = (1, \dots, 1)$. Als Anwendung erhalten wir z.B. die folgende Charakterisierung der homogenen Nichtnullteiler von R .

1.5. Lemma. *Sei $r \in R_i$ mit $i \geq 0$ ein homogenes Element von R . Gilt $i \leq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$, so bilden wir $\tilde{r} = x_0^{\sigma_{\mathbb{X}}+1-i} \cdot r$, und im Falle $i > \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ schreiben wir $r = x_0^{i-\sigma_{\mathbb{X}}-1} \cdot \tilde{r}$ mit $\tilde{r} \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$. Genau dann ist r ein Nichtnullteiler von R , wenn jede Komponente von $\iota(\tilde{r})$ eine Einheit ist.*

Beweis: Offenbar ist r genau dann ein Nichtnullteiler von R , wenn \tilde{r} einer ist. Ist \tilde{r}_{P_i} für ein $i \in \{1, \dots, s\}$ keine Einheit, so gibt es ein Element $s_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i} \setminus \{0\}$ mit $s_i \cdot \tilde{r}_{P_i} = 0$. Dann ist \tilde{r} kein Nichtnullteiler, denn $\iota^{-1}((0, \dots, 0, s_i, 0, \dots, 0)) \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ ist ungleich Null und annulliert \tilde{r} . Ist umgekehrt \tilde{r} ein Nichtnullteiler, so ist für $1 \leq i \leq s$ auch \tilde{r}_{P_i} ein Nichtnullteiler, also eine Einheit von $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}$. \square

Als nächstes untersuchen wir die Verbindungen zwischen den Idealen von R und den Unterschemata von \mathbb{X} . Das folgende Lemma ist hierbei oft nützlich.

1.6. Lemma. *a) Die Unterschemata von X entsprechen eineindeutig den saturierten homogenen Idealen von R , die echt in \mathfrak{m} enthalten sind.*

b) Ist $J \subseteq R$ ein Ideal, so ist seine Saturierung $J^{\text{sat}} = \{r \in R \mid \mathfrak{m}^i \cdot r \subseteq J \text{ für ein } i \geq 0\}$ bereits gegeben durch

$$J^{\text{sat}} = \{r \in R \mid x_0^i \cdot r \in J \text{ für ein } i \geq 0\}.$$

Beweis: Behauptung a) ist offenbar nur eine geeignete Version des Hilbertschen Nullstellensatzes. Zum Beweis der nichttrivialen Inklusion in b) sei $r \in R$ mit $x_0^i \cdot r \in J$ für ein $i \geq 0$ vorgegeben. Wegen $R_j = x_0^{j-\sigma_{\mathbb{X}}-1} \cdot R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ für $j \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ gilt dann $\mathfrak{m}^{\sigma_{\mathbb{X}}+1+i} \cdot r = \mathfrak{m}^{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \cdot x_0^i \cdot r \subseteq J$. \square

Von besonderer Bedeutung sind die Unterschemata $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$. Das einem solchen Unterschema gemäß Lemma 1.6.a entsprechende Ideal von R bezeichnen wir mit $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$, und wir setzen $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid (I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_i \neq (0)\}$. Der homogene Koordinatenring von \mathbb{Y} ist $R_{\mathbb{Y}} = R/I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$. Nach Lemma 1.2.a ist die Restklasse von x_0 in $R_{\mathbb{Y}}$ ein Nichtnullteiler, und für den Ring $\overline{R}_{\mathbb{Y}} = R/(I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} + (x_0))$ gilt $\dim_K \overline{R}_{\mathbb{Y}} = \deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$. Hieraus folgt, daß das Bild von $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ in \overline{R} einen 1-dimensionalen K -Vektorraum darstellt und im Sockel von \overline{R} enthalten ist. Zusammenfassend können wir daher die Hilbert-Funktion von \mathbb{Y} wie folgt beschreiben.

1.7. Lemma Sei $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ ein Unterschema mit $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$.

a) Die Hilbert-Funktion von \mathbb{Y} ist gegeben durch

$$H_{\mathbb{Y}}(i) = \begin{cases} H_{\mathbb{X}}(i) & \text{für } i < \alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}, \\ H_{\mathbb{X}}(i) - 1 & \text{für } i \geq \alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}. \end{cases}$$

b) Es gilt $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \leq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$.

Ein homogenes Element $f_{\mathbb{Y}}^* \neq 0$ von $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ vom Grad $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ nennen wir einen *minimalen Separator* von \mathbb{Y} . Für jedes $i \geq 0$ ist dann das Element $x_0^i \cdot f_{\mathbb{Y}}^*$ eine K -Basis von $(I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}+i}$. Nach Lemma 1.7.b gibt es stets ein von Null verschiedenes Element in $(I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$. Ein solches Element $f_{\mathbb{Y}}$ nennen wir einen *Separator* von \mathbb{Y} . Das folgende Beispiel zeigt, daß es nicht immer ein Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ geben muß, für das $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ ist (vgl. [K1], 1.11). Insbesondere entsprechen den Sockelelementen $\neq 0$ von \overline{R} nicht unbedingt Unterschemata von \mathbb{X} .

1.8. Beispiel. Das 0-dimensionale Schema $\mathbb{X} = \mathcal{Z}(X_1^2, X_1 X_2, X_2^3 - X_0^2 X_1) \subseteq \mathbb{P}^2$ hat Grad vier, Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 4 \ \dots$ und ein einziges Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad drei mit $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} = 1 < 2 = \sigma_{\mathbb{X}} + 1$.

Wenden wir den obigen Isomorphismus $\iota : R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \rightarrow \prod_{i=1}^s \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}$ auf einen Separator $f_{\mathbb{Y}}$ eines Unterschemas $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ an, so erhalten wir $\iota(f_{\mathbb{Y}}) = (0, \dots, 0, s_i, 0, \dots, 0)$ mit $1 \leq i \leq s$ und einem Element s_i des Sockels $\mathfrak{S}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}) = \{r \in \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i} \mid \mathfrak{m}_{\mathbb{X}, P_i} \cdot r = 0\}$ von $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}$. Umgekehrt definiert jedes Element $(0, \dots, 0, s_i, 0, \dots, 0) \in \prod_{i=1}^s \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i} \cong S$ mit $1 \leq i \leq s$ und $s_i \in \mathfrak{S}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i})$ offensichtlich ein Unterschema \mathbb{Y} von \mathbb{X} vom Grad $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$, das $\iota^{-1}((0, \dots, 0, s_i, 0, \dots, 0))$ zum Separator hat. Diese lokale Beschreibung der Separatoren erlaubt es uns, die Multiplikation in R in den homogenen Komponenten vom Grad $\geq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ noch weiter zu detaillieren.

1.9. Lemma. a) Ist $f_{\mathbb{Y}} \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ ein Separator eines Unterschemas $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$, und ist $r \in R_i$ mit $i \geq 0$ ein homogenes Element, so gilt $r \cdot f_{\mathbb{Y}} = \varrho \cdot x_0^i \cdot f_{\mathbb{Y}}$ mit einem Element $\varrho \in K$.

b) Sind \mathbb{Y} und \mathbb{Y}' zwei Unterschemata von \mathbb{X} vom Grad $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{Y}' = \deg \mathbb{X} - 1$ mit Separatoren $f_{\mathbb{Y}}, f_{\mathbb{Y}'} \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$, so gilt

$$f_{\mathbb{Y}} \cdot f_{\mathbb{Y}'} \in \begin{cases} K \cdot x_0^{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \cdot f_{\mathbb{Y}} & \text{falls } \dim_K \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P} = 1 \text{ und } \mathbb{Y} = \mathbb{Y}' = \mathbb{X} \setminus \{P\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Dies ergibt sich sofort durch Anwendung des obigen Isomorphismus ι . □

Im letzten Teil dieses Abschnitts wollen wir einige zusätzliche Eigenschaften des homogenen Koordinatenrings eines *reduzierten* 0-dimensionalen Schemas aufführen. Sei also $\text{Supp}(\mathbb{X}) = \{P_1, \dots, P_s\}$ mit $s = \deg \mathbb{X}$, und für $i = 1, \dots, s$ sei $P_i = (1 : p_{i1} : \dots : p_{id})$ mit $p_{ij} \in K$. Für jedes homogene Element $r \in R_i$ mit $i \geq 0$ und für jeden Punkt $P_j \in \text{Supp}(\mathbb{X})$ mit $1 \leq j \leq s$ setzen wir $r(P_j) = r(1, p_{j1}, \dots, p_{jd})$. Auf diese Weise entspricht jedes Unterschema $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \setminus \{P_i\}$ mit $1 \leq i \leq s$ einem eindeutigen *normierten Separator* $f_i \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ mit $f_i(P_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq j \leq s$. Das nächste Lemma zeigt, daß ein Fall wie Beispiel 1.8 in der reduzierten Situation unmöglich ist, und daß man Lemma 1.9 hier noch weiter präzisieren kann.

1.10. Lemma. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema vom Grad s .*

a) *Es gibt mindestens $\Delta_{\mathbb{X}} + 1$ verschiedene Unterschemata $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ der Form $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \setminus \{P_i\}$ mit $1 \leq i \leq s$, so daß $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ gilt.*

b) *Für jede Zahl $j \in \{1, \dots, s\}$ gibt es ein Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = j$ und mit $H_{\mathbb{Y}}(i) = \min\{H_{\mathbb{X}}(i), \deg \mathbb{Y}\}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.*

c) *Für jedes $i \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ bilden die Elemente $\{x_0^{i-\sigma_{\mathbb{X}}-1} \cdot f_1, \dots, x_0^{i-\sigma_{\mathbb{X}}-1} \cdot f_s\}$ eine K -Basis von R_i .*

d) *Für jedes Element $r \in R_i$ mit $i \geq 0$ und für $1 \leq j \leq s$ gilt $r \cdot f_j = r(P_j) \cdot x_0^i \cdot f_j$. Insbesondere ist $f_i f_j = \delta_{ij} \cdot x_0^{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \cdot f_i$ für $i, j \in \{1, \dots, s\}$.*

Beweis: Dies ist in [K1], 1.14 und 3.2 bewiesen. □

Schließlich können wir im reduzierten Fall auch eine explizite Basis von $R_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ angeben. Dazu bezeichnen wir für $i = 1, \dots, s$ das Bild von f_i in $\overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ mit Lf_i und nennen es die *Leitform* von f_i . Wegen Lemma 1.10.c bilden die Leitformen $\{Lf_1, \dots, Lf_s\}$ ein Erzeugendensystem des $\Delta_{\mathbb{X}}$ -dimensionalen K -Vektorraums $\overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$. O.E. numerieren wir die Punkte von \mathbb{X} so um, daß $\{Lf_1, \dots, Lf_{\Delta_{\mathbb{X}}}\}$ eine K -Basis von $\overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ darstellt. Dann schreiben wir

$$Lf_{\Delta_{\mathbb{X}}+j} = \beta_{j1}Lf_1 + \dots + \beta_{j\Delta_{\mathbb{X}}}Lf_{\Delta_{\mathbb{X}}}$$

mit $\beta_{j1}, \dots, \beta_{j\Delta_{\mathbb{X}}} \in K$ für $j = 1, \dots, s - \Delta_{\mathbb{X}}$, und wir bilden die Matrix $\mathfrak{B} = (\beta_{ji})^{\text{transp.}}$.

1.11. Lemma. a) *Für $i = 1, \dots, \Delta_{\mathbb{X}}$ gilt $\beta_{1i} + \dots + \beta_{s-\Delta_{\mathbb{X}}i} = -1$.*

b) *Es gibt eindeutig bestimmte Elemente $g_1, \dots, g_{s-\Delta_{\mathbb{X}}} \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}}$, so daß für $j = 1, \dots, s - \Delta_{\mathbb{X}}$ gilt $x_0 \cdot g_j = f_{\Delta_{\mathbb{X}}+j} - \beta_{j1}f_1 - \dots - \beta_{j\Delta_{\mathbb{X}}}f_{\Delta_{\mathbb{X}}}$. Diese Elemente $\{g_1, \dots, g_{s-\Delta_{\mathbb{X}}}\}$ bilden eine K -Basis von $R_{\sigma_{\mathbb{X}}}$.*

Beweis: Behauptung a) ergibt sich aus der Gleichung $f_1 + \dots + f_s = x_0^{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ durch Übergang zu \overline{R} . Die zweite Behauptung folgt aus der Tatsache, daß die Elemente $f_{\Delta_{\mathbb{X}}+j} - \beta_{j1}f_1 - \dots - \beta_{j\Delta_{\mathbb{X}}}f_{\Delta_{\mathbb{X}}}$ mit $1 \leq j \leq s - \Delta_{\mathbb{X}}$ in $x_0 R_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ liegen und K -linear unabhängig sind. □

Die Matrix \mathfrak{B} hängt in ersichtlicher Weise von der Numerierung von $\{P_1, \dots, P_s\}$ ab. Ihre Abhängigkeit von der Wahl des linearen Nichtnullteilers $x_0 \in R_1$ wird durch die folgende Transformationsregel geklärt.

1.12. Lemma. Sei $\ell \in R_1$ ein Nichtnullteiler, und seien die Konstanten β_{ji}^ℓ wie oben konstruiert, aber unter Verwendung von ℓ statt x_0 . Dann gilt

$$\beta_{ji}^\ell = \frac{\ell(P_{\Delta_{\mathbb{X}+j})}^{\sigma_{\mathbb{X}}}}{\ell(P_i)^{\sigma_{\mathbb{X}}}} \cdot \beta_{ji}$$

für $i = 1, \dots, \Delta_{\mathbb{X}}$ und $j = 1, \dots, s - \Delta_{\mathbb{X}}$.

Beweis: Seien $f_1^\ell, \dots, f_s^\ell \in R_{\sigma_{\mathbb{X}+1}}$ die Separatoren, die bzgl. ℓ normiert sind. Dann liefert $f_1^\ell + \dots + f_s^\ell = \ell^{\sigma_{\mathbb{X}+1}}$ die Beziehungen $f_i^\ell = \ell(P_i)^{\sigma_{\mathbb{X}+1}} \cdot f_i$ für $i = 1, \dots, s$. Nun braucht man nur noch zu beachten, daß

$$\begin{aligned} f_{\Delta_{\mathbb{X}+j}}^\ell - \frac{\ell(P_{\Delta_{\mathbb{X}+j})}^{\sigma_{\mathbb{X}}}}{\ell(P_i)^{\sigma_{\mathbb{X}}}} \cdot \beta_{j1} f_1^\ell - \dots - \frac{\ell(P_{\Delta_{\mathbb{X}+j})}^{\sigma_{\mathbb{X}}}}{\ell(P_i)^{\sigma_{\mathbb{X}}}} \cdot \beta_{j\Delta_{\mathbb{X}}} f_{\Delta_{\mathbb{X}}}^\ell \\ = \ell(P_{\Delta_{\mathbb{X}+j})}^{\sigma_{\mathbb{X}+1}} f_{\Delta_{\mathbb{X}+j}} - \ell(P_{\Delta_{\mathbb{X}+j})}^{\sigma_{\mathbb{X}}} \ell(P_1) \beta_{j1} f_1 - \dots - \ell(P_{\Delta_{\mathbb{X}+j})}^{\sigma_{\mathbb{X}}} \ell(P_{\Delta_{\mathbb{X}}}) \beta_{j\Delta_{\mathbb{X}}} f_{\Delta_{\mathbb{X}}} \\ = \ell(P_{\Delta_{\mathbb{X}+j})}^{\sigma_{\mathbb{X}}} \ell g_j \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, s - \Delta_{\mathbb{X}}$ ein Element von $\ell R_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ darstellt. □

2. Der kanonische Modul

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir den homogenen Koordinatenring $R = K[X_0, \dots, X_d]/I_{\mathbb{X}}$ eines 0-dimensionalen Schemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ studiert. Sucht man weitere, der Einbettung $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ zugeordnete, algebraische Objekte, so bietet sich die Kategorie der endlich erzeugten graduierten R -Moduln an. Sind M und N zwei solche Moduln, so besteht die Menge der Morphismen $\varphi : M \rightarrow N$ in dieser Kategorie aus den homogenen R -linearen Abbildungen φ vom Grad Null. Mit $\underline{\text{Hom}}_R(M, N)$ bezeichnen wir den graduierten R -Modul, dessen homogene Komponente vom Grad $i \in \mathbb{Z}$ gerade die Menge der homogenen R -linearen Abbildungen $\varphi : M \rightarrow N(i)$ ist. Hierbei sei $N(i)$ der um i gradverschobene Modul N , d.h. es gelte $N(i)_j = N_{i+j}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Der Funktor $H_{\mathfrak{m}}^0(M) = \{x \in M \mid \mathfrak{m}^i \cdot x = 0 \text{ für ein } i \geq 0\}$ ist ein links-exakter kovarianter Funktor von der Kategorie der endlich erzeugten graduierten R -Moduln in sich. Für alle $i \geq 0$ besitzt er rechts-abgeleitete Funktoren $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$. Die Moduln $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ sind graduierte R -Moduln, die mit den üblichen lokalen Kohomologiemoduln übereinstimmen, wenn man ihre Graduierung vergißt.

2.1. Definition. Der graduierte R -Modul $\omega_R = \underline{\text{Hom}}_K(H_{\mathfrak{m}}^1(R), K)$ heißt der *kanonische Modul* von R . Hierbei versehen wir K mit der trivialen Graduierung und setzen $r \cdot \varphi(x) = \varphi(r \cdot x)$ für alle $r \in R$, $x \in H_{\mathfrak{m}}^1(R)$ und $\varphi : H_{\mathfrak{m}}^1(R) \rightarrow K$.

Die Bedeutung des R -Moduls ω_R ergibt sich aus der Dualitätstheorie. Genauer wird z.B. in [GW], 2.1.6 der folgende Satz bewiesen.

2.2. Satz. (*Graduierter Dualitätssatz*)

Sei M ein endlich erzeugter graduierter R -Modul. Dann gibt es einen kanonischen, in M funktoriellen Isomorphismus graduierter R -Moduln

$$\underline{\text{Hom}}_R(M, \omega_R) \cong \underline{\text{Hom}}_K(H_{\mathfrak{m}}^1(M), K).$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir vielfältige Beziehungen zwischen der R -Modulstruktur von ω_R und geometrischen Eigenschaften des Schemas \mathbb{X} aufzeigen. Zunächst wollen wir jedoch eine einfachere Darstellung des kanonischen Moduls finden und seine Elemente möglichst explizit beschreiben. Da das Element $x_0 \in R_1$ ein Nichtnullteiler ist, bildet die Inklusion $K[x_0] \subseteq R$ eine Noethersche Normalisierung der K -Algebra R . Als Cohen-Macaulay Ring ist R somit ein endlich erzeugter freier $K[x_0]$ -Modul vom Rang $\deg \mathbb{X}$. Jetzt liefert [GW], 2.2.9 die gesuchte Beschreibung von ω_R .

2.3. Satz. *a) Es gibt einen kanonischen Isomorphismus graduierter R -Moduln*

$$\omega_R \cong \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])(-1).$$

Hierbei ist die R -Modulstruktur von $\underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])$ definiert durch $r \cdot \varphi(s) = \varphi(r \cdot s)$ für $r, s \in R$ und $\varphi : R \rightarrow K[x_0]$.

b) Der graduierte R -Modul ω_R ist endlich erzeugt.

c) Das Element $x_0 \in R_1$ ist ein Nichtnullteiler für ω_R , d.h. aus $x_0\varphi = 0$ für ein $\varphi \in \omega_R$ folgt $\varphi = 0$.

Beweis: Behauptung a) folgt aus [GW], 2.2.8 und 2.2.9. Die Behauptungen b) sowie c) ergeben sich sofort aus ihr. \square

Die Hilbert-Funktion $H_{\omega_R}(i) = \dim_K(\omega_R)_i$ des kanonischen Moduls kann man für jedes $i \in \mathbb{Z}$ entweder direkt aus Satz 2.3.a ermitteln (vgl. [K1], 3.1) oder aus der Dimensionsbilanz von Grothendiecks Lokal-Global-Sequenz

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^1(R) \longrightarrow 0$$

(vgl. [GW], 5.1.6) folgern. In jedem Falle ergibt sich

$$H_{\omega_R}(i) = \deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(-i)$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist also $-\sigma_{\mathbb{X}} = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid (\omega_R)_i \neq (0)\}$ der kleinste Grad eines von Null verschiedenen homogenen Elements von ω_R , und es gilt

$$H_{\omega_R}(-\sigma_{\mathbb{X}}) = \Delta_{\mathbb{X}} < \dots < H_{\omega_R}(0) = \deg \mathbb{X} - 1 < H_{\omega_R}(1) = \deg \mathbb{X} = H_{\omega_R}(2) = \dots$$

Von nun an werden wir mit Hilfe von Satz 2.3.a die Elemente von ω_R stets als $K[x_0]$ -lineare Abbildungen $R \rightarrow K[x_0]$ betrachten. Der kanonische Modul des Koordinatenrings eines Unterschemas $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ erweist sich als ein Untermodul von ω_R .

2.4. Satz. *Sei $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ ein Unterschema mit homogenem Koordinatenring $R_{\mathbb{Y}} = R/I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$.*

- a) *Dann gilt $\omega_{R_{\mathbb{Y}}} \cong \{\varphi \in \omega_R \mid I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \cdot \varphi = 0\}$.*
- b) *Ferner gilt $\sigma_{\mathbb{Y}} \leq \sigma_{\mathbb{X}}$.*

Beweis: Behauptung a) ist ein Spezialfall von [GW], 2.2.9 und impliziert b). \square

Nachfolgend führen wir einige Lemmata aus [K2] auf, die es uns erleichtern werden, mit den Elementen $\varphi : R \rightarrow K[x_0]$ von ω_R umzugehen.

2.5. Lemma. *Für ein Element $\varphi \in \omega_R$ gilt $\varphi = 0$ genau dann, wenn die Einschränkung $\varphi|_{R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}} : R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \rightarrow K[x_0]$ die Nullabbildung ist.*

Beweis: Die nichttriviale Implikation folgt daraus, daß sich jedes homogene Element von R wie in Lemma 1.5 nur durch eine Potenz von x_0 von einem Element von $R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ unterscheidet (vgl. [K2], 1.4). \square

2.6. Lemma. *Die Elemente φ von $(\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}}$ entsprechen durch Einschränkung eindeutig den K -linearen Abbildungen $\bar{\varphi} : R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \rightarrow K$ mit $\bar{\varphi}(x_0 R_{\sigma_{\mathbb{X}}}) = 0$.*

Beweis: Ist eine K -lineare Abbildung $\bar{\varphi} : R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \rightarrow K$ mit $\bar{\varphi}(x_0 R_{\sigma_{\mathbb{X}}}) = 0$ gegeben, so definiert man eine Abbildung $\varphi : R \rightarrow K[x_0]$ durch $\varphi(r) = 0$ für $r \in R_i$ mit $i \leq \sigma_{\mathbb{X}}$ und durch $\varphi(r) = x_0^{i-\sigma_{\mathbb{X}}-1} \cdot \bar{\varphi}(\tilde{r})$ für $r = x_0^{i-\sigma_{\mathbb{X}}-1} \tilde{r} \in R_i$ mit $i \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$. Durch Nachrechnen stellt man fest, daß die so definierte Abbildung φ sogar $K[x_0]$ -linear ist, und daß man auf diese Weise die gewünschte Bijektion erhält (vgl. [K2], 1.5). \square

2.7. Lemma. a) Für ein Element $\varphi \in \omega_R$ und einen Separator $f_Y \in R_{\sigma_X+1}$ eines Unterschemas $Y \subseteq X$ vom Grad $\deg Y = \deg X - 1$ gilt genau dann $f_Y \cdot \varphi = 0$, wenn $\varphi(f_Y) = 0$ ist.

b) Für ein homogenes Element $\varphi \in \omega_R$ gilt genau dann $\text{Ann}_R(\varphi) = (0)$, wenn für jeden Separator $f_Y \in R_{\sigma_X+1}$ eines Unterschemas $Y \subseteq X$ vom Grad $\deg Y = \deg X - 1$ die Bedingung $\varphi(f_Y) \neq 0$ erfüllt ist.

Beweis: Um Behauptung a) einzusehen, nehmen wir an, daß $\varphi(f_Y) = 0$ ist und geben uns ein Element $r \in R_i$ mit $i \geq 0$ vor. Dann gibt es nach Lemma 1.9.a ein $\varrho \in K^*$ mit $(f_Y\varphi)(r) = \varphi(rf_Y) = \varphi(\varrho x_0^i f_Y) = \varrho x_0^i \varphi(f_Y) = 0$. Die umgekehrte Implikation ist wegen $\varphi(f_Y) = (f_Y\varphi)(1)$ klar.

Damit ist auch bereits die eine Richtung von b) gezeigt. Gilt $r\varphi = 0$ für ein homogenes Element $\varphi \in \omega_R$ und ein $r \in R_i \setminus \{0\}$ mit $i \geq 0$, so gibt es ein Vielfaches von r von der Form $x_0^j f_Y$ mit $j \geq 0$ und einem Separator $f_Y \in R_{\sigma_X+1}$ eines Unterschemas $Y \subseteq X$ vom Grad $\deg Y = \deg X - 1$ (vgl. [K2], 2.2.a). Alsdann zeigt Satz 2.3.a, daß aus $x_0^j f_Y \varphi = 0$ auch $f_Y \varphi = 0$ folgt, was wegen a) einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. \square

Schließlich wollen wir den Führer eines 0-dimensionalen Schemas definieren und seine Beziehung zum kanonischen Modul aufzeigen. Im reduzierten Fall spezialisieren sich die nachfolgenden Ausführungen auf [K1], 3.13 und 3.15. Der \mathbb{Z} -graduierte Ring

$$\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(i)) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{j=1}^s \mathcal{O}_{X, P_j} \right) \cong \prod_{j=1}^s \mathcal{O}_{X, P_j} [T_j, T_j^{-1}] \cong R_{x_0}$$

mit unabhängigen Variablen T_1, \dots, T_s enthält den Koordinatenring von X als Unterring, und zwar vermöge der Injektion $\tilde{\iota} : R \longrightarrow \prod_{j=1}^s \mathcal{O}_{X, P_j} [T_j, T_j^{-1}]$, die für $r \in R_i$ mit $i \geq 0$ gegeben ist durch $\tilde{\iota}(r) = (r_{P_1} T_1^i, \dots, r_{P_s} T_s^i)$.

Der Ring $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ enthält auch den Ring $\tilde{R} = \prod_{j=1}^s \mathcal{O}_{X, P_j} [T_j]$ als \mathbb{N} -graduierten Unterring, und \tilde{R} enthält das Bild von $\tilde{\iota}$. Im Falle eines reduzierten 0-dimensionalen Schemas X ist \tilde{R} gerade der ganze Abschluß von R in seinem vollen Quotientenring (vgl. [O], S. 87).

2.8. Definition. Das Ideal $\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R} = \{r \in \tilde{R} \mid r \cdot \tilde{R} \subseteq R\}$ von \tilde{R} heißt der *Führer* von R in \tilde{R} .

Im reduzierten Fall ist $\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R}$ offenbar gerade der übliche Führer von R in seinem ganzen Abschluß. Für jedes $r \in \mathfrak{F}_{\tilde{R}/R}$ gilt $r \cdot 1 \in R$, so daß der Führer sowohl ein Ideal von \tilde{R} als auch eines von R bildet. Der nächste Satz beschreibt beide Ideale explizit. Für jedes $i \in \{1, \dots, s\}$ und jedes Element $r \in \mathcal{O}_{X, P_i} \setminus \{0\}$ sei dabei $\mu(r) = \min\{j \geq 0 \mid (0, \dots, 0, rT_i^j, 0, \dots, 0) \in \tilde{\iota}(R)\}$ sowie $\nu(r) = \max\{\mu(rr') \mid r' \in \mathcal{O}_{X, P_i}, rr' \neq 0\}$.

2.9. Satz. a) In \tilde{R} gilt $\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R} = (rT_1^{\nu(r)})_{r \in \mathcal{O}_{X, P_1} \setminus \{0\}} \cdot \mathcal{O}_{X, P_1} [T_1] \times \dots \times (rT_s^{\nu(r)})_{r \in \mathcal{O}_{X, P_s} \setminus \{0\}} \cdot \mathcal{O}_{X, P_s} [T_s]$.

b) In R gilt $\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R} = (\{f_r \mid 1 \leq i \leq s, r \in \mathcal{O}_{X, P_i} \setminus \{0\}\})$, wobei f_r das Urbild von $(0, \dots, 0, rT_i^{\nu(r)}, 0, \dots, 0)$ unter $\tilde{\iota}$ sei.

Beweis: Auf Grund der obigen Beschreibung der Abbildung \tilde{i} sind beide Behauptungen äquivalent. Für jedes Element $(0, \dots, 0, rT_i^{\nu(r)}, 0, \dots, 0) \in \tilde{R}$ mit $1 \leq i \leq s$ und $r \in \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i} \setminus \{0\}$ sowie für $1 \leq j \leq s$ und $r' \in \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_j} \setminus \{0\}$ gilt

$$(0, \dots, 0, r'T_j^0, 0, \dots, 0) \cdot (0, \dots, 0, rT_i^{\nu(r)}, 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, \delta_{ij} r r' T_i^{\nu(r)}, 0, \dots, 0)$$

und $\nu(r) \geq \mu(rr')$. Also ist dieses Produkt das $\tilde{i}(x_0)^{\nu(r)-\mu(rr')}$ -fache eines Elements von $\tilde{i}(R)$. Da \tilde{R} als $K[x_0]$ -Modul von den Elementen der Form $(0, \dots, 0, r'T_j^0, 0, \dots, 0)$ erzeugt wird, folgt die Inklusion “ \supseteq ”.

Sei umgekehrt ein Element $r \in (\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R})_i$ mit $i \geq 0$ vorgegeben. Wir schreiben $\tilde{i}(r) = (r_1 T_1^i, \dots, r_s T_s^i)$ mit $r_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_j}$ für $1 \leq j \leq s$. Nach Voraussetzung ist für $1 \leq j \leq s$ und $r' \in \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_j}$ auch das Element $(0, \dots, 0, r'T_j^0, 0, \dots, 0) \cdot \tilde{i}(r) = (0, \dots, 0, r'r_j T_j^i, 0, \dots, 0)$ im Bild von \tilde{i} . Ist dabei $r'r_j \neq 0$, so folgt nach der Definition von $\mu(r'r_j)$ dann $i \geq \mu(r'r_j)$. Da $r' \in \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_j}$ beliebig war, erhalten wir $i \geq \nu(r_j)$ und $(0, \dots, 0, r_j T_j^i, 0, \dots, 0)$ erweist sich als das $\tilde{i}(x_0)^{i-\nu(r)}$ -fache des Elements $(0, \dots, 0, r_j T_j^{\nu(r_j)}, 0, \dots, 0)$. Nun liefert $\tilde{i}(r) = \sum_{j=1}^s (0, \dots, 0, r_j T_j^i, 0, \dots, 0)$ die Behauptung. \square

Im reduzierten Fall vereinfacht sich diese Beschreibung erheblich (vgl. [O], 2.5 und [K1], 3.13).

2.10. Korollar. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema.

- a) In \tilde{R} gilt $\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R} = T_1^{d_1} \cdot K[T_1] \times \dots \times T_s^{d_s} \cdot K[T_s]$ mit $d_i = \alpha_{\mathbb{X} \setminus \{P_i\}/\mathbb{X}}$ für $1 \leq i \leq s$.
- b) In R gilt $\mathfrak{F}_{R/R} = (f_1^*, \dots, f_s^*)$, wobei f_i^* für $1 \leq i \leq s$ einen minimalen Separator von $\mathbb{X} \setminus \{P_i\}$ bezeichnet.

Der Ring \tilde{R} ist ebenfalls ein 1-dimensionaler graduerter Cohen-Macaulay Ring, und $\tilde{i}(x_0) = (T_1, \dots, T_s) \in \tilde{R}_1$ ist ein Nichtnullteiler von \tilde{R} . Im folgenden identifizieren wir x_0 mit seinem Bild unter \tilde{i} . Eine analoge Anwendung von [GW], 2.2.9 wie in Satz 2.3.a zeigt, daß der kanonische Modul $\omega_{\tilde{R}}$ von \tilde{R} gegeben ist durch $\omega_{\tilde{R}} \cong \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(\tilde{R}, K[x_0])(-1)$. Ebenso erhalten wir z.B. aus Grothendiecks Lokal-Global-Sequenz die Hilbert-Funktion

$$H_{\omega_{\tilde{R}}}(i) = \deg \mathbb{X} - H_{\tilde{R}}(i) = \begin{cases} \deg \mathbb{X} & \text{für } i \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unser letzter Satz in diesem Abschnitt heißt auch *Dedekinds Formel für den Führer und den Komplementärmodul*.

- 2.11. Satz** a) Für jedes 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ gilt $\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R} \cdot \omega_R \subseteq \omega_{\tilde{R}}$.
- b) Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, so gilt $\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R} \cdot \omega_R = \omega_{\tilde{R}}$.

Beweis: Behauptung a) folgt aus der Beobachtung, daß für $r \in \mathfrak{F}_{\tilde{R}/R}$ und $\varphi \in \omega_R$ gilt $(r\varphi)(\tilde{R}) = \varphi(r\tilde{R}) \subseteq \varphi(R) \subseteq K[x_0]$, d.h. es gilt $r\varphi \in \omega_{\tilde{R}}$. Für einen Beweis von b) mit Hilfe des bisher Gezeigten verweisen wir auf [K1], 3.15. Eine andere Möglichkeit ist, Behauptung b) aus [KW], 4.32 und 4.35.b abzuleiten. \square

3. Das kanonische Ideal

Wenn ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ lokal die Gorenstein-Eigenschaft hat, d.h. wenn für $i = 1, \dots, s$ die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}$ Gorenstein-Ringe sind, so gibt es bekanntlich ein Ideal des homogenen Koordinatenrings, das zum kanonischen Modul isomorph ist (vgl. [E], ex. 21.18). In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf den Fall eines reduzierten 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$. Wir wollen in diesem Fall ein solches *kanonisches Ideal* möglichst explizit konstruieren. Dabei folgen wir der in [HK], 2. Vortrag, für den 1-dimensionalen lokalen Fall beschriebenen Vorgehensweise, jedoch mit zwei Unterschieden: zum einen liegt hier eine graduierte Situation vor und wir wollen diesen Vorteil zu keinem Zeitpunkt verlieren, und zum anderen wollen wir alle Abbildungen und Moduln vollkommen explizit beschreiben, um später in der Lage zu sein, mit den Elementen des kanonischen Ideals konkret zu rechnen.

Der ganze Abschluß \tilde{R} von R in seinem vollen Quotientenring ist bekanntlich von der Form

$$\tilde{R} \cong R/\mathfrak{p}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{p}_s \cong K[T_1] \times \cdots \times K[T_s]$$

(vgl. [O] und [K1]). Hierbei können wir T_i für $1 \leq i \leq s$ als das Bild von x_0 in R/\mathfrak{p}_i wählen. Die kanonische Injektion $\tilde{\iota} : R \hookrightarrow \tilde{R}$ ist gegeben durch $\tilde{\iota}(r) = (r(P_1)T_1^i, \dots, r(P_s)T_s^i)$ für $r \in R_i$ mit $i \geq 0$ (vgl. 2. Abschnitt). Insbesondere gilt $\tilde{\iota}(x_0) = (T_1, \dots, T_s)$ und $\tilde{\iota}(f_i) = (0, \dots, 0, T_i^{\sigma_{\mathbb{X}}+1}, 0, \dots, 0)$ für $1 \leq i \leq s$, wobei $f_1, \dots, f_s \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ hier und im folgenden die bzgl. x_0 normierten Separatoren von \mathbb{X} sind (vgl. 1. Abschnitt). Versehen wir \tilde{R} mit der durch $\deg T_1 = \cdots = \deg T_s = 1$ gegebenen Graduierung, so ist $\tilde{\iota}$ eine homogene R -lineare Abbildung vom Grad null.

Der volle Quotientenring $Q(R)$ von R identifiziert sich bei der obigen Beschreibung mit $Q(R) \cong K(T_1) \times \cdots \times K(T_s)$. Dieser Ring ist jedoch nicht mehr graduiert. Daher erweist es sich als günstiger, den *homogenen Quotientenring*

$$Q^h(R) = \left\{ \frac{r}{r'} \mid r, r' \in R, r' \text{ homogener Nichtnullteiler} \right\}$$

von R zu betrachten. Unser nächster Satz beschreibt $Q^h(R)$ explizit.

3.1. Satz. *a) Der obige Isomorphismus $\tilde{\iota}$ setzt sich fort zu einem Isomorphismus*

$$Q^h(R) \cong K[T_1, T_1^{-1}] \times \cdots \times K[T_s, T_s^{-1}].$$

Hierbei wird ein Element $\frac{r}{r'} \in Q^h(R)$ mit $r \in R_i$ und einem Nichtnullteiler $r' \in R_j$ mit $i, j \geq 0$ abgebildet auf das Tupel

$$\left(\frac{r(P_1)}{r'(P_1)} T_1^{i-j}, \dots, \frac{r(P_s)}{r'(P_s)} T_s^{i-j} \right).$$

b) Es gilt $Q^h(R) \cong R_{x_0}$.

Beweis: Sei $\frac{r}{r'} \in Q^h(R)$ ein wie in a) gewähltes Element. Das Bild von r in $Q(R)$ ist $(r(P_1)T_1^i, \dots, r(P_s)T_s^i)$, und das Bild von r' in $Q(R)$ ist $(r'(P_1)T_1^j, \dots, r'(P_s)T_s^j)$. Daher wird $\frac{r}{r'}$ auf das angegebene Tupel abgebildet, und dieses liegt in $K[T_1, T_1^{-1}] \times \dots \times K[T_s, T_s^{-1}]$.

Sei nun umgekehrt ein Element $(g_1, \dots, g_s) \in K[T_1, T_1^{-1}] \times \dots \times K[T_s, T_s^{-1}]$ gegeben. Für $i \gg 0$ gilt $\dim_K(R_i) = s = \dim_K(K[T_1, T_1^{-1}] \times \dots \times K[T_s, T_s^{-1}])_i$. Deshalb ist $(T_1^i g_1, \dots, T_s^i g_s)$ für $i \gg 0$ von der Form $\tilde{r}(r)$ mit einem Element $r \in R$. Das Element (g_1, \dots, g_s) ist folglich das Bild von $\frac{r}{x_0^i}$, was sowohl den Rest von a) als auch Behauptung b) beweist. \square

Im folgenden setzen wir $L_0 = K[x_0, x_0^{-1}]$ und $L = Q^h(R)$. Aus Satz 3.1.b folgt $L = L_0 \otimes_{K[x_0]} R$. Als Cohen-Macaulay Ring ist R ein freier $K[x_0]$ -Modul vom Rang s . Daher ist L ein freier L_0 -Modul vom Rang s . Die Standardbasis von $K[T_1, T_1^{-1}] \times \dots \times K[T_s, T_s^{-1}]$ identifiziert sich unter dem Isomorphismus von Satz 3.1.a mit einer L_0 -Basis $\{e_1, \dots, e_s\}$ von L . Mit $\sigma_{L/L_0} : L \rightarrow L_0$ bezeichnen wir die durch $e_i \mapsto 1$ gegebene *kanonische Spurabbildung*.

3.2. Satz. *Der Homomorphismus $\Sigma : L \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{L_0}(L, L_0)$, der durch $\Sigma(1) = \sigma_{L/L_0}$ gegeben ist, stellt einen Isomorphismus graduerter L -Moduln dar.*

Beweis: Sei $\varphi : L \rightarrow L_0$ eine L_0 -lineare Abbildung. Für $i = 1, \dots, s$ gelte $\varphi(e_i) = g_i(x_0, x_0^{-1}) \in K[x_0, x_0^{-1}]$. Dann sieht man sofort, daß

$$\varphi = (g_1(T_1, T_1^{-1}), \dots, g_s(T_s, T_s^{-1})) \cdot \sigma_{L/L_0}$$

gilt, was die Surjektivität von Σ beweist. Wir zeigen noch, daß Σ injektiv ist. Sind $g_i(T_i, T_i^{-1}) \in K[T_i, T_i^{-1}]$ für $1 \leq i \leq s$ Laurent-Polynome mit $\psi = (g_1(T_1, T_1^{-1}), \dots, g_s(T_s, T_s^{-1})) \cdot \sigma_{L/L_0} = 0$, so gilt $0 = \psi(e_i) = g_i(x_0, x_0^{-1})$ für $i = 1, \dots, s$. Dies liefert $(g_1(T_1, T_1^{-1}), \dots, g_s(T_s, T_s^{-1})) = 0$, also die Behauptung. \square

3.3. Definition. Das Bild des Homomorphismus graduerter R -Moduln

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0]) & \hookrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{L_0}(L, L_0) \xrightarrow{\Sigma^{-1}} L \\ \varphi & \mapsto & \varphi \otimes \text{id}_{L_0} \end{array}$$

ist ein homogenes gebrochenes R -Ideal $\mathfrak{C}_{R/K[x_0]}$ von L , das wir den *Dedekindschen Komplementärmodul* von R bzgl. x_0 nennen.

Aus der in Abschnitt 2 berechneten Hilbert-Funktion von $\underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])$ ergibt sich die Hilbert-Funktion von $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{R/K[x_0]}$. Für jedes $i \in \mathbb{Z}$ gilt

$$H_{\mathfrak{C}}(i) = s - H_{\mathbb{X}}(-i - 1).$$

Um die Notation nicht zu überladen, führen wir ab sofort die folgenden Abkürzungen ein.

3.4. Vereinbarung. Solange klar ist, welches 0-dimensionale Unterschema von \mathbb{P}^d gemeint ist, werden wir in Zukunft den Index \mathbb{X} weglassen, d.h. wir schreiben $\sigma = \sigma_{\mathbb{X}}$, $\Delta = \Delta_{\mathbb{X}}$, $\alpha = \alpha_{\mathbb{X}}$, etc.

Als nächstes wollen wir die Wirkung des Morphismus Φ und damit sein Bild explizit angeben.

3.5. Satz. (Explizite Beschreibung von $\mathfrak{C}_{R/K[x_0]}$ mit Hilfe von Separatoren)

Sei $i \geq 0$, und sei $\varphi \in \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])_{-\sigma-1+i}$. Für $j = 1, \dots, s$ schreiben wir $\varphi(f_j) = c_j x_0^i$ mit $c_j \in K$. Dann ist das Bild von φ unter Φ gegeben durch

$$\Phi(\varphi) = (c_1 T_1^{-\sigma-1+i}, \dots, c_s T_s^{-\sigma-1+i}) \in L.$$

Beweis: Für die Injektion $\tilde{\iota} : R \hookrightarrow L_1$ und für $1 \leq j \leq s$ gilt $\tilde{\iota}(f_j) = (0, \dots, 0, T_j^{\sigma+1}, 0, \dots, 0)$. Deshalb ist die Abbildung $\varphi \otimes \text{id}_{L_0} : L \cong R \otimes_{K[x_0]} L_0 \rightarrow L_0$ gegeben durch

$$(\varphi \otimes \text{id}_{L_0})(x_0^{\sigma+1} e_j) = (\varphi \otimes \text{id}_{L_0})((0, \dots, 0, T_j^{\sigma+1}, 0, \dots, 0)) = \varphi(f_j) = c_j x_0^i$$

für $j = 1, \dots, s$. Also gilt in $\underline{\text{Hom}}_{L_0}(L, L_0)$ die Gleichung $\varphi \otimes \text{id}_{L_0} = x_0^{-\sigma-1+i} \cdot (c_1, \dots, c_s) \cdot \sigma_{L/L_0}$. Jetzt folgt die Behauptung aus der expliziten Beschreibung der Abbildung Σ^{-1} im Beweis von Satz 3.2. \square

3.6. Korollar. Die Menge $x_0^{2\sigma+2} \cdot \mathfrak{C}_{R/K[x_0]} \subseteq L$ ist ein Ideal von R .

Beweis: Offensichtlich ist diese Menge ein R -Untermodul von L . Wir müssen zeigen, daß sie in $\tilde{\iota}(R)$ enthalten ist. Sei $\varphi \in \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])_{-\sigma-1+i}$ mit $i \geq 0$, und sei $\varphi(f_j) = c_j x_0^i$ mit $c_j \in K$ für $j = 1, \dots, s$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_0^{2\sigma+2} \cdot \Phi(\varphi) &= x_0^{2\sigma+2} \cdot (c_1 T_1^{-\sigma-1+i}, \dots, c_s T_s^{-\sigma-1+i}) \\ &= (c_1 T_1^{\sigma+1+i}, \dots, c_s T_s^{\sigma+1+i}), \end{aligned}$$

und dieses Element ist das Bild von $x_0^i (c_1 f_1 + \dots + c_s f_s) \in R$ in L . \square

3.7. Definition. Das Ideal $\mathfrak{J}_{R/K[x_0]} = x_0^{2\sigma+2} \cdot \mathfrak{C}_{R/K[x_0]}$ von R heißt das *kanonische Ideal* von R (oder von \mathbb{X}) bzgl. x_0 . Da $x_0 \in R_1$ fest gewählt bleibt, schreiben wir auch $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{R/K[x_0]}$.

Später werden wir zeigen, daß $2\sigma_{\mathbb{X}} + 2$ im allgemeinen die kleinste Zahl i ist, so daß $x_0^i \cdot \mathfrak{C}_{R/K[x_0]}$ in R enthalten ist. In Spezialfällen können jedoch kleinere Exponenten i hierfür ausreichen. Es ist auch klar, daß das Ideal $\mathfrak{J}_{R/K[x_0]}$ von der Wahl des Nichtnullteilers $x_0 \in R_1$ abhängt. Unser nächster Satz macht diese Abhängigkeit explizit und beherrschbar.

3.8. Satz. Ist $\ell \in R_1$ ein weiterer Nichtnullteiler von R , so gilt

$$\begin{aligned} x_0 \cdot \mathfrak{C}_{R/K[x_0]} &= \ell \cdot \mathfrak{C}_{R/K[\ell]} \\ \text{sowie} \quad \ell^{2\sigma+1} \cdot \mathfrak{J}_{R/K[x_0]} &= x_0^{2\sigma+1} \cdot \mathfrak{J}_{R/K[\ell]} \subseteq R. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, für ein Element $r = x_0^i \cdot (c_1 f_1 + \dots + c_s f_s) \in R_{\sigma+1+i}$ mit $i \geq 0$ und $c_1, \dots, c_s \in K$ gilt $r \in \mathfrak{J}_{R/K[\ell]}$ genau dann, wenn

$$x_0^i \cdot (\ell(P_1)^{-2\sigma-1} c_1 f_1 + \dots + \ell(P_s)^{-2\sigma-1} c_s f_s)$$

ein Element von $\mathfrak{J}_{R/K[x_0]}$ ist.

Beweis: Angesichts Definition 3.7 genügt es, die erste Behauptung zu beweisen. Aus Symmetriegründen brauchen wir wiederum nur die Inklusion $x_0 \cdot \mathfrak{I}_{R/K[x_0]} \subseteq \ell \cdot \mathfrak{I}_{R/K[\ell]}$ zu zeigen. Sei $\varphi : R \rightarrow K[x_0]$ eine homogene $K[x_0]$ -lineare Abbildung vom Grad $-\sigma_{\mathbb{X}} - 1 + i$ mit $i \geq 0$, und sei $\varphi(f_j) = c_j x_0^i$ mit $c_j \in K$ für $1 \leq j \leq s$. Wegen $\varphi(R_{\sigma-i}) \subseteq K[x_0]_{-1} = (0)$ gilt $\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_s c_s = 0$ für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ mit $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_s f_s = x_0^{i+1} g$ für ein $g \in R_{\sigma-i}$. Nach Satz 3.5 erhalten wir $\Phi(x_0 \varphi) = (c_1 T_1^{-\sigma+i}, \dots, c_s T_s^{-\sigma+i})$ in L .

Nun sei U_i das Bild von ℓ in R/\mathfrak{p}_i . Wir betrachten die Darstellung $L = K[U_1, U_1^{-1}] \times \dots \times K[U_s, U_s^{-1}]$ und stellen fest, daß für $1 \leq j \leq s$ die Beziehung $U_j = \ell(P_j)T_j$ gilt. Daher ist das Element $\Phi(x_0 \varphi)$ in dieser Darstellung durch das Tupel

$$(c_1 \ell(P_1)^{\sigma-i} U_1^{-\sigma+i}, \dots, c_s \ell(P_s)^{\sigma-i} U_s^{-\sigma+i}) \quad (*)$$

gegeben. Jetzt definieren wir $\psi : R \rightarrow K[\ell, \ell^{-1}]$ als die homogene $K[\ell]$ -lineare Abbildung vom Grad $-\sigma_{\mathbb{X}} - 1 + i$, für die $\psi(f_j^{(\ell)}) = c_j \ell(P_j)^{\sigma-i} \ell^i$ für $j = 1, \dots, s$ gilt. Hierbei bezeichnen $f_1^{(\ell)}, \dots, f_s^{(\ell)} \in R_{\sigma+1}$ die bzgl. ℓ normierten Separatoren von \mathbb{X} . Eine analoge Anwendung von Satz 3.5 wie eben liefert, daß das Tupel $(*)$ auch das Bild von $\ell \psi$ in L ist.

Infolgedessen genügt es zu zeigen, daß $\ell \psi$ in $K[\ell]$ enthalten ist. Dazu müssen wir $\psi(R_{\sigma-i}) = 0$ beweisen. Sei $g \in R_{\sigma-i}$, und sei $x_0^{i+1} g = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_s f_s$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$. Im Beweis von Lemma 1.12 haben wir gesehen, daß für $1 \leq j \leq s$ gilt $f_j^{(\ell)} = \ell(P_j)^{\sigma+1} f_j$. Also folgt

$$\begin{aligned} \ell^{i+1} g &= \lambda_1 \ell(P_1)^{i+1} f_1 + \dots + \lambda_s \ell(P_s)^{i+1} f_s \\ &= \lambda_1 \ell(P_1)^{-\sigma+i} f_1^{(\ell)} + \dots + \lambda_s \ell(P_s)^{-\sigma+i} f_s^{(\ell)}. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \ell^{i+1} \psi(g) &= \psi(\ell^{i+1} g) = \lambda_1 \ell(P_1)^{-\sigma+i} \psi(f_1^{(\ell)}) + \dots + \lambda_s \ell(P_s)^{-\sigma+i} \psi(f_s^{(\ell)}) \\ &= \ell^i \cdot (\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_s c_s) = 0, \end{aligned}$$

also die Behauptung $\psi(g) = 0$. □

Die Begründung dafür, daß das Ideal $\mathfrak{I}_{R/K[x_0]} \subseteq R$ den Namen “kanonisches Ideal” trägt, wird von dem nun folgenden Satz geliefert.

3.9. Satz. *Es gibt Isomorphismen graduierter R -Moduln*

$$\omega_R \cong \mathfrak{C}_{R/K[x_0]}(-1) \cong \mathfrak{I}_{R/K[x_0]}(2\sigma_{\mathbb{X}} + 1).$$

Hierbei wird ein Element $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma+i} \cong \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])_{-\sigma-1+i}$ mit $i \geq 0$ abgebildet auf das Element $\varphi(f_1)f_1 + \dots + \varphi(f_s)f_s$ von $(\mathfrak{I}_{R/K[x_0]})_{\sigma+1+i}$.

Beweis: Die erste Behauptung folgt daraus, daß Φ ein Monomorphismus graduierter R -Moduln ist, und es gilt $\mathfrak{J}_{R/K[x_0]} = x_0^{2\sigma+2} \cdot \mathfrak{C}_{R/K[x_0]} \cong \mathfrak{C}_{R/K[x_0]}(-2\sigma_{\mathbb{X}} - 2)$. Zum Beweis der zweiten Behauptung sei ein Element $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma+i}$ mit $i \geq 0$ vorgegeben. Wir schreiben $\varphi(f_j) = c_j x_0^i$ mit $c_j \in K$ für $j = 1, \dots, s$. Bei der durch die Multiplikation mit $x_0^{2\sigma+2}$ gegebenen Abbildung $\mathfrak{C}_{R/K[x_0]}(-1) \rightarrow \mathfrak{J}_{R/K[x_0]}(2\sigma_{\mathbb{X}} + 1)$ wird das Element $\Phi(\varphi) = (c_1 T_1^{-\sigma-1+i}, \dots, c_s T_s^{-\sigma-1+i})$ abgebildet auf $x_0^i(c_1 f_1 + \dots + c_s f_s) = \varphi(f_1) f_1 + \dots + \varphi(f_s) f_s$. \square

Da wir die Hilbert-Funktion von $\mathfrak{C}_{R/K[x_0]}$ bereits kennen, wissen wir auch die Hilbert-Funktion von $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{R/K[x_0]}$, nämlich

$$H_{\mathfrak{J}}(i) = s - H_{\mathbb{X}}(2\sigma_{\mathbb{X}} + 1 - i)$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist \mathfrak{J} enthalten in den homogenen Komponenten von R vom Grad $\geq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$, die wir in Lemma 1.10 genau beschrieben haben. Die erste nichttriviale homogene Komponente von \mathfrak{J} ist $\mathfrak{J}_{\sigma+1}$. Das nächste Korollar stellt eine explizite K -Basis dieser Komponente vor. Wir verwenden die Matrix $\mathfrak{B} = (\beta_{ji})^{\text{transp.}}$ aus § 1.

3.10. Korollar. *Die Elemente $\pi_i = f_i + \beta_{1i} f_{\Delta+1} + \dots + \beta_{s-\Delta i} f_s$ mit $1 \leq i \leq \Delta$ bilden eine K -Basis von $\mathfrak{J}_{\sigma+1}$.*

Beweis: Da $\{L f_1, \dots, L f_{\Delta}\}$ eine K -Basis von $\overline{R}_{\sigma+1}$ darstellt, bilden die durch $\pi_i(f_j) = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, \Delta$ definierten Abbildungen $\pi_i \in (\omega_R)_{-\sigma} \cong \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])_{-\sigma-1}$ nach Lemma 2.6 eine K -Basis dieses Vektorraums. Für $i = 1, \dots, \Delta$ und $j = 1, \dots, s - \Delta$ ergibt sich $\pi_i(f_{\Delta+j}) = \pi_i(\beta_{j1} f_1 + \dots + \beta_{j\Delta} f_{\Delta}) = \beta_{ji}$, so daß die Behauptung aus Satz 3.9 folgt. \square

Aus der Hilbert-Funktion von \mathfrak{J} entnehmen wir auch, daß der Grad $2\sigma_{\mathbb{X}} + 1$ der höchste Grad i ist, in dem \mathfrak{J}_i noch nicht den ganzen Raum R_i ausfüllt. Die homogene Komponente $\mathfrak{J}_{2\sigma+1}$ von \mathfrak{J} läßt sich ebenso explizit beschreiben.

3.11. Korollar. *Ein Element $x_0^{\sigma}(c_1 f_1 + \dots + c_s f_s)$ von $R_{2\sigma+1}$ mit $c_1, \dots, c_s \in K$ liegt genau dann in $\mathfrak{J}_{2\sigma+1}$, wenn gilt $c_1 + \dots + c_s = 0$. Insbesondere bilden die Elemente $h_i = x_0^{\sigma}(f_{i+1} - f_i)$ mit $1 \leq i \leq s - 1$ eine K -Basis von $\mathfrak{J}_{2\sigma+1}$.*

Beweis: Ein Element φ von $(\omega_R)_0 \cong \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])_{-1}$ ergibt durch Einschränkung eine K -lineare Abbildung $\varphi|_{R_{\sigma+1}} : R_{\sigma+1} \rightarrow K[x_0]_{\sigma}$ mit $(\varphi|_{R_{\sigma+1}})(x_0^{\sigma+1}) = x_0^{\sigma+1} \cdot \varphi(1) \in x_0^{\sigma+1} \cdot K[x_0]_{-1} = (0)$. Umgekehrt kann man eine K -lineare Abbildung $\bar{\psi} : R_{\sigma+1} \rightarrow K[x_0]_{\sigma}$ genau dann zu einer $K[x_0]$ -linearen homogenen Abbildung $\psi : R \rightarrow K[x_0]$ vom Grad -1 fortsetzen, wenn $\bar{\psi}(x_0^{\sigma+1}) = 0$ ist, denn $\dim_K(\omega_R)_0 = s - 1$ und ψ ist nach Lemma 2.5 eindeutig durch $\bar{\psi} = \psi|_{R_{\sigma+1}}$ bestimmt. Nun gilt $x_0^{\sigma+1} = f_1 + \dots + f_s$, woraus für jede Abbildung $\varphi \in (\omega_R)_0$ die Gleichung $\varphi(f_1) + \dots + \varphi(f_s) = 0$ folgt, so daß sich die Behauptung als Konsequenz von Satz 3.9 ergibt. \square

Im zweiten Kapitel wird die Multiplikationsabbildung $R_{\sigma} \otimes (\omega_R)_{-\sigma} \rightarrow (\omega_R)_0$ bzw. $R_{\sigma} \otimes \mathfrak{J}_{\sigma+1} \rightarrow \mathfrak{J}_{2\sigma+1}$ eine wichtige Rolle spielen. Im reduzierten Fall können wir für diese Multiplikation eine explizite Matrix angeben.

3.12. Korollar. Seien $\{g_1, \dots, g_{s-\Delta}\}$, $\{\pi_1, \dots, \pi_\Delta\}$ und $\{h_1, \dots, h_{s-1}\}$ die in Lemma 1.11.b, Korollar 3.10 und Korollar 3.11 definierten K -Basen. Dann ist die Multiplikationsabbildung $R_\sigma \otimes \mathfrak{J}_{\sigma+1} \longrightarrow \mathfrak{J}_{2\sigma+1}$ gegeben durch

$$g_j \cdot \pi_i = \begin{cases} \beta_{j1} h_{\Delta+j-1} & \text{für } i = 1 \text{ und } j = 1, \dots, s - \Delta, \\ \beta_{ji} h_{\Delta+j-1} - \beta_{ji} h_{i-1} & \text{für } i = 2, \dots, \Delta \text{ und } j = 1, \dots, s - \Delta. \end{cases}$$

Beweis: Für $i = 1, \dots, \Delta$ und $j = 1, \dots, s - \Delta$ gilt

$$\begin{aligned} x_0 g_j \pi_i &= (f_{\Delta+j} - \beta_{j1} f_1 - \dots - \beta_{j\Delta} f_\Delta) \cdot (f_1 + \beta_{\Delta+1i} f_{\Delta+1} + \dots + \beta_{s-\Delta i} f_s) \\ &= x_0^{\sigma+1} \cdot (\beta_{ji} f_{\Delta+j} - \beta_{ji} f_i). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Nun sind wir in der Lage, die weiter oben angekündigten Beispiele nachzuliefern. Das erste Beispiel zeigt, daß $x_0^{2\sigma+2}$ im allgemeinen die niedrigste Potenz von x_0 ist, mit der man $\mathfrak{C}_{R/K[x_0]}$ multiplizieren muß, um ein Ideal von R zu erhalten.

3.13. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \neq 2, 3$, und sei $\mathbb{X} = \{(1:0:0), (1:1:0), (1:2:0)\} \subseteq \mathbb{P}^2$. Dann ist \mathbb{X} ein vollständiger Durchschnitt vom Typ $(1, 3)$, d.h. das homogene Verschwindungsideal $I_{\mathbb{X}} = (X_2, X_1(X_1 - X_0)(X_1 - 2X_0))$ wird von zwei homogenen Formen vom Grad eins und drei erzeugt. Die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} ist $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ \dots$, und es gilt $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$ sowie $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$. Wie man leicht nachrechnet, gilt $f_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(x_1 - 2x_0)$ sowie $f_2 = -x_1(x_1 - 2x_0)$ und $f_3 = \frac{1}{2}x_1(x_1 - x_0)$ (vgl. [K1], 1.15 und [K5]).

Also erhalten wir $Lf_2 = \beta_{11}Lf_1$ mit $\beta_{11} = -2$ und $Lf_3 = \beta_{21}Lf_1$ mit $\beta_{21} = 1$. Nach Korollar 3.10 bildet das Element $\pi_1 = f_1 - 2f_2 + f_3$ eine K -Basis von $\mathfrak{J}_{\sigma+1}$. Da \mathbb{X} ein vollständiger Durchschnitt ist, stellt $\{\pi_1\}$ sogar eine R -Basis von \mathfrak{J} dar. Offenbar gilt $\pi_1 \notin x_0 R_\sigma$, so daß wir in diesem Beispiel $x_0^{2\sigma+1} \mathfrak{C}_{R/K[x_0]} \not\subseteq R$ erhalten.

In speziellen Fällen kann sehr wohl eine niedrigere Potenz von x_0 als $x_0^{2\sigma+2}$ genügen, um aus $\mathfrak{C}_{R/K[x_0]}$ durch Multiplikation ein Ideal von R zu gewinnen.

3.14. Beispiel. Sei $K = \mathbb{C}$, und sei $\mathbb{X} = \{(1:0:0), (1:2:0), (1:1+\sqrt{3}i:0)\} \subseteq \mathbb{P}^2$. Wiederum ist \mathbb{X} ein vollständiger Durchschnitt vom Typ $(1, 3)$ mit Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ \dots$ und $\sigma_{\mathbb{X}} = \Delta_{\mathbb{X}} = 1$. Eine Rechnung wie eben liefert diesmal $f_1 = \frac{1}{2+2\sqrt{3}i}(x_1 - 2x_0)(x_1 - x_0 - \sqrt{3}ix_0)$ sowie $f_2 = \frac{1}{2-2\sqrt{3}i}x_1(x_1 - x_0 - \sqrt{3}ix_0)$ und $f_3 = -\frac{1}{4}x_1(x_1 - 2x_0)$.

Also gilt $Lf_2 = \beta_{11}Lf_1$ mit $\beta_{11} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}i - 1)$ und $Lf_3 = \beta_{21}Lf_1$ mit $\beta_{21} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}i + 1)$. Daher erfüllt die R -Basis $\pi_1 = f_1 + \beta_{11}f_2 + \beta_{21}f_3$ von $\mathfrak{J}_{R/K[x_0]}$ die Bedingung $L\pi_1 = Lf_1 + \beta_{11}Lf_2 + \beta_{21}Lf_3 = 0$, d.h. es gilt $\pi_1 \in x_0 R_\sigma$. Somit hätten wir in diesem Beispiel auch $x_0^{2\sigma+1} \mathfrak{C}_{R/K[x_0]} = x_0^3 \mathfrak{C}_{R/K[x_0]}$ nehmen können, um ein Ideal von R zu erhalten.

Wir zeigen noch, daß $x_0^2 \mathfrak{C}_{R/K[x_0]}$ kein Ideal von R ist. Dieses gebrochene Ideal beginnt im Grad Null. Deshalb genügt es zu zeigen, daß $\pi_1 \notin (x_0^2)$ gilt. Wäre nun $\pi_1 = \lambda x_0^2 = \lambda f_1 + \lambda f_2 + \lambda f_3$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so wäre $\beta_{11} = \beta_{21} = 1$, was aber nicht der Fall ist.

Die übrigen nichttrivialen Komponenten des kanonischen Ideals können wir ebenfalls genau beschreiben, wenn wir auch keine expliziten Basen für sie konstruieren.

3.15. Satz. *Sei $i \in \{0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}\}$. Dann besteht $\mathfrak{J}_{\sigma+1+i}$ aus genau den Elementen $\varphi = x_0^i(c_1 f_1 + \dots + c_s f_s)$ von $R_{\sigma+1+i}$ mit $c_1, \dots, c_s \in K$, für die für jedes Element $r \in R_{\sigma-i}$ gilt $r(P_1)c_1 + \dots + r(P_s)c_s = 0$.*

Beweis: Fassen wir $\varphi \in \mathfrak{J}_{\sigma+1+i} \cong (\omega_R)_{-\sigma+i}$ als homogene $K[x_0]$ -lineare Abbildung $\varphi : R \rightarrow K[x_0]$ vom Grad $-\sigma - 1 + i$ auf, so gilt $\varphi(R_{\sigma-i}) \subseteq K[x_0]_{-1} = (0)$. Für jedes homogene Element $r \in R_{\sigma-i}$ ergibt sich daher $\varphi(x_0^{i+1}r) = x_0^{i+1}\varphi(r) = 0$. Hieraus erhalten wir $r(P_1)\varphi(f_1) + \dots + r(P_s)\varphi(f_s) = \varphi(r(P_1)f_1 + \dots + r(P_s)f_s) = \varphi(x_0^{i+1}r) = 0$. Nach Satz 3.9 bedeutet dies gerade $r(P_1)c_1 + \dots + r(P_s)c_s = 0$.

Umgekehrt hat der Untervektorraum von $R_{\sigma+1+i}$ aller Elemente der Form $x_0^i(c_1 f_1 + \dots + c_s f_s)$ mit $r(P_1)c_1 + \dots + r(P_s)c_s = 0$ für alle $r \in R_{\sigma-i}$ die Dimension $s - \dim_K(R_{\sigma-i}) = s - H_{\mathbb{X}}(\sigma - i)$. Da diese mit der Dimension von $\mathfrak{J}_{\sigma+1+i}$ übereinstimmt, folgt die Behauptung. \square

Als Anwendung dieses Satzes wollen wir eine einfache Beziehung zwischen der homogenen Komponente $\mathfrak{J}_{2\sigma}$ des kanonischen Ideals und der sogenannten zu \mathbb{X} assoziierten Punktmenge herstellen. Eine allgemeinere Version dieser Beziehung wurde in [EP], §1 beschrieben.

3.16. Lemma. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema mit der Eigenschaft, daß jede Teilmenge aus $s - 2$ Punkten von \mathbb{X} den ganzen Raum \mathbb{P}^d aufspannt. Wählt man dann eine K -Basis $\{t_1, \dots, t_{s-d-1}\}$ von $\mathfrak{J}_{2\sigma}$ und schreibt man $t_i = x_0^{\sigma-1}(\gamma_{i1}f_1 + \dots + \gamma_{is}f_s)$ mit $\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{is} \in K$ für $i = 1, \dots, s - d - 1$, so sind in der Matrix $\Gamma = (\gamma_{ij})$ keine zwei Spalten linear abhängig.*

Beweis: Angenommen, es gibt Indizes $1 \leq \nu < \mu \leq s$ und ein Element $\lambda \in K$ mit $\gamma_{i\nu} = \lambda \gamma_{i\mu}$ für $i = 1, \dots, s - d - 1$. Sei $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \setminus \{P_\nu\}$, und sei $\mathfrak{J}_{\mathbb{Y}} \subseteq R_{\mathbb{Y}}$ das kanonische Ideal vom \mathbb{Y} . Da \mathbb{Y} den projektiven Raum \mathbb{P}^d aufspannt, gilt $\dim_K(\mathfrak{J}_{\mathbb{Y}})_{2\sigma_{\mathbb{Y}}} = (s - 1) - d - 1$. Wegen $\sigma_{\mathbb{X}} - 1 \leq \sigma_{\mathbb{Y}} \leq \sigma_{\mathbb{X}}$ unterscheiden wir zwei Fälle.

Im Fall $\sigma_{\mathbb{Y}} = \sigma_{\mathbb{X}}$ besteht $(\mathfrak{J}_{\mathbb{Y}})_{2\sigma_{\mathbb{Y}}}$ nach Satz 2.4.a gerade aus den Elementen der Form $x_0^{\sigma-1}(c_1 f_1 + \dots + c_s f_s)$ von $\mathfrak{J}_{2\sigma_{\mathbb{X}}}$ mit $c_1, \dots, c_s \in K$ und $c_\nu = 0$, denn es gilt $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} = (f_\nu)^{\text{sat}}$. Folglich sind nicht alle Elemente $\gamma_{1\nu}, \dots, \gamma_{s-d-1\nu}$ gleich Null, und wir können o.E. $\gamma_{1\nu} \neq 0$ annehmen. Dann bildet $\{\gamma_{1\nu}t_2 - \gamma_{2\nu}t_1, \dots, \gamma_{1\nu}t_{s-d-1} - \gamma_{s-d-1\nu}t_1\}$ eine K -Basis von $(\mathfrak{J}_{\mathbb{Y}})_{2\sigma_{\mathbb{Y}}}$. Jedes dieser Basiselemente ist von der Form $x_0^{\sigma-1}(c_1 f_1 + \dots + c_s f_s)$ mit $c_1, \dots, c_s \in K$ und $c_\nu = c_\mu = 0$ und liegt infolgedessen auch im kanonischen Ideal von $\mathbb{Y}' = \mathbb{Y} \setminus \{P_\mu\}$. Jedoch widerspricht $\dim_K(\mathfrak{J}_{\mathbb{Y}'})_{2\sigma_{\mathbb{X}}} = (s - 2) - (d - 1) - 1$ der Voraussetzung, daß die Punkte von \mathbb{Y}' den Raum \mathbb{P}^d aufspannen.

Auch im Fall $\sigma_{\mathbb{Y}} = \sigma_{\mathbb{X}} - 1$ sind die Elemente von $(\mathfrak{J}_{\mathbb{Y}})_{2\sigma_{\mathbb{Y}}} \cong (\omega_{R_{\mathbb{Y}}})_{-1}$ gerade diejenigen Elemente von $\mathfrak{J}_{2\sigma_{\mathbb{X}}} \cong (\omega_R)_{-1}$ von der Form $x_0^{\sigma-1}(c_1 f_1 + \dots + c_s f_s)$ mit $c_1, \dots, c_s \in K$ und $c_\nu = 0$, so daß wir dieselbe Argumentation wie im ersten Fall anwenden können. \square

3.17. Definition. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema mit der Eigenschaft, daß je $s - 2$ Punkte von \mathbb{X} den ganzen Raum \mathbb{P}^d aufspannen. Dann heißt die durch die Spalten der in Lemma 3.16 definierten Matrix $\Gamma = (\gamma_{ij})$ gegebene Menge von s Punkten in \mathbb{P}^{s-d-2} die zu \mathbb{X} assoziierte Punktmenge oder die Gale-Transformierte von \mathbb{X} .

Die zu \mathbb{X} assoziierte Punktmenge ist offenbar bis auf eine Koordinatentransformation von \mathbb{P}^{s-d-2} eindeutig bestimmt. Aus Lemma 3.16 folgt, daß diese Definition mit der üblichen übereinstimmt (vgl. [EP], §1, oder [DO], III.1). Unser nächstes Beispiel zeigt, daß die Gale-Transformierte nicht notwendigerweise aus s verschiedenen Punkten besteht, wenn man nur voraussetzt, daß je $s - 1$ Punkte von \mathbb{X} den Raum \mathbb{P}^d aufspannen.

3.18. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \neq 2$ und $\mathbb{X} = \{(1:1:0:0), (1:0:1:0), (1:-1:0:0), (1:0:-1:0), (1:0:0:1), (1:0:0:-1)\} \subseteq \mathbb{P}^3$. Dann gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 4 \ 6 \ 6 \ \cdots$, $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$ und $\Delta_{\mathbb{X}} = 2$. Für die \mathfrak{B} -Matrix von \mathbb{X} erhalten wir $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Also bilden die Elemente $\pi_1 = f_1 + f_3 - f_5 - f_6$ sowie $\pi_2 = f_2 + f_4 - f_5 - f_6$ eine K -Basis von $\mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}_{\sigma+1} = \mathfrak{I}_{2\sigma}$. Offensichtlich hat \mathbb{X} die Eigenschaft, daß je fünf Punkte von \mathbb{X} den Raum \mathbb{P}^3 aufspannen. Die assoziierte Punktmenge besteht jedoch nur aus den drei Punkten $(1:0)$, $(0:1)$ und $(1:1)$ in \mathbb{P}^1 .

Liegt wie im vorangegangenen Beispiel der Fall $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$ vor, so vereinfacht sich die Beschreibung der assoziierten Punktmenge wie folgt.

3.19. Bemerkung. Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema mit der Eigenschaft, daß je $s - 2$ Punkte von \mathbb{X} den Raum \mathbb{P}^d aufspannen, so bilden wir die erweiterte \mathfrak{B} -Matrix

$$\tilde{\mathfrak{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathfrak{B} \\ 0 & & 1 & \end{array} \right)$$

von \mathbb{X} . Dann ist die zu \mathbb{X} assoziierte Punktmenge in $\mathbb{P}^{\Delta-1}$ nach Korollar 3.10 gegeben durch die Spalten der Matrix $\tilde{\mathfrak{B}}$.

Außerdem weisen wir darauf hin, daß man auch die anderen Komponenten des kanonischen Ideals verwenden kann, um eine analoge Konstruktion wie in Lemma 3.16 und Definition 3.17 durchzuführen. Die genauen Bedingungen, unter denen die “höheren kanonischen Transformierten” von \mathbb{X} existieren, werden wir in einem späteren Abschnitt untersuchen. Schließlich bemerken wir noch, daß man in völliger Analogie zu [HK], 6.13 auch hier den folgenden Satz beweisen kann.

3.20. Satz. Der Ring R/\mathfrak{I} ist ein 0-dimensionaler Gorenstein-Ring mit Hilbert-Funktion $H_{R/\mathfrak{I}}(i) = H_{\mathbb{X}}(i) + H_{\mathbb{X}}(2\sigma_{\mathbb{X}} + 1 - i) - s$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

4. Der Kählersche Differentialmodul

Bisher haben wir das Studium der 0-dimensionalen Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ hauptsächlich mit den Mitteln der Algebra betrieben. Nun wollen wir unser Arsenal verfügbarer Strukturen erweitern, indem wir differentielle Methoden in die Betrachtung mit einbeziehen. Wir gehen dabei im wesentlichen wie in [K6] vor, setzen jedoch vorläufig nicht voraus, daß \mathbb{X} reduziert ist. Viele der nachstehenden Resultate basieren auf den Ergebnissen von [KD], welche wir stillschweigend als bekannt voraussetzen.

Hat man einen Homomorphismus standard-graduierter K -Algebren $S \rightarrow T$, und bezeichnet \mathcal{J} den Kern der Multiplikationsabbildung $T \otimes_S T \rightarrow T$, so ist $\Omega_{T/S}^1 = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ ein endlich erzeugter,graduierter T -Modul und heißt der *Kählersche Differentialmodul* oder der *Modul der Kählerschen Differentialformen* von T/S . Die homogene S -lineare Abbildung $d_{T/S} : T \rightarrow \Omega_{T/S}^1$, die durch $t \mapsto t \otimes 1 - 1 \otimes t + \mathcal{J}^2$ gegeben ist, heißt die *universelle Derivation* von T/S .

Den graduierten R -Modul $\Omega_{R/K}^1$ nennen wir auch den Kählerschen Differentialmodul von \mathbb{X} . Außerdem interessieren wir uns für die R -Moduln $\Omega_{R/K[x_0]}^1$ und $\Omega_{\bar{R}/K}^1$, wobei wir wie im ersten Abschnitt $\bar{R} = R/(x_0)$ setzen. Mit einem einleitenden Beispiel wollen wir verdeutlichen, daß der Modul $\Omega_{R/K}^1$ Informationen über die Geometrie von \mathbb{X} enthält, die wir aus den in den ersten drei Abschnitten betrachteten Objekten nicht sehr leicht ersehen können.

4.1. Beispiel. Seien $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}^2$ zwei reduzierte 0-dimensionale Unterschemata vom Grad 19, wobei \mathbb{X} aus 19 generisch gewählten Punkten und \mathbb{Y} aus 13 generisch gewählten Punkten sowie 6 Punkten auf einer Gerade bestehen. Dann haben die Koordinatenringe $R_{\mathbb{X}}$ und $R_{\mathbb{Y}}$ dieselbe Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}} = H_{\mathbb{Y}} : 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 15 \ 19 \ 19 \ \dots$ und sogar dieselbe minimale graduiert-freie A -Auflösung, nämlich

$$0 \rightarrow A(-7)^4 \rightarrow A(-5)^2 \oplus A(-6)^3 \rightarrow A \rightarrow R \rightarrow 0.$$

Hieraus folgt, daß auch die kanonischen Moduln $\omega_{R_{\mathbb{X}}}$ und $\omega_{R_{\mathbb{Y}}}$ dieselbe minimale Präsentation

$$A(2)^2 \oplus A(3)^3 \rightarrow A(4)^4 \rightarrow \omega_R \rightarrow 0$$

besitzen. Die Hilbert-Funktionen $H_{\Omega_{\mathbb{X}}}^1$ von $\Omega_{R_{\mathbb{X}}/K}^1$ und $H_{\Omega_{\mathbb{Y}}}^1$ von $\Omega_{R_{\mathbb{Y}}/K}^1$ sind

$$\begin{aligned} H_{\Omega_{\mathbb{X}}}^1 : & 3 \ 9 \ 18 \ 30 \ 43 \ 48 \ 40 \ 31 \ 21 \ 19 \ 19 \ \dots & \text{sowie} \\ H_{\Omega_{\mathbb{Y}}}^1 : & 3 \ 9 \ 18 \ 30 \ 43 \ 48 \ 40 \ 31 \ 21 \ 20 \ 19 \ \dots \end{aligned}$$

und unterscheiden sich in Grad 10. Die Hilbert-Funktion von $\Omega_{R/K}^1$ enthält also Informationen über die Geometrie von \mathbb{X} , die aus der Hilbert-Funktion von R nicht ersichtlich sind.

Aus [KD] können wir die folgenden Präsentationen von $\Omega_{R/K}^1$ und $\Omega_{R/K[x_0]}^1$ ableiten. Wenn klar ist, welcher Differentialmodul gemeint ist, schreiben wir dabei in Zukunft einfach d für die zugehörige universelle Derivation. Außerdem bezeichnen wir das Bild einer partiellen Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ eines Polynoms $F \in A$ in R mit $\frac{\partial F}{\partial x_i}$.

4.2. Satz. a) Es gibt eine exakte Sequenz graduierter R -Moduln

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(-1) \longrightarrow R(-1)^{d+1} \xrightarrow{\delta} \Omega_{R/K}^1 \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathcal{G} = \langle (\frac{\partial F}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_d}) \rangle_{F \in I_{\mathbb{X}}} \subseteq R^{d+1}$ ist, und es gilt $\delta(e_i) = dx_i$ für $i = 0, \dots, d$.

b) Es gibt eine exakte Sequenz graduierter R -Moduln

$$R(-1) \xrightarrow{\alpha} \Omega_{R/K}^1 \xrightarrow{\beta} \Omega_{R/K[x_0]}^1 \longrightarrow 0,$$

wobei α gegeben ist durch $\alpha(r) = r dx_0$ und β durch $\beta(rd_{R/K}(r')) = rd_{R/K[x_0]}(r')$.

c) Ist $\{b_1, \dots, b_s\}$ eine $K[x_0]$ -Basis von R (vgl. Lemma 1.2.c), so ist $\{db_1, \dots, db_s\}$ ein Erzeugendensystem des $K[x_0]$ -Moduls $\Omega_{R/K[x_0]}^1$.

Beweis: Behauptung a) folgt aus [KD], 4.13 und Behauptung b) aus [KD], 3.24. Nach [KD], 1.21.b erzeugt $\{d_{R/K[x_0]}(r)\}_{r \in R}$ den R -Modul $\Omega_{R/K[x_0]}^1$. Schreibt man $r = \varrho_1 b_1 + \dots + \varrho_s b_s$ mit $\varrho_1, \dots, \varrho_s \in K[x_0]$, so folgt $d_{R/K[x_0]}(r) = \varrho_1 d_{R/K[x_0]}(b_1) + \dots + \varrho_s d_{R/K[x_0]}(b_s)$, und damit die Behauptung. \square

Weiter unten werden wir sehen, daß die Abbildung α aus b) sogar injektiv ist. Zunächst wollen wir uns auch noch eine Präsentation von $\Omega_{R/K}^1$ verschaffen.

4.3. Satz. a) Ist $I \subseteq R$ ein homogenes Ideal, so gibt es eine exakte Sequenz graduierter R -Moduln

$$I/I^2 \xrightarrow{\gamma} \Omega_{R/K}^1/I\Omega_{R/K}^1 \xrightarrow{\epsilon} \Omega_{(R/I)/K}^1 \longrightarrow 0,$$

wobei γ gegeben ist durch $\gamma(r + I^2) = d(r) + I\Omega_{R/K}^1$ und ϵ durch $\epsilon(rdr' + I\Omega_{R/K}^1) = (r + I)d(r' + I)$.

b) Es gilt $\Omega_{R/K}^1 \cong \Omega_{R/K}^1/(x_0\Omega_{R/K}^1 + Rdx_0) \cong \Omega_{R/K[x_0]}^1/x_0\Omega_{R/K[x_0]}^1$.

c) Die Elemente $\{dx_0, \dots, dx_d\}$ bilden ein homogenes Erzeugendensystem des R -Moduls $\Omega_{R/K}^1$. Spannt \mathbb{X} den Raum \mathbb{P}^d auf, so ist dieses Erzeugendensystem minimal.

Beweis: Behauptung a) folgt aus [KD], 4.17 und Behauptung b) aus a) mit $I = (x_0)$ sowie Satz 4.2.b. Die erste Behauptung in c) folgt aus a) mit $I = \mathfrak{m}$. Zum Beweis der zweiten Behauptung in c) beachte man, daß der Epimorphismus $\gamma : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega_{R/K}^1/\mathfrak{m}\Omega_{R/K}^1$ aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus ist und wende das Lemma von Nakayama an. \square

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts untersuchen wir die Modulstruktur der betrachteten R -Moduln näher. Für den Modul $\mathcal{G} \subseteq R^{d+1}$, der bis auf eine Gradverschiebung der erste Syzygienmodul von $\Omega_{R/K}^1$ ist, erhalten wir genau wie in [K6], 1.8 die folgende Beschreibung.

4.4. Satz. a) Für jedes $i \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathcal{G}_i = \{(\frac{\partial F}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_d}) \mid F \in (I_{\mathbb{X}})_{i+1}\}$.

b) Ist $\{F_1, \dots, F_m\}$ ein minimales homogenes Erzeugendensystem von $I_{\mathbb{X}}$, und gilt $\text{char}(K) > \max\{\deg F_1, \dots, \deg F_m\}$, so bildet die Menge $\{(\frac{\partial F_i}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial F_i}{\partial x_d})\}_{i=1, \dots, m}$ ein minimales homogenes Erzeugendensystem des R -Moduls \mathcal{G} .

Ein weiteres Hilfsmittel in der vorliegenden graduierten Situation ist die *Euler-Derivation* $e : R \rightarrow R$ mit $e(r) = ir$ für $r \in R_i$ und $i \geq 0$. Sie induziert nach [KD], 1.19 eine surjektive, homogene, R -lineare Abbildung $\varphi : \Omega_{R/K}^1 \rightarrow \mathfrak{m}$ mit $\varphi(dx_i) = x_i$ für $i = 0, \dots, d$. Der nächste Satz besagt im reduzierten Fall, daß der Kern von φ gerade der *Torsionsuntermodul*

$$\mathcal{T}_{R/K} = \{\omega \in \Omega_{R/K}^1 \mid r\omega = 0 \text{ für einen homogenen Nichtnullteiler } r \in R\}$$

von $\Omega_{R/K}^1$ ist, daß der Hauptteil der Modulstruktur von $\Omega_{R/K}^1$ bereits in $\mathcal{T}_{R/K}$ steckt, und daß sich $\mathcal{T}_{R/K}$ sogar in den Restklassenmodul $\Omega_{R/K[x_0]}^1 \cong \Omega_{R/K}^1/Rdx_0$ einbettet.

4.5. Satz. a) Es gilt $\mathcal{T}_{R/K} = \{\omega \in \Omega_{R/K}^1 \mid \mathfrak{m}^i \cdot \omega = 0 \text{ für ein } i \geq 0\} = \{\omega \in \Omega_{R/K}^1 \mid x_0^i \cdot \omega = 0 \text{ für ein } i \geq 0\}$.

b) Es gilt $\mathcal{T}_{R/K} \subseteq \ker \varphi$. Ist \mathbb{X} reduziert, so hat man $\mathcal{T}_{R/K} = \ker \varphi$ und damit eine exakte Sequenz graduierter R -Moduln

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_{R/K} \rightarrow \Omega_{R/K}^1 \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{m} \rightarrow 0.$$

c) Ist \mathbb{X} reduziert, so gilt $\mathcal{T}_{R/K} = \{\sum_{i=0}^d r_i dx_i \mid \sum_{i=0}^d r_i x_i = 0\}$.

d) Man hat eine exakte Sequenz graduierter R -Moduln

$$0 \rightarrow \ker \varphi \rightarrow \Omega_{R/K[x_0]}^1 \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{\mathfrak{m}} \rightarrow 0,$$

wobei $\bar{\mathfrak{m}}$ das maximale Ideal von \bar{R} bezeichnet und $\bar{\varphi}$ gegeben ist durch $\bar{\varphi}(\sum_{i=0}^d r_i dx_i) = \sum_{i=1}^d r_i x_i + (x_0)$.

Beweis: Behauptung a) folgt aus der Beobachtung, daß es für jeden homogenen Nichtnullteiler $r \in R$ ein $j \geq 1$ gibt mit $\mathfrak{m}^j \subseteq (r) \subseteq \mathfrak{m}$.

Zum Beweis von b) beachten wir zunächst, daß für $\omega = \sum_{i=0}^d r_i dx_i \in \Omega_{R/K}^1$ mit $r_0, \dots, r_d \in R$ aus $x_0^j \cdot \omega = 0$ mit $j \geq 0$ folgt, daß $\varphi(x_0^j \cdot \omega) = \sum_{i=0}^d x_0^j r_i \varphi(dx_i) = \sum_{i=0}^d x_0^j r_i x_i = 0$ ist. Dies liefert $\varphi(\omega) = \sum_{i=0}^d r_i x_i = 0$, d.h. wir haben nach a) eine Inklusion $\mathcal{T}_{R/K} \subseteq \ker \varphi$. Im reduzierten Fall zeigt man die Behauptung $\mathcal{T}_{R/K} = \ker \varphi$ wie in [K6], 2.1.c durch Übergang zur Lokalisation nach x_0 , denn $\varphi_{x_0} : \Omega_{R_{x_0}/K}^1 \rightarrow \mathfrak{m}R_{x_0} = R_{x_0}$ ist ein Isomorphismus.

Teil c) ergibt sich sofort aus der expliziten Beschreibung von φ und aus b), und Teil d) folgt aus $\ker \varphi \cap Rdx_0 = (0)$. Letzteres wird klar, wenn man beachtet, daß $\varphi(rdx_0) = rx_0 = 0$ für ein $r \in R$ schon $r = 0$ impliziert. \square

Durch Anwendung von φ erhalten wir übrigens auch $\text{Ann}_R(dx_0) = (0)$, d.h. die Abbildung α in Satz 4.2.b ist injektiv. Wir zeigen nun an einem Beispiel, daß die zweite Aussage in Satz 4.5.b nicht richtig sein muß, wenn \mathbb{X} nicht reduziert ist.

4.6. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \neq 2$, und sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^1$ das am Punkt $(1:0)$ konzentrierte Unterschema vom Grad zwei. Dann gilt $R = K[X_0, X_1]/(X_1^2)$ und

$$\Omega_{R/K}^1 \cong (RdX_0 \oplus RdX_1)/\langle (0, 2x_1 dX_1) \rangle \cong Rdx_0 \oplus K[x_0]dx_1.$$

Offenbar wird kein Element von $\Omega_{R/K}^1$ von x_0 annulliert, d.h. nach Satz 4.5.a ist $\Omega_{R/K}^1$ ein torsionsfreier R -Modul. Jedoch gilt z.B. $x_1 dx_0 - x_0 dx_1 \in \ker \varphi \setminus \{0\}$, so daß sich $\mathcal{T}_{R/K} \subsetneq \ker \varphi$ ergibt.

Für den Torsionsuntermodul von $\Omega_{R/K}^1$ geben wir im reduzierten Fall eine genauere Beschreibung.

4.7. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema.

a) Bezeichnet $\text{Syz}_R^1(x_0, \dots, x_d) = \{(h_0, \dots, h_d) \in R^{d+1} \mid \sum_{i=0}^d h_i x_i = 0\}$ den Syzygienmodul von \mathfrak{m} , so induziert Satz 4.2.a eine exakte Sequenz graduierter R -Moduln

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(-1) \longrightarrow \text{Syz}_R^1(x_0, \dots, x_d)(-1) \longrightarrow \mathcal{T}_{R/K} \longrightarrow 0.$$

b) Man hat eine exakte Sequenz graduierter A -Moduln

$$\text{Syz}_A^1(X_0, \dots, X_d)(-1) \longrightarrow \text{Syz}_R^1(x_0, \dots, x_d)(-1) \xrightarrow{\mu} I_{\mathbb{X}}/(X_0, \dots, X_d)I_{\mathbb{X}} \longrightarrow 0,$$

wobei μ gegeben ist durch $\mu((h_0, \dots, h_d)) = H_0 X_0 + \dots + H_d X_d + (X_0, \dots, X_d)I_{\mathbb{X}}$ für $H_0, \dots, H_d \in A$ und $h_i = H_i + I_{\mathbb{X}}$.

c) Gilt $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K) > \max\{i \in \mathbb{N} \mid (I_{\mathbb{X}}/(X_0, \dots, X_d)I_{\mathbb{X}})_i \neq (0)\}$, so wird $\mathcal{T}_{R/K}$ als R -Modul erzeugt von den homogenen Elementen $\{x_i dx_j - x_j dx_i \mid 0 \leq i < j \leq d\}$ vom Grad zwei.

Beweis: Vgl. [K6], 2.4 und 2.5. □

Aus den exakten Sequenzen der Sätze 4.2, 4.5 und 4.7 ergeben sich natürlich sofort Formeln für die Hilbert-Funktionen H_{Ω} von $\Omega_{R/K}^1$, H_{Ω_0} von $\Omega_{R/K}^1$, $H_{\mathcal{T}}$ von $\mathcal{T}_{R/K}$, etc. Zum Beispiel gilt für alle $i \in \mathbb{Z}$

$$H_{\Omega}(i) = (n+1)H_{\mathbb{X}}(i-1) - H_{\mathcal{G}}(i-1),$$

$$H_{\Omega_0}(i) = H_{\Omega}(i) - H_{\mathbb{X}}(i-1)$$

sowie, falls \mathbb{X} reduziert ist

$$H_{\mathcal{T}}(i) = H_{\Omega}(i) - H_{\mathbb{X}}(i) = H_{\Omega_0}(i) - \Delta H_{\mathbb{X}}(i).$$

Der nun folgende Satz faßt die wichtigsten Eigenschaften der Funktion H_{Ω} zusammen.

4.8. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein (nicht notwendig reduziertes) 0-dimensionales Unterschema.

a) Für $i \leq 0$ gilt $H_{\Omega}(i) = 0$.

b) Für $1 \leq i \leq \alpha_{\mathbb{X}}$ gilt $H_{\Omega}(i) = (d+1) \binom{d+i-1}{d}$.

c) Ist $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K) > \alpha_{\mathbb{X}}$, so gilt

$$H_{\Omega}(\alpha_{\mathbb{X}}) = H_{\mathbb{X}}(\alpha_{\mathbb{X}}) + (\alpha_{\mathbb{X}} - 1) \binom{d+\alpha_{\mathbb{X}}-1}{d-1}.$$

d) Es gibt eine kleinste natürliche Zahl $\varrho_{\mathbb{X}} \geq 1$, so daß für alle $i \geq \varrho_{\mathbb{X}}$ gilt $H_{\Omega}(i) = H_{\Omega}(i+1)$. Diese Zahl $\varrho_{\mathbb{X}}$ heißt die Regularität von $\Omega_{R/K}^1$.

e) Es gilt $H_{\Omega}(\sigma_{\mathbb{X}} + 2) \geq H_{\Omega}(\sigma_{\mathbb{X}} + 3) \geq \dots$.

f) Ist $\varrho_{\mathbb{X}} \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 2$, so gilt sogar $H_{\Omega}(\sigma_{\mathbb{X}} + 2) > H_{\Omega}(\sigma_{\mathbb{X}} + 3) > \dots > H_{\Omega}(\varrho_{\mathbb{X}}) = H_{\Omega}(\varrho_{\mathbb{X}} + 1) = \dots$ (= s im reduzierten Fall).

Beweis: Die Behauptungen a) und b) folgen aus der exakten Sequenz von Satz 4.2.a, denn für die betrachteten Grade gilt $\mathcal{G}_i = (0)$. Zum Beweis von c) zeigen wir die Gleichung $H_{\mathcal{G}}(\alpha_{\mathbb{X}} - 1) = \dim_K(I_{\mathbb{X}})_{\alpha_{\mathbb{X}}}$, woraus sich zusammen mit Satz 4.2.a die behauptete Formel nach kurzer Rechnung ergibt.

Sei $\{G_1, \dots, G_r\}$ eine K -Basis von $(I_{\mathbb{X}})_{\alpha_{\mathbb{X}}}$. Dann erzeugen die Elemente $\{(\frac{\partial G_i}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial G_i}{\partial x_d}) \mid i = 1, \dots, r\}$ den K -Vektorraum $\mathcal{G}_{\alpha_{\mathbb{X}}-1}$, und wir müssen nachweisen, daß sie K -linear unabhängig sind. Sind $c_1, \dots, c_r \in K$ mit $\sum_{i=1}^r c_i (\frac{\partial G_i}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial G_i}{\partial x_d}) = 0$, so gelten für das Element $G = \sum_{i=1}^r c_i G_i \in (I_{\mathbb{X}})_{\alpha_{\mathbb{X}}}$ die Beziehungen $\frac{\partial G}{\partial x_0} = \dots = \frac{\partial G}{\partial x_d} = 0$. Wegen $(I_{\mathbb{X}})_{\alpha_{\mathbb{X}}-1} = (0)$ folgt hieraus $\frac{\partial G}{\partial X_0} = \dots = \frac{\partial G}{\partial X_d} = 0$, und Eulers Relation liefert $G = \frac{1}{\alpha_{\mathbb{X}}} (\frac{\partial G}{\partial X_0} X_0 + \dots + \frac{\partial G}{\partial X_d} X_d) = 0$, also $c_1 = \dots = c_r = 0$.

Nun beweisen wir Teil d). Das Element $x_0 \in R_1$ ist ein Nichtnullteiler auf dem R -Modul $\mathcal{G} \subseteq R^{d+1}$, denn es ist einer auf R . Sei $\gamma \geq \alpha_{\mathbb{X}} - 1$ der größte Grad eines homogenen minimalen Erzeugers von \mathcal{G} , d.h. sei $\gamma = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid (\mathcal{G}/\mathfrak{m}\mathcal{G})_i \neq (0)\}$. Für alle $i > \gamma + \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ gilt $\mathcal{G}_i = x_0 \mathcal{G}_{i-1}$ und $H_{\mathcal{G}}(i) = H_{\mathcal{G}}(i-1)$. Nach Satz 4.2.a wird auch $H_{\Omega}(i)$ für $i \gg 0$ konstant.

Teil e) folgt aus Satz 4.3.c, denn für $i \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 3$ gilt $(\Omega_{R/K}^1)_i = \sum_{j=0}^d R_{i-1} dx_j = x_0 \cdot \sum_{j=0}^d R_{i-2} dx_j = x_0 \cdot (\Omega_{R/K}^1)_{i-1}$. Um Behauptung f) zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß aus $H_{\Omega}(i) = H_{\Omega}(i+1)$ bereits $H_{\Omega}(i) = H_{\Omega}(j)$ für alle $j \geq i$ folgt. Nach Satz 4.2.a nehmen wir also an, daß für ein $i \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 2$ gilt $H_{\mathcal{G}}(i-1) = H_{\mathcal{G}}(i)$. Da x_0 ein Nichtnullteiler auf \mathcal{G} ist, folgt $\mathcal{G}_i = x_0 \mathcal{G}_{i-1}$. Nun wird $I_{\mathbb{X}}$ von homogenen Elementen vom Grad $\leq \sigma_{\mathbb{X}} + 2$ erzeugt (vgl. [GM], 1.1). Daher wird \mathcal{G} von homogenen Elementen vom Grad $\leq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ erzeugt, und wir erhalten

$$\mathcal{G}_{i+1} = x_0 \mathcal{G}_i + \dots + x_d \mathcal{G}_i = x_0 \cdot (x_0 \mathcal{G}_{i-1} + \dots + x_d \mathcal{G}_{i-1}) = x_0 \cdot \mathcal{G}_i.$$

Aus $\mathcal{G}_{i+1} = x_0 \cdot \mathcal{G}_i$ ergibt sich die Behauptung durch vollständige Induktion. \square

Die folgenden Beispiele zeigen, daß die Funktion $H_{\Omega}(i)$ in dem Bereich $\alpha_{\mathbb{X}} \leq i \leq \sigma_{\mathbb{X}} + 2$ nicht monoton zu sein braucht.

4.9. Beispiel. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ das reduzierte Unterschema, das aus den neun Punkten $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (1:0:1)$, $P_3 = (1:0:2)$, $P_4 = (1:0:3)$, $P_5 = (1:0:4)$, $P_6 = (1:0:5)$, $P_7 = (1:1:0)$, $P_8 = (1:2:0)$ und $P_9 = (1:1:1)$ besteht. Dann gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 9 \ \dots$ sowie $\alpha_{\mathbb{X}} = 3$ und $\sigma_{\mathbb{X}} = 4$. Die Hilbert-Funktion von $\Omega_{R/K}^1$ ist

$$H_{\Omega} : 3 \ 9 \ 15 \ 14 \ 13 \ 14 \ 13 \ 12 \ 11 \ 10 \ 9 \ 9 \ \dots$$

und erfüllt $H_{\Omega}(\sigma_{\mathbb{X}}) = 14 > H_{\Omega}(\sigma_{\mathbb{X}} + 1) = 13 < H_{\Omega}(\sigma_{\mathbb{X}} + 2) = 14$. In diesem Beispiel ist allerdings die Funktion $H_{\mathcal{T}} : 3 \ 8 \ 6 \ 5 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1$ *unimodal*, d.h. sie steigt monoton bis zu einem Maximum an und fällt von da an monoton.

4.10. Beispiel. Ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^4$ bestehe aus vier Punkten auf einer Geraden und drei weiteren, generisch gewählten Punkten. Dann gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 5 \ 6 \ 7 \ 7 \ \dots$ sowie $\alpha_{\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{X}} = 2$. Die Hilbert-Funktion von $\Omega_{R/K}^1$ ist

$$H_{\Omega} : 5 \ 16 \ 9 \ 10 \ 9 \ 8 \ 7 \ 7 \ \dots$$

und erfüllt $H_{\Omega}(\sigma_{\mathbb{X}}) = 16 > H_{\Omega}(\sigma_{\mathbb{X}} + 1) = 9 < H_{\Omega}(\sigma_{\mathbb{X}} + 2) = 10$. Wiederum ist H_{Ω} also nicht unimodal, und diesmal ist nicht einmal $H_{\mathcal{T}} : 10 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1$ unimodal.

4.11. Beispiel. Ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ bestehe aus sieben generisch gewählten Punkten. Dann gilt $H_\Omega : 5 \ 17 \ 8 \ 7 \ 7 \ \dots$, und im Gegensatz zu den letzten beiden Beispielen ist diese Funktion unimodal.

Unser nächster Satz gibt eine obere Schranke für die Regularität von $\Omega_{R/K}^1$. Beispiel 4.9 zeigt, daß diese Schranke scharf ist. Ein anderer Beweis des Satzes kann im Fall eines lokal vollständigen Durchschnitts aus [GGP], 2.4 und Satz 4.16 gewonnen werden.

4.12. Satz. Für die Regularität $\varrho_{\mathbb{X}}$ von $\Omega_{R/K}^1$ gilt $\varrho_{\mathbb{X}} \leq 2\sigma_{\mathbb{X}} + 3$.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß die Multiplikationsabbildung $\mu_{x_0} : (\Omega_{R/K}^1)_{2\sigma+3} \longrightarrow (\Omega_{R/K}^1)_{2\sigma+4}$ injektiv ist, weil dann der Beweis von Satz 4.8.e und 4.8.f die Behauptung liefert. Dazu betrachten wir die nach Satz 4.2.a gegebene exakte Sequenz von K -Vektorräumen

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_{2\sigma+2} \longrightarrow R_{2\sigma+2}^{d+1} \xrightarrow{\delta} (\Omega_{R/K}^1)_{2\sigma+3} \longrightarrow 0$$

und nehmen an, es gibt ein Tupel $(r_0, \dots, r_d) \in R_{2\sigma+2}^{d+1}$ mit $\delta((r_0, \dots, r_d)) \neq 0$ und $\delta((x_0 r_0, \dots, x_0 r_d)) = 0$. Dies bedeutet $(x_0 r_0, \dots, x_0 r_d) \in \mathcal{G}_{2\sigma+3}$. Auf Grund des Beweises von Satz 4.8.f wissen wir $\mathcal{G}_{2\sigma+3} = R_{\sigma+2} \mathcal{G}_{\sigma+1} = x_0 R_{\sigma+1} \mathcal{G}_{\sigma+1} = x_0 \mathcal{G}_{2\sigma+2}$. Folglich existiert ein Tupel $(r'_0, \dots, r'_d) \in \mathcal{G}_{2\sigma+2}$ mit $(x_0 r_0, \dots, x_0 r_d) = x_0 \cdot (r'_0, \dots, r'_d)$. Da x_0 ein Nichtnullteiler von R^{d+1} ist, erhalten wir $(r_0, \dots, r_d) = (r'_0, \dots, r'_d) \in \mathcal{G}_{2\sigma+2}$. Doch nun stellt $\delta((r_0, \dots, r_d)) = 0$ einen Widerspruch zur Annahme dar. \square

Im reduzierten Fall können wir den Wert von $H_\Omega(i)$ für $i \geq \varrho_{\mathbb{X}}$ angeben, und ebenso die Grade, in denen $\Omega_{R/K}^1$ Torsionselemente hat.

4.13. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema.

- a) Für alle $i \geq \varrho_{\mathbb{X}}$ gilt $H_\Omega(i) = s = \deg \mathbb{X}$.
- b) Gilt $\deg \mathbb{X} = s \geq 2$, so ist $(\mathcal{T}_{R/K})_2 \neq \langle 0 \rangle$.
- c) Gilt $\deg \mathbb{X} = s \geq 2$ sowie $\varrho_{\mathbb{X}} \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 2$, und ist $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K) > \sigma_{\mathbb{X}} + 2$, so gilt $(\mathcal{T}_{R/K})_i \neq \langle 0 \rangle$ genau dann, wenn $i \in \{2, \dots, \varrho_{\mathbb{X}} - 1\}$ ist.

Beweis: Behauptung a) folgt aus der Dimensionsbilanz der exakten Sequenz von Satz 4.5.b, da $(\mathcal{T}_{R/K})_i$ für $i \gg 0$ verschwindet. Für die Teile b) und c) verweisen wir auf [K6], 3.6. \square

Die Sätze 4.8.f und 4.13.c legen eine untere Schranke für die Regularität $\varrho_{\mathbb{X}}$ von $\Omega_{R/K}^1$ nahe.

4.14. Vermutung. Für jedes 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ gilt $\varrho_{\mathbb{X}} \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 2$.

Falls diese Vermutung stimmt, so ist die angegebene Abschätzung scharf, wie unser nächstes Beispiel zeigt.

4.15. Beispiel. Ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^5$ bestehe aus neun generisch gewählten Punkten. Dann gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 6 \ 9 \ 9 \ \dots$ sowie $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$. Die Hilbert-Funktion von $\Omega_{R/K}^1$ ist $H_\Omega : 6 \ 24 \ 9 \ 9 \ \dots$, und somit gilt $\varrho_{\mathbb{X}} = 3 = \sigma_{\mathbb{X}} + 2$.

Ist \mathbb{X} ein *lokal vollständiger Durchschnitt*, d.h. sind die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}$ für $i = 1, \dots, s$ vollständige Durschnitte, so können wir die exakte Sequenz aus Satz 4.2.a mit Hilfe der *fundamentalen exakten Sequenz* (vgl. [KD], 4.17) verlängern.

4.16. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionaler lokal vollständiger Durchschnitt, und sei $I_{\mathbb{X}}^{(2)} = (I_{\mathbb{X}}^2)^{\text{sat}}$. das symbolische Quadrat von $I_{\mathbb{X}}$.

a) Man hat eine exakte Sequenz von graduierten R -Moduln

$$0 \longrightarrow I_{\mathbb{X}}^{(2)}/I_{\mathbb{X}}^2 \longrightarrow I_{\mathbb{X}}/I_{\mathbb{X}}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A/K}^1 \otimes_A R \longrightarrow \Omega_{R/K}^1 \longrightarrow 0,$$

wobei die Abbildung δ gegeben ist durch $\delta(F + I_{\mathbb{X}}^{(2)}) = dF \otimes 1$ für $F \in A$.

b) Es gilt $I_{\mathbb{X}}^2 = \mathfrak{P}_1^2 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_s^2$.

c) Für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt $H_{\Omega}(i) = (d+1)H_{\mathbb{X}}(i-1) + H_{\mathbb{X}}(i) - H_{\mathbb{Y}}(i)$, wobei $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}^d$ das 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{Y} = \mathcal{Z}(I_{\mathbb{X}}^{(2)})$ ist. Insbesondere erhalten wir $\sigma_{\mathbb{Y}} = \max\{\sigma_{\mathbb{X}} + 2, \varrho_{\mathbb{X}}\} - 1$.

Beweis: Der Beweis von [K6], 3.9 überträgt sich auf die hier vorliegende Situation. \square

In einer Reihe von Spezialfällen können wir den R -Modul $\Omega_{R/K}^1$ bzw. seine Hilbert-Funktion explizit berechnen. Für die Details der nachfolgenden Beispiele verweisen wir im reduzierten Fall auf [K6], §4.

4.17. Beispiel. Ist $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^1$ das reduzierte 0-dimensionale Unterschema mit $P_i = (1:p_i)$ für $i = 1, \dots, s$, so gilt

$$\Omega_{R/K}^1 \cong (R^2 / \langle (\frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial x_1}) \rangle)(-1),$$

wobei $\frac{\partial F}{\partial x_0} = -\sum_{i=1}^s p_i \prod_{j \neq i} (x_1 - p_j x_0)$ und $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^s p_i \prod_{j \neq i} (x_1 - p_j x_0)$ ist. Für die Hilbert-Funktion H_{Ω} von $\Omega_{R/K}^1$ gilt

$$H_{\Omega} : 2 \ 4 \ 6 \ \dots \ (2s-2) \ (2s-1) \ (2s-2) \ (2s-3) \ \dots \ (s+1) \ s \ s \ \dots$$

und wir erhalten $\varrho_{\mathbb{X}} = 2s-1 = 2\sigma_{\mathbb{X}} + 3$. Der Torsionsuntermodul $\mathcal{T}_{R/K}$ von $\Omega_{R/K}^1$ ist gegeben durch

$$\mathcal{T}_{R/K} = \langle x_0 dx_1 - x_1 dx_0 \rangle \cong (R / \langle (\frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial x_1}) \rangle)(-2)$$

und hat die Hilbert-Funktion $H_{\mathcal{T}} : 1 \ 2 \ \dots \ (s-1) \ (s-2) \ \dots \ 1$.

4.18. Beispiel. Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ der 0-dimensionale vollständige Durchschnitt $\mathbb{X} = H_1 \cap \dots \cap H_d$ der Hyperflächen $H_1 = \mathcal{Z}(F_1), \dots, H_d = \mathcal{Z}(F_d)$ mit $F_i \in A_{\nu_i}$ für $i = 1, \dots, d$, so hat man eine exakte Sequenz graduerter R -Moduln

$$0 \longrightarrow I_{\mathbb{X}}/I_{\mathbb{X}}^2 \xrightarrow{\delta} R^{d+1}(-1) \longrightarrow \Omega_{R/K}^1 \longrightarrow 0$$

mit $\delta(F_i + I_{\mathbb{X}}^2) = (\frac{\partial F_i}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial F_i}{\partial x_d})$ für $i = 1, \dots, d$. Weiter hat man einen Isomorphismus graduerter R -Moduln

$$\iota : I_{\mathbb{X}}/I_{\mathbb{X}}^2 \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^d R(-\nu_i)$$

mit $\iota(F_i + I_{\mathbb{X}}^2) = e_i$. Insbesondere gilt

$$H_{\Omega}(i) = (d+1)H_{\mathbb{X}}(i-1) - \sum_{i=1}^d H_{\mathbb{X}}(i-\nu_i)$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ und $\varrho_{\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{X}} + 1 + \max\{\nu_i \mid 1 \leq i \leq d\}$.

4.19. Beispiel. Besteht $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ aus $s \geq d + 1$ generisch gewählten Punkten, so gilt $H_{\mathbb{X}}(i) = \min\{s, \binom{d+i}{d}\}$ sowie

$$H_{\Omega}(i) = (d + 1)H_{\mathbb{X}}(i - 1) + H_{\mathbb{X}}(i) - \min\{(d + 1)s, \binom{d+i}{d}\}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$, außer in den Fällen $(d, s) \in \{(2, 5), (3, 9), (4, 7), (4, 14)\}$, in denen man H_{Ω} ebenfalls explizit angeben kann.

Im letzten Teil dieses Abschnitts wollen wir noch den Derivationsmodul von R einführen, der ja bekanntlich der Dualmodul von $\Omega_{R/K}^1$ ist.

4.20. Definition. a) Eine *Derivation* von R/K ist eine K -lineare Abbildung $d : R \rightarrow R$ mit $d(rr') = rd(r') + r'd(r)$ für alle $r, r' \in R$.

b) Die Menge aller Derivationen von R/K bildet einen R -Modul, den wir den *Derivationsmodul* von R/K nennen und mit $\text{Der}_K(R)$ bezeichnen.

Nach [KD], 1.23 stellt die R -lineare Abbildung $\text{Hom}_R(\Omega_{R/K}^1, R) \rightarrow \text{Der}_K(R)$, die durch $\ell \mapsto \ell \circ d_{R/K}$ gegeben ist, einen Isomorphismus dar. Im reduzierten Fall können wir den R -Modul $\text{Der}_K(R)$ näher beschreiben.

4.21. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema.

a) Es gilt $\text{Der}_K(R) = \mathfrak{m}^{-1} \cdot e$, wobei $e : R \rightarrow R$ die Euler-Derivation und $\mathfrak{m}^{-1} = \{q \in Q(R) \mid q \cdot \mathfrak{m} \subseteq R\}$ das zu \mathfrak{m} inverse gebrochene Ideal ist.

b) Sei γ der Cohen-Macaulay Typ $\gamma = \dim_K \mathfrak{S}(\bar{R})$ von R , und seien $s_1, \dots, s_{\gamma} \in R$ homogene Elemente, deren Restklassen $\{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{\gamma}\}$ eine K -Basis des Sockels $\mathfrak{S}(\bar{R})$ von \bar{R} darstellen. Dann gilt

$$\mathfrak{m}^{-1} = R + \left\langle \frac{s_1}{x_0}, \dots, \frac{s_{\gamma}}{x_0} \right\rangle \subseteq Q(R),$$

und somit wird $\text{Der}_K(R)$ als R -Modul erzeugt von $\{e, \frac{s_1}{x_0} \cdot e, \dots, \frac{s_{\gamma}}{x_0} \cdot e\}$.

Beweis: Nach [KD], 4.24.b ist die R -lineare Abbildung $\alpha : \mathfrak{m}^{-1} \rightarrow \text{Der}_K(R)$ mit $\alpha(q) = q \cdot e$ injektiv. Dualisiert man die exakte Sequenz von Satz 4.5.b, so sieht man, daß es für Behauptung a) genügt, $\text{Hom}_R(\mathcal{T}_{R/K}, R) = 0$ zu beweisen. Dies ist klar, denn für alle $\varphi \in \text{Hom}_R(\mathcal{T}_{R/K}, R)$, alle $\omega \in \mathcal{T}_{R/K}$ und alle $i \gg 0$ gilt $x_0^i \cdot \varphi(\omega) = \varphi(x_0^i \omega) = \varphi(0) = 0$, also $\varphi(\omega) = 0$.

Zum Beweis von b) gehen wir wie in [HK], S. 16 vor. In $Q(R)$ ist die R -lineare Abbildung $\mu_{1/x_0} : (x_0) :_R \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}^{-1}$ mit $q \mapsto \frac{q}{x_0}$ surjektiv, denn für $q \in \mathfrak{m}^{-1}$ ist $r = x_0 q \in R$, also $q = \frac{r}{x_0}$. Für den zusammengesetzten Epimorphismus

$$\varphi : (x_0) :_R \mathfrak{m} \xrightarrow{\mu_{1/x_0}} \mathfrak{m}^{-1} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}^{-1}/R$$

gilt $\ker \psi = (x_0)$, denn aus $\mu_{1/x_0}(q) \in R$ folgt $q \in (x_0)$ und die andere Inklusion ist klar. Komponieren wir den Isomorphismus $(\bar{\psi})^{-1} : \mathfrak{m}^{-1}/R \xrightarrow{\sim} ((x_0) :_R \mathfrak{m})/(x_0)$ mit den homogenen Isomorphismen

$$((x_0) :_R \mathfrak{m})/(x_0) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{R/(x_0)}(R/\mathfrak{m}, R/(x_0)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}(R/(x_0)),$$

so erhalten wir $\mathfrak{m}^{-1}/R \cong \mathfrak{S}(\bar{R})$, wobei die Restklassen der Elemente $\frac{s_1}{x_0}, \dots, \frac{s_{\gamma}}{x_0}$ offenbar gerade auf eine K -Basis von $\mathfrak{S}(\bar{R})$ abgebildet werden. \square

II. Uniformitätsbedingungen

5. Cayley-Bacharach Schemata

Auch in diesem Abschnitt sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema. Wir verwenden weiterhin die Definitionen und Notationen aus dem ersten Kapitel. Die nachfolgenden Ausführungen basieren hauptsächlich auf [K2], §2. Nachdem wir eine Reihe von algebraischen Objekten eingeführt haben mit deren Hilfe wir die Einbettung $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ studieren können, wollen wir nun verschiedene geometrische Eigenschaften dieser Einbettung algebraisch charakterisieren. Dabei beginnen wir mit dem folgenden klassischen Resultat.

5.1. Satz. (Satz von Cayley-Bacharach)

Seien $a, b \geq 0$, und sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ eine Menge von $a \cdot b$ Punkten, die den vollständigen Durchschnitt zweier ebener algebraischer Kurven C_1 vom Grad a und C_2 vom Grad b darstellt. Dann geht jede ebene algebraische Kurve vom Grad $a + b - 3$, die $a \cdot b - 1$ Punkte von \mathbb{X} enthält, automatisch auch durch den letzten Punkt.

In seiner Arbeit [C] hatte A. Cayley nicht nur eine stärkere (und falsche) Formulierung dieses Satzes angegeben, auch sein Beweis enthielt eine Lücke. Beides wurde 1886 von I. Bacharach mit Hilfe des “ $A\Phi + B\Psi$ ”-Theorems von M. Noether korrigiert (vgl. [B]). Für uns ist Satz 5.1 eine einfache Folgerung aus dem untenstehenden Beispiel 5.14, denn für 0-dimensionale Schemata der betrachteten Art gilt $a + b - 3 = \sigma_{\mathbb{X}}$. Er gibt aber Anlaß zu der folgenden, wesentlich allgemeineren Definition.

5.2. Definition. a) Sei $i \geq 0$. Wir sagen, ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ habe die *Cayley-Bacharach Eigenschaft* vom Grad i , wenn jede Hyperfläche vom Grad i , die ein Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$ enthält, automatisch das ganze Schema \mathbb{X} umfaßt.

b) Ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ heißt ein *Cayley-Bacharach Schema*, wenn \mathbb{X} die Cayley-Bacharach Eigenschaft vom Grad $\sigma_{\mathbb{X}}$ hat.

Es ist klar, daß jedes 0-dimensionale Schema \mathbb{X} mit der Cayley-Bacharach Eigenschaft vom Grad $i \geq 1$ auch die Cayley-Bacharach Eigenschaft vom Grad $i - 1$ hat. Aus Lemma 1.7.b folgt, daß die Zahl $\sigma_{\mathbb{X}}$ der maximale Grad $i \geq 0$ ist, für den \mathbb{X} die Cayley-Bacharach Eigenschaft vom Grad i haben kann. Wir geben nun einige Beispiele für Cayley-Bacharach Schemata an.

5.3. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \neq 2$, und sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_8\} \subseteq \mathbb{P}^2$ das reduzierte 0-dimensionale Unterschema mit $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (1:0:1)$, $P_3 = (1:0:2)$, $P_4 = (1:1:0)$, $P_5 = (1:1:1)$, $P_6 = (1:1:2)$, $P_7 = (1:2:0)$ und $P_8 = (1:2:2)$. Dann gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 6 \ 8 \ 8 \ \dots$ und $\sigma_{\mathbb{X}} = 2$. Jede Kurve vom Grad zwei, die sieben Punkte von \mathbb{X} enthält, hat nach dem Satz von Bezout entweder die Gerade $\mathcal{Z}(X_1)$ oder die Gerade $\mathcal{Z}(X_1 - X_0)$ zur Komponente. Hieraus wird ersichtlich, daß es überhaupt keine Kurve vom Grad zwei durch sieben der Punkte von \mathbb{X} gibt. Also ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema.

5.4. Beispiel. Das reduzierte 0-dimensionale Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ vom Grad sechs aus Beispiel 3.18 ist ein Cayley-Bacharach Schema, denn es gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 4 \ 6 \ 6 \ \dots$, $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$, und je fünf Punkte von \mathbb{X} spannen \mathbb{P}^3 auf, d.h. keine fünf Punkte von \mathbb{X} liegen auf einer Hyperebene.

5.5. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \neq 2$. Das reduzierte 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} = \{(1:0:0), (1:1:0), (1:2:0), (1:0:1)\} \subseteq \mathbb{P}^2$ ist kein Cayley-Bacharach Schema, denn es gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 4 \ 4 \ \dots$, $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$, und die Gerade $\mathcal{Z}(X_2)$ enthält genau drei Punkte von \mathbb{X} .

Die Cayley-Bacharach Eigenschaft vom Grad i kann man sehr leicht mit Hilfe der Separatoren bzw. der Hilbert-Funktionen der Unterschemata $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$ charakterisieren.

5.6. Satz. Sei $i \geq 0$. Für ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) \mathbb{X} hat die Cayley-Bacharach Eigenschaft vom Grad i .
- b) Für jedes Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$ gilt $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} > i$.
- c) Ist $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ ein Unterschema mit $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$ und ist $f_{\mathbb{Y}} \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ ein Separator von \mathbb{Y} , so gilt $x_0^{\sigma_{\mathbb{X}}+1-i} \nmid f_{\mathbb{Y}}$.

Beweis: Die Äquivalenz von a) und b) folgt unmittelbar aus Definition 5.2.a, und die Äquivalenz von b) und c) ergibt sich aus $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} = (f_{\mathbb{Y}})^{\text{sat.}} = \bigoplus_{j \geq 0} \{r \in R_j \mid x_0^{\sigma_{\mathbb{X}}+1-j} \cdot r \in K \cdot f_{\mathbb{Y}}\}$. \square

5.7. Beispiel. Besteht ein 0-dimensionales reduziertes Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ aus s generisch gewählten Punkten, so ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema, denn es gilt $H_{\mathbb{X}}(j) = \min\{H_{\mathbb{P}^d}(j), s\}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$, und für alle Unterschemata $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $s - 1$ gilt $H_{\mathbb{Y}}(j) = \min\{H_{\mathbb{P}^d}(j), s - 1\}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$, also $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{X}} + 1$.

Ein 0-dimensionales Schema \mathbb{X} heißt *lokal Gorenstein*, wenn die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}$ für $i = 1, \dots, s$ Gorenstein-Ringe sind. Ist \mathbb{X} lokal Gorenstein, so spiegelt sich die Eigenschaft, ein Cayley-Bacharach Schema zu sein, in der Struktur des kanonischen Moduls ω_R wieder.

5.8. Satz. Für ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) \mathbb{X} ist lokal Gorenstein und ein Cayley-Bacharach Schema.
- b) Für ein generisch gewähltes Element $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}}$ gilt $\text{Ann}_R(\varphi) = (0)$.
- c) Es gibt ein Element $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}}$ mit $\text{Ann}_R(\varphi) = (0)$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß Bedingung b) aus a) folgt. Da \mathbb{X} lokal Gorenstein ist, gibt es für jedes $i \in \{1, \dots, s\}$ ein eindeutiges Unterschema $\mathbb{Y}_i \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y}_i = \deg \mathbb{X} - 1$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{Y}_i, P_i} = \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i} / \mathcal{S}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i})$, und da \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema ist, gilt $f_{\mathbb{Y}_i} \notin x_0 R_{\sigma_{\mathbb{X}}}$. Also erfüllt eine generisch gewählte K -lineare Abbildung $\bar{\varphi} : R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \rightarrow K$ mit $\bar{\varphi}(x_0 R_{\sigma_{\mathbb{X}}}) = 0$ die Bedingungen $\bar{\varphi}(f_{\mathbb{Y}_i}) \neq 0$ für $i = 1, \dots, s$. Jetzt ist die Behauptung eine Konsequenz der Lemmata 2.6 und 2.7.b.

Da Bedingung c) offensichtlich aus b) folgt, bleibt nur noch der Schluß von c) auf a) zu beweisen. Aus der Injektion $R(\sigma_{\mathbb{X}}) \cong R \cdot \varphi \subseteq \omega_R$ und aus $\dim_K R(\sigma_{\mathbb{X}})_j = \deg \mathbb{X} = \dim_K (\omega_R)_j$ für $j \gg 0$ erhalten wir, daß für $i = 1, \dots, s$ die homogenen Lokalisationen $R_{(\mathfrak{p}_i)}$ und $(\omega_R)_{(\mathfrak{p}_i)}$ isomorph sind. Nun ist aber $(\omega_R)_{(\mathfrak{p}_i)}$ gerade der kanonische Modul von $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i} \cong R_{(\mathfrak{p}_i)}$, d.h. der Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}$ ist ein Gorenstein-Ring und \mathbb{X} ist lokal Gorenstein. Sei für $i = 1, \dots, s$ wieder $\mathbb{Y}_i \subseteq \mathbb{X}$ das Unterschema mit $\deg \mathbb{Y}_i = \deg \mathbb{X} - 1$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{Y}_i, P_i} = \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i} / \mathfrak{S}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i})$, und sei $f_{\mathbb{Y}_i} \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ ein Separator von \mathbb{Y}_i . Nach Lemma 2.7.b gilt $\varphi(f_{\mathbb{Y}_i}) \neq 0$, was wegen $\varphi(x_0 R_{\sigma_{\mathbb{X}}}) = (0)$ nur geht, wenn $f_{\mathbb{Y}_i} \notin x_0 R_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ ist. Nach Satz 5.6 ist \mathbb{X} also ein Cayley-Bacharach Schema. \square

Dieser Satz liefert Abschätzungen für die Werte der Hilbert-Funktion eines Cayley-Bacharach Schemas, das lokal Gorenstein ist.

5.9. Korollar. *Ist ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ lokal Gorenstein und ein Cayley-Bacharach Schema, so gilt*

$$H_{\mathbb{X}}(i) + H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - i) \leq \deg \mathbb{X}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Wegen $R(\sigma_{\mathbb{X}}) \cong R \cdot \varphi \subseteq \omega_R$ gilt $H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - i) = \dim_K R(\sigma_{\mathbb{X}})_{-i} \leq \dim_K (\omega_R)_{-i} = \deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(i)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. \square

Unser nächstes Beispiel zeigt, daß ein Cayley-Bacharach Schema nicht lokal Gorenstein zu sein braucht.

5.10. Beispiel. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ der am Punkt $P_1 = (1:0:0)$ konzentrierte "Doppelpunkt", d.h. es sei $I_{\mathbb{X}} = (X_1^2, X_1 X_2, X_2^2)$. Dann gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 3 \ \dots$ und $\sigma_{\mathbb{X}} = 0$. Der lokale Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, P_1} / (\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^2, P_1})^2$ ist offensichtlich kein Gorenstein-Ring. Doch jedes der unendlich vielen Unterschemata $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = 2 = \deg \mathbb{X} - 1$ hat die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{Y}} : 1 \ 2 \ 2 \ \dots$, d.h. das Schema \mathbb{X} ist nach Satz 5.6 ein Cayley-Bacharach Schema.

Im Fall $\Delta_{\mathbb{X}} = H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}}+1) - H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}}) = 1$ kann es ein Beispiel wie das eben betrachtete nicht geben.

5.11. Korollar. *Ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema mit $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$, so ist \mathbb{X} lokal Gorenstein.*

Beweis: Angenommen, es gibt ein $i \in \{1, \dots, s\}$ mit $\dim_K \mathfrak{S}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}) \geq 2$. Seien $s_1, s_2 \in \mathfrak{S}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i})$ zwei K -linear unabhängige Elemente, und seien $\mathbb{Y}_i \subseteq \mathbb{X}$ für $i = 1, 2$ die durch $(0, \dots, 0, s_i, 0, \dots, 0)$ definierten Unterschemata vom Grad $\deg \mathbb{X} - 1$. Nach dem im ersten Abschnitt Gezeigten ist $f_i = f_{\mathbb{Y}_i} = i^{-1}((0, \dots, 0, s_i, 0, \dots, 0)) \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ ein Separator von \mathbb{Y}_i . Wegen $\Delta_{\mathbb{X}} = \dim_K \overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ sind die Leitformen $Lf_1 = f_1 + (x_0) \in \overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ und $Lf_2 = f_2 + (x_0) \in \overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ K -linear abhängig, d.h. es gibt Elemente $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit $\lambda_1 Lf_1 + \lambda_2 Lf_2 = 0$. Dann wird das Unterschema $\mathbb{Y} = \mathcal{Z}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \subseteq \mathbb{X}$ von dem Sockelelement $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \in \mathfrak{S}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i})$ definiert und hat Grad $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$. Jedoch liefert $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in x_0 R_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ die Ungleichung $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \leq \sigma_{\mathbb{X}}$, was wegen Satz 5.6 der Voraussetzung widerspricht. \square

Das vorstehende Korollar kann man manchmal anwenden, um zu zeigen, daß ein 0-dimensionales Schema kein Cayley-Bacharach Schema ist.

5.12. Beispiel. Ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ bestehe aus zwei Doppelpunkten, d.h. es sei $\text{Supp}(\mathbb{X}) = \{P_1, P_2\}$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, P_i}/(\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^2, P_i})^2$ für $i = 1, 2$. Dann gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 5 \ 6 \ 6 \ \cdots$ und $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$. Da \mathbb{X} nicht lokal Gorenstein ist, kann \mathbb{X} kein Cayley-Bacharach Schema sein.

Ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ heißt *arithmetisch Gorenstein*, wenn der Ring R ein Gorenstein-Ring ist. In diesem Fall ist \mathbb{X} auch lokal Gorenstein, da für $i = 1, \dots, s$ die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i} \cong R_{(\mathfrak{p}_i)}$ ebenfalls Gorenstein-Ringe sind. Aus Satz 5.8 erhält man sofort die folgende, bereits in [K7] bewiesene Charakterisierung 0-dimensionaler arithmetischer Gorenstein-Schemata.

5.13. Korollar. *Für ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

- a) \mathbb{X} ist arithmetisch Gorenstein.
- b) \mathbb{X} ist ein Cayley-Bacharach Schema und die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} ist symmetrisch, d.h. für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt

$$H_{\mathbb{X}}(i) + H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - i) = \deg \mathbb{X}.$$

Beweis: Bedingung b) ist nach Satz 5.8 äquivalent damit, daß man eine Injektion $R(\sigma_{\mathbb{X}}) \cong R \cdot \varphi \subseteq \omega_R$ hat, die aus Dimensionsgründen bijektiv ist. Nun ist \mathbb{X} genau dann arithmetisch Gorenstein, wenn ω_R ein graduiert-freier R -Modul vom Rang eins ist (vgl. z.B. [GW], 2.1.3). \square

5.14. Beispiel. Sei $\mathbb{X} = H_1 \cap \cdots \cap H_d \subseteq \mathbb{P}^d$ der vollständige Durchschnitt der Hyperebenen $H_i = \mathcal{Z}(F_i)$ mit $F_i \in A_{\nu_i}$ und $\nu_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, d$. Dann ist der homogene Koordinatenring $R = A/(F_1, \dots, F_d)$ von \mathbb{X} ein vollständiger Durchschnitt, also insbesondere ein Gorenstein-Ring. Daher ist jeder vollständige Durchschnitt ein Cayley-Bacharach Schema. Wegen der Formel $\sigma_{\mathbb{X}} = \nu_1 + \cdots + \nu_d - d - 1$ (vgl. z.B. [GW], 2.2.8 und 2.2.10) hat \mathbb{X} also die Cayley-Bacharach Eigenschaft vom Grad $\nu_1 + \cdots + \nu_d - d - 1$. Dies ist die d -dimensionale Version der Satzes von Cayley-Bacharach (vgl. 5.1).

Auch wenn wir von einem 0-dimensionalen Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ausgehen, das nicht notwendig lokal Gorenstein ist, können wir die Eigenschaft, ein Cayley-Bacharach Schema zu sein, mit Hilfe der Struktur des kanonischen Moduls ω_R charakterisieren.

5.15. Satz. *Für ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

- a) \mathbb{X} ist ein Cayley-Bacharach Schema.
- b) Die Multiplikationsabbildung $R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \otimes_K (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} \longrightarrow (\omega_R)_1$ ist nicht ausgeartet.
- c) Für alle $i, j \geq 0$ ist die Multiplikation $R_i \otimes_K (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+j} \longrightarrow (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+i+j}$ nicht ausgeartet.
- d) Die Multiplikationsabbildung $R_{\sigma_{\mathbb{X}}} \otimes_K (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} \longrightarrow (\omega_R)_0$ ist nicht ausgeartet.

Beweis: Sind $i, j \geq 0$, und ist $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+i}$ mit $R_j \cdot \varphi = (0)$, so folgt aus $x_0^j \cdot \varphi = 0$ und Satz 2.3.c schon $\varphi = 0$. Die betrachteten Multiplikationsabbildungen sind also alle nicht ausgeartet im zweiten Argument.

Zuerst zeigen wir, daß jedes Cayley-Bacharach Schema die Bedingung b) erfüllt. Angenommen, wir haben ein Element $r \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \setminus \{0\}$ mit $r \cdot (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} = 0$. Dann gibt es ein Vielfaches von r der Form $x_0^i \cdot f_{\mathbb{Y}}$ mit einem Separator $f_{\mathbb{Y}} \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ eines Unterschemas $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$, und aus Satz 2.3.c folgt $f_{\mathbb{Y}} \cdot (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} = 0$. Nach Satz 5.6.c gilt $Lf_{\mathbb{Y}} \in \overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \setminus \{0\}$. Wähle einen zu $K \cdot Lf_{\mathbb{Y}}$ in $\overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ komplementären K -Untervektorraum $V \subseteq \overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ und betrachte die Projektion $\pi : \overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \rightarrow K$ längs V auf $Lf_{\mathbb{Y}}$. Sie liftet zu einer K -linearen Abbildung $\varphi : R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \rightarrow K$ mit $\varphi(x_0 R_{\sigma_{\mathbb{X}}}) = 0$ und $\varphi(f_{\mathbb{Y}}) \neq 0$, und diese ergibt nach Lemma 2.6 und Lemma 2.7.a ein Element $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}}$ mit $f_{\mathbb{Y}} \cdot \varphi \neq 0$. Dies widerspricht der Annahme.

Um Bedingung c) aus b) zu folgern, nehmen wir an, wir haben Zahlen $i, j \geq 0$ und ein homogenes Element $r \in R_i$ mit $r \cdot (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+j} = 0$. Insbesondere gilt dann $r \cdot x_0^j \cdot (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} = 0$, also auch $r \cdot (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} = 0$. Ist $i \leq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$, so folgt aus $r \cdot x_0^{\sigma_{\mathbb{X}}+1-i} \cdot (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} = 0$ nach b) die Behauptung $r = 0$, und ist $i > \sigma_{\mathbb{X}} + 1$, so schreiben wir $r = x_0^{i-\sigma_{\mathbb{X}}-1} \cdot r'$ mit $r' \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ und folgern aus $x_0^{i-\sigma_{\mathbb{X}}-1} \cdot r' \cdot (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} = 0$ und b) die Behauptung.

Da Bedingung d) ein Spezialfall von c) ist, bleibt noch zu zeigen, daß sie Bedingung a) impliziert. Angenommen, \mathbb{X} wäre kein Cayley-Bacharach Schema, d.h. nach Satz 5.6 es gäbe ein Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$ und einem Separator $f_{\mathbb{Y}} \in x_0 R_{\sigma_{\mathbb{X}}} \setminus \{0\}$. Für jedes $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}}$ gilt dann $\varphi(f_{\mathbb{Y}}) \in x_0 \cdot \varphi(R_{\sigma_{\mathbb{X}}}) = (0)$, also $f_{\mathbb{Y}} \cdot \varphi = 0$ nach Lemma 2.7.a. Schreibt man $f_{\mathbb{Y}} = x_0 \cdot g$ mit $g \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}} \setminus \{0\}$, so ist $g \cdot (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} = 0$ nun ein Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Im reduzierten Fall besagt dies nach Satz 3.9, daß \mathbb{X} genau dann ein Cayley-Bacharach Schema ist, wenn die Multiplikationsabbildung $R_{\sigma} \otimes_K \mathfrak{I}_{\sigma+1} \rightarrow \mathfrak{I}_{2\sigma+1}$ nicht ausgeartet ist. Hier sehen wir bereits einen ersten Hinweis, warum es nützlich war, in Lemma 1.11.b, Korollar 3.10, Korollar 3.11 und Korollar 3.12 explizite Basen der beteiligten Vektorräume sowie die Matrix dieser Multiplikationsabbildung auszuarbeiten. Auch Satz 5.15 liefert Abschätzungen für die Hilbert-Funktion eines Cayley-Bacharach Schemas, jedoch weit schwächere als diejenigen von Korollar 5.9.

5.16. Korollar. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein Cayley-Bacharach Schema. Dann gilt für alle $i \geq 0$ die Ungleichung*

$$H_{\mathbb{X}}(i) \leq \Delta_{\mathbb{X}} \cdot (\deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - i)).$$

Beweis: Da für jedes $i \geq 0$ die Multiplikationsabbildung $R_i \otimes_K (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} \rightarrow (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+i}$ nicht ausgeartet ist, haben wir Injektionen $R_i \hookrightarrow \text{Hom}_K((\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}}, (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+i})$ und brauchen nur noch die Dimensionen zu vergleichen. \square

Der nächste Teil dieses Abschnitts ist der Frage gewidmet, welche Unterschemata von Cayley-Bacharach Schemata selbst Cayley-Bacharach Schemata sind. Unser folgender Satz zeigt insbesondere die bekannte Tatsache, daß man durch Entfernen eines

Punktes aus einem reduzierten 0-dimensionalen vollständigen Durchschnitt eine Punktmenge erhält, die immer noch ein Cayley-Bacharach Schema ist.

5.17. Satz. *Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein Cayley-Bacharach Schema mit $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$, und ist $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ ein Unterschema vom Grad $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$, so ist \mathbb{Y} wieder ein Cayley-Bacharach Schema.*

Insbesondere ist jedes Unterschema vom Grad $\deg \mathbb{X} - 1$ eines arithmetischen Gorenstein-Schemas \mathbb{X} wieder ein Cayley-Bacharach Schema.

Beweis: Sei $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ ein Unterschema vom Grad $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$, sei $f_{\mathbb{Y}} \in R_{\sigma_{\mathbb{X}+1}}$ ein Separator von \mathbb{Y} , und sei $R_{\mathbb{Y}} = R/(f_{\mathbb{Y}})$ der homogene Koordinatenring von \mathbb{Y} (vgl. Lemma 1.7). Dann gilt $\sigma_{\mathbb{Y}} = \sigma_{\mathbb{X}} - 1$ und $(R_{\mathbb{Y}})_{\sigma_{\mathbb{Y}}} \cong R_{\sigma_{\mathbb{X}}-1}$. Sei $r \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}-1}$ ein Element mit $r \cdot (\omega_{R_{\mathbb{Y}}})_{-\sigma_{\mathbb{Y}}} = 0$. Hierbei identifizieren wir $\omega_{R_{\mathbb{Y}}}$ mit $\{\varphi \in \omega_R \mid f_{\mathbb{Y}} \cdot \varphi = 0\}$ gemäß Satz 2.4.a. Nach Satz 5.15 genügt es zu zeigen, daß $r = 0$ sein muß. Dazu können wir voraussetzen, daß \mathbb{X} in keiner Hyperebene von \mathbb{P}^d enthalten ist.

Wegen Korollar 5.11 ist \mathbb{X} lokal Gorenstein. Daher zeigt Satz 5.8, daß es ein Element $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}}$ gibt mit $\text{Ann}_R(\varphi) = 0$. Dann enthält $(\omega_{R_{\mathbb{Y}}})_{-\sigma_{\mathbb{X}+1}}$ alle Elemente der Form $\ell \cdot \varphi$ mit $\ell \in R_1$ und $f_{\mathbb{Y}} \cdot \ell \cdot \varphi = 0$. Wegen $\text{Ann}_R(\varphi) = (0)$ bedeutet dies $\ell r = 0$ für alle Elemente $\ell \in R_1$ mit $f_{\mathbb{Y}} \cdot \ell = 0$.

Nun verwenden wir den Isomorphismus $\iota : R_{\sigma_{\mathbb{X}+1}} \rightarrow \prod_{i=1}^s \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i}$ aus dem ersten Abschnitt und schreiben $\iota(x_0^2 r) = (r_1, \dots, r_s)$, $\iota(x_0^{\sigma_{\mathbb{X}}} \cdot \ell) = (\ell_1, \dots, \ell_s)$ sowie $\iota(f_{\mathbb{Y}}) = (0, \dots, 0, s_i, 0, \dots, 0)$ mit $r_j, \ell_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_j}$ und $s_i \in \mathfrak{S}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i})$. Enthält die Hyperebene $\mathcal{Z}(\ell)$ für ein $\ell \in R_1 = A_1$ den Punkt P_i , so gilt $f_{\mathbb{Y}} \cdot \ell = \iota^{-1}((0, \dots, 0, \ell_i s_i, 0, \dots, 0)) = 0$, also $\ell r = 0$ und $\ell_i r_i = 0$. Da die diese Hyperebenen definierenden Elemente ℓ das maximale Ideal $\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^d, P_i}$ von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d, P_i}$ erzeugen, gilt $r_i \in \mathfrak{S}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_i})$, und da \mathbb{X} lokal Gorenstein ist, gibt es ein $\lambda \in K$ mit $r_i = \lambda s_i$. Andererseits kann man $\ell \in R_1$ so wählen, daß $P_i \in \mathcal{Z}(\ell)$ gilt sowie $P_j \notin \mathcal{Z}(\ell)$ für $j \neq i$. Dann ist ℓ_j eine Einheit von $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_j}$ für $j \neq i$ und $\ell \cdot f_{\mathbb{Y}} = 0$ liefert $\ell r = 0$ sowie $r_j = 0$. Insgesamt ergibt sich also, daß $x_0^2 \cdot r = \lambda f_{\mathbb{Y}}$ ist, was wegen $f_{\mathbb{Y}} \notin x_0 R_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ nur für $r = 0$ der Fall sein kann. \square

Im reduzierten Fall können wir auch für Unterschemata $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ kleinerer Grade $\deg \mathbb{X} - \Delta_{\mathbb{X}} \leq \deg \mathbb{Y} \leq \deg \mathbb{X}$ Aussagen darüber machen, wann \mathbb{Y} wieder ein Cayley-Bacharach Schema ist. Für die Beweise der nachstehenden Resultate verweisen wir auf [K1], §2.

5.18. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Schema, sei $1 \leq r \leq \Delta_{\mathbb{X}}$, und sei $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \setminus \{P_1, \dots, P_r\}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

- Die Leitformen $\{Lf_1, \dots, Lf_r\}$ sind K -linear unabhängig in $\overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}+1}}$.*
- Es gilt $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} = (f_1, \dots, f_r)$.*
- Für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt $H_{\mathbb{Y}}(i) = \min\{H_{\mathbb{X}}(i), s - r\}$.*

Außerdem kann man die Punkte von \mathbb{X} so umnumerieren, daß die Bedingungen a), b) und c) erfüllt sind.

5.19. Korollar. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema mit $\Delta_{\mathbb{X}} \geq 2$, sei $1 \leq r < \Delta_{\mathbb{X}}$, und sei $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \setminus \{P_1, \dots, P_r\}$. Dann sind die folgenden Bedingungen*

äquivalent.

a) \mathbb{Y} ist ein Cayley-Bacharach Schema mit $H_{\mathbb{Y}}(i) = \min\{H_{\mathbb{X}}(i), s - r\}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

b) Für alle $i \in \{r + 1, \dots, s\}$ sind die Leitformen $\{Lf_1, \dots, Lf_r, Lf_i\}$ in $\overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ K -linear unabhängig.

5.20. Korollar. Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes, 0-dimensionales Cayley-Bacharach Schema, und numeriert man die Punkte von \mathbb{X} so, daß $\{Lf_1, \dots, Lf_{\Delta_{\mathbb{X}}}\}$ eine K -Basis von $\overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ darstellt (vgl. §1), so ist $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \setminus \{P_1, \dots, P_{\Delta_{\mathbb{X}}}\}$ ebenfalls ein Cayley-Bacharach Schema.

Zum Schluß dieses Abschnitts geben wir noch eine Klasse von Beispielen für Cayley-Bacharach Schemata an (vgl. [K8], 3.6). Genauer zeigen wir, daß 0-dimensionale Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$, deren homogenes Verschwindungsideal $I_{\mathbb{X}}$ von den 2×2 -Minoren einer homogenen $2 \times (d+1)$ -Matrix erzeugt wird, lokal Gorenstein und Cayley-Bacharach Schemata sind. Das folgende Lemma kann man leicht mit vollständiger Induktion beweisen. Es stellt nur eine Umformulierung der bekannten Tatsache dar, daß der Relationenmodul einer schwach regulären Folge von den Koszulrelationen erzeugt wird (vgl. [E], 19.3).

5.21. Lemma. Sei \mathcal{A} ein Ring, sei $r \geq 1$, und sei $\{F_1, \dots, F_r\}$ eine schwach reguläre Folge in \mathcal{A} , d.h. für $i = 1, \dots, r$ seien die Abbildungen $\mu_{F_i} : \mathcal{A}/(F_1, \dots, F_{i-1}) \rightarrow \mathcal{A}/(F_1, \dots, F_{i-1})$ injektiv. Wir schreiben \vec{F}^t für den Zeilenvektor (F_1, \dots, F_r) und \vec{F} für den zugehörigen Spaltenvektor.

a) Ist $\vec{G} \in \mathcal{A}^r$ mit $\vec{G}^t \cdot \vec{F} = 0$, so gibt es eine antisymmetrische Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \text{Mat}_r(\mathcal{A})$ (d.h. $a_{ii} = 0$ für $1 \leq i \leq r$ und $a_{ij} = -a_{ji}$ für $1 \leq i < j \leq r$) mit $\vec{G} = \mathfrak{A} \cdot \vec{F}$.

b) Ist $\mathfrak{A} \in \text{Mat}_r(\mathcal{A})$ eine antisymmetrische Matrix und $\vec{G} \in \mathcal{A}^r$, so gilt $\vec{G}^t \cdot \mathfrak{A} \cdot \vec{G} = 0$.

5.22. Satz. Seien $a_0, \dots, a_d, b \geq 0$, und seien $F_i \in A_{a_i}$ sowie $G_i \in A_{a_i+b}$ für $i = 0, \dots, d$. Angenommen, die Folge $\{F_0, \dots, F_d\}$ ist eine reguläre Folge in A und das Ideal, das erzeugt wird von den 2×2 -Minoren der Matrix

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} F_0 & \cdots & F_d \\ G_0 & \cdots & G_d \end{pmatrix}$$

definiert ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$. Dann ist \mathbb{X} lokal Gorenstein und ein Cayley-Bacharach Schema.

Beweis: Wegen $\dim \mathbb{X} = 0$ hat das Ideal $(F_i G_j - G_i F_j)_{0 \leq i < j \leq d} \subseteq A$ die Höhe d . Nach [BV], 2.7 ist es damit saturiert und stimmt mit $I_{\mathbb{X}}$ überein. Da $\{F_0, \dots, F_d\}$ eine reguläre Folge bildet, gilt $a_i > 0$ für $i = 0, \dots, d$. Die minimale freie Auflösung des A -Moduls $R = A/I_{\mathbb{X}}$ ist gegeben durch die Eagon-Northcott Auflösung (vgl. [BV], 2.16)

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow (\Lambda^0 M \otimes \text{Sym}_{d-1}(N))^\vee &\xrightarrow{\partial^\vee} (\Lambda^1 M \otimes \text{Sym}_{d-2}(N))^\vee \xrightarrow{\partial^\vee} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\partial^\vee} (\Lambda^{d-1} M \otimes \text{Sym}_0(N))^\vee &\xrightarrow{\nu_0} \Lambda^0 M \otimes \text{Sym}_0(N) \longrightarrow R \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

wobei \mathfrak{M} eine homogene A -lineare Abbildung $M = \bigoplus_{i=0}^d A(-a_i) \rightarrow N = A \oplus A(b)$ vom Grad null definiert, und wobei $(-)^\vee$ für $\underline{\text{Hom}}_A(-, A)$ steht.

Man beachte, daß die Abbildungen ∂^\vee homogen vom Grad null sind, während ν_0 homogen vom Grad $-a_0 - \dots - a_d - b$ ist. Indem wir diese Sequenz dualisieren, erhalten wir (bis auf Gradverschiebungen) die minimale graduiert-freie Auflösung des A -Moduls ω_R (vgl. [GW], 2.2.9). Insbesondere ergibt sich eine minimale homogene Präsentation von ω_R der Form

$$\bigoplus_{i=0}^d \bigoplus_{j=0}^{d-2} A(jb - a_i) \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_{j=0}^{d-1} A(jb) \xrightarrow{\Phi} \omega_R(-a_0 - \dots - a_d - b + d + 1) \longrightarrow 0.$$

Seien e_{ij} bzw. ϵ_j die Standardbasiselemente des ersten bzw. zweiten Moduls dieser Sequenz. Die Abbildung Ψ ist gegeben durch $\Psi(e_{ij}) = F_i \epsilon_j + G_i \epsilon_{j+1}$. Ferner setzen wir $\varphi_j = \Phi(\epsilon_j)$ für $j = 0, \dots, d-1$. Aus der Sequenz ersehen wir, daß $\sigma_{\mathbb{X}} = a_0 + \dots + a_d + db - d - 1$ ist und für $j = 0, \dots, d-1$ gilt $\deg \varphi_j = -\sigma_{\mathbb{X}} + (d-1-j)b$.

Nach Satz 5.8 genügt es zu beweisen, daß $\text{Ann}_R(\varphi_{d-1}) = (0)$ ist. Sei $r \in R$ ein homogenes Element mit $r \cdot \varphi_{d-1} = 0$. Schreibe $r = H + I_{\mathbb{X}}$ mit einem homogenen Polynom $H \in A$. Die Bedingung $H \cdot \epsilon_{d-1} \in \ker \Psi$ bedeutet, daß es Polynome $c_{ij} \in A$ gibt mit

$$H \cdot \epsilon_{d-1} = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^{d-2} c_{ij} (F_i \epsilon_j + G_i \epsilon_{j+1}).$$

Hieraus erhalten wir das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} H &= c_{0d-2}G_0 + \dots + c_{dd-2}G_d \\ 0 &= c_{0d-3}G_0 + \dots + c_{dd-3}G_d + c_{0d-2}F_0 + \dots + c_{dd-2}F_d \\ &\vdots \\ 0 &= c_{00}G_0 + \dots + c_{d0}G_d + c_{01}F_0 + \dots + c_{d1}F_d \\ 0 &= c_{00}F_0 + \dots + c_{d0}F_d \end{aligned}$$

Jetzt schreiben wir $\vec{c}_i^t = (c_{0i}, \dots, c_{di})$, $\vec{F}^t = (F_0, \dots, F_d)$ und $\vec{G}^t = (G_0, \dots, G_d)$. Nach Lemma 5.21 folgt aus $\vec{c}_0^t \cdot \vec{F} = 0$, daß es eine antisymmetrische Matrix $\mathfrak{A}_0 \in \text{Mat}_{d+1}(A)$ gibt mit $\vec{c}_0 = \mathfrak{A}_0 \cdot \vec{F}$. Also folgt

$$0 = \vec{G}^t \cdot \vec{c}_0 + \vec{c}_1^t \cdot \vec{F} = (\vec{G}^t \cdot \mathfrak{A}_0 + \vec{c}_1^t) \cdot \vec{F} = (\vec{c}_1 - \mathfrak{A}_0 \cdot \vec{G})^t \cdot \vec{F}$$

und eine nochmalige Anwendung von Lemma 5.21 liefert $\vec{c}_1 - \mathfrak{A}_0 \cdot \vec{G} = \mathfrak{A}_1 \cdot \vec{F}$ mit einer antisymmetrischen Matrix $\mathfrak{A}_1 \in \text{Mat}_{d+1}(A)$. Als nächstes erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{G}^t \cdot \vec{c}_1 + \vec{c}_2^t \cdot \vec{F} = \vec{G}^t \cdot \mathfrak{A}_0 \cdot \vec{G} + \vec{G}^t \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \vec{F} + \vec{c}_2^t \cdot \vec{F} \\ &= (\vec{G}^t \cdot \mathfrak{A}_1 + \vec{c}_2^t) \cdot \vec{F} = (\vec{c}_2 - \mathfrak{A}_1 \cdot \vec{G})^t \cdot \vec{F}, \end{aligned}$$

also $\vec{c}_2 - \mathfrak{A}_1 \cdot \vec{G} = \mathfrak{A}_2 \cdot \vec{F}$ mit einer antisymmetrischen Matrix $\mathfrak{A}_2 \in \text{Mat}_{d+1}(A)$.

Indem wir so fortfahren, erreichen wir schließlich Darstellungen $\vec{c}_{d-2} = \mathfrak{A}_{d-3} \cdot \vec{G} + \mathfrak{A}_{d-2} \cdot \vec{F}$ sowie $H = \vec{G}^t \cdot \vec{c}_{d-2} = \vec{G}^t \cdot \mathfrak{A}_{d-3} \cdot \vec{G} + \vec{G}^t \cdot \mathfrak{A}_{d-2} \cdot \vec{F}$ mit antisymmetrischen Matrizen $\mathfrak{A}_{d-3}, \mathfrak{A}_{d-2} \in \text{Mat}_{d+1}(A)$. Schreiben wir $\mathfrak{A}_{d-2} = (a_{ij})$, so folgt $H = \sum_{0 \leq i < j \leq d} a_{i+1j+1} (G_i F_j - F_i G_j) \in I_{\mathbb{X}}$, also $r = H + I_{\mathbb{X}} = 0$. \square

Ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ heißt *fast vollständiger Durchschnitt*, wenn sein homogenes Verschwindungsideal $I_{\mathbb{X}}$ ein minimales homogenes Erzeugendensystem aus $d+1$ Polynomen besitzt. Für 0-dimensionale Unterschemata von \mathbb{P}^2 bedeutet dies nach dem Satz von Hilbert-Burch, daß das Ideal $I_{\mathbb{X}}$ von den drei 2×2 -Minoren einer 2×3 -Matrix homogener Polynome erzeugt wird.

5.23. Korollar. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ ein 0-dimensionaler fast vollständiger Durchschnitt, dessen homogenes Verschwindungsideal von der Form $I_{\mathbb{X}} = (F_1G_2 - G_1F_2, F_1G_3 - G_1F_3, F_2G_3 - G_2F_3)$ ist mit $F_i \in A_{a_i}$ und $G_i \in A_{a_i+b}$ für $i = 1, 2, 3$, und so daß $\{F_1, F_2, F_3\}$ eine A-reguläre Folge darstellt. Dann ist \mathbb{X} lokal Gorenstein und ein Cayley-Bacharach Schema.*

6. Allgemeine Lage

Eine Motivation für die Untersuchungen in diesem Abschnitt ist der klassische Satz von der allgemeinen Lage für generische Hyperebenschnitte von Kurven. Eine integrale Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ heißt dabei *ausgeartet*, wenn C in einer Hyperebene enthalten ist, und *seltsam*, wenn alle Tangenten an regulären Punkten von C durch einen Punkt in \mathbb{P}^{d+1} gehen. (Letzteres kann nur in positiver Charakteristik vorkommen.)

6.1. Satz. (Satz von der allgemeinen Lage)

Sei $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ eine nicht ausgeartete, nicht seltsame, integrale Kurve, und sei $H \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ eine generisch gewählte Hyperebene. Dann ist $\mathbb{X} = C \cap H \subseteq H \cong \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema vom Grad $\deg \mathbb{X} = \deg C$ mit der Eigenschaft, daß je $d+1$ Punkte von \mathbb{X} den Raum $H \cong \mathbb{P}^d$ aufspannen.

Beweis: Einen Beweis im Fall beliebiger Charakteristik des Grundkörpers findet der Leser z.B. in [R], 1.1. \square

Die Bedingung, daß je $d + 1$ Punkte eines reduzierten 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ den ganzen Raum aufspannen, kann man folgendermaßen auf den nicht notwendig reduzierten Fall verallgemeinern (vgl. [EH]).

6.2. Definition. Wir sagen, ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ befinde sich *in linear allgemeiner Lage*, wenn für jeden echten linearen Teilraum $L \subsetneq \mathbb{P}^d$ gilt

$$\deg(\mathbb{X} \cap L) \leq 1 + \dim L.$$

Als erstes wollen wir diesen Begriff mit Hilfe der Hilbert-Funktionen verschiedener Unterschemata von \mathbb{X} charakterisieren und zeigen, daß er im reduzierten Fall mit der Bedingung aus Satz 6.1 übereinstimmt. Die Ausführungen in diesem Abschnitt basieren auf [K2], §4.

6.3. Satz. Für ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) \mathbb{X} ist in linear allgemeiner Lage.
- b) Ist $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ ein Unterschema vom Grad $\deg \mathbb{Y} \leq d + 1$, so gilt $H_{\mathbb{Y}}(1) = \deg \mathbb{Y}$.
- c) Ist $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ ein Unterschema vom Grad $\deg \mathbb{Y} \leq d + 1$, so gilt $\sigma_{\mathbb{Y}} \leq \sigma_{\mathbb{X}}$.

Im Fall $\deg \mathbb{X} \geq d + 1$ sind die Bedingungen a) – c) auch äquivalent damit, daß für jedes Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y} = d + 1$ gilt $H_{\mathbb{Y}}(1) = d + 1$, und im Fall $\deg \mathbb{X} \leq d$ bedeuten sie einfach $H_{\mathbb{X}}(1) = \deg \mathbb{X}$.

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß Bedingung b) aus a) folgt. Dazu sei $\langle \mathbb{X} \rangle$ der kleinste lineare Teilraum von \mathbb{P}^d , der \mathbb{X} enthält. Nach Lemma 1.3.b gilt $\dim \langle \mathbb{X} \rangle = H_{\mathbb{X}}(1) - 1$. Im Fall $\dim \langle \mathbb{X} \rangle < d$ können wir in Definition 6.2 $L = \langle \mathbb{X} \rangle$ verwenden und erhalten $\deg \mathbb{X} \leq H_{\mathbb{X}}(1)$, also die Behauptung. Im Fall $\dim \langle \mathbb{X} \rangle = d$ gilt $H_{\mathbb{X}}(1) = d + 1 \leq \deg \mathbb{X}$. In diesem Fall wählen wir ein Unterschema $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{X}$ mit $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{Y}'$ und $\deg \mathbb{Y}' = d + 1$. Wegen $\sigma_{\mathbb{Y}} \leq \sigma_{\mathbb{Y}'}$ (vgl. Satz 2.4.b) genügt es, $H_{\mathbb{Y}'}(1) = d + 1$ zu beweisen. Angenommen,

es gibt eine Hyperebene $L \subsetneq \mathbb{P}^d$ mit $\mathbb{Y}' \subseteq L$. Dann gilt $\mathbb{Y}' \subseteq L \cap \mathbb{X}$, und $d+1 = \deg \mathbb{Y}' \leq \deg(L \cap \mathbb{X}) \leq 1 + \dim L = d$ stellt einen Widerspruch dar.

Da die Bedingungen b) und c) offensichtlich äquivalent sind, zeigen wir jetzt, daß Bedingung a) aus c) folgt. Im Fall $\deg \mathbb{X} \leq d$ gilt $\sigma_{L \cap \mathbb{X}} \leq \sigma_{\mathbb{X}} \leq 0$ für jeden echten linearen Teilraum $L \subsetneq \mathbb{P}^d$, also $\deg(L \cap \mathbb{X}) = H_{L \cap \mathbb{X}}(1) \leq H_L(1) = 1 + \dim L$. Es bleibt noch der Fall $\deg \mathbb{X} \geq d+1$. Sei $L \subsetneq \mathbb{P}^d$ ein echter linearer Teilraum, und sei $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \cap L$. Wäre $\deg \mathbb{Y} \geq d+1$, so gäbe es ein Unterschema $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{Y}$ mit $\deg \mathbb{Y}' = d+1$ und $H_{\mathbb{Y}'}(1) = d+1$, was aber $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{Y} \subseteq L$ widerspräche. Also muß $\deg \mathbb{Y} \leq d$ sein, und wir erhalten

$$\deg(L \cap \mathbb{X}) = \deg \mathbb{Y} = H_{\mathbb{Y}}(1) \leq H_L(1) = 1 + \dim L.$$

Von den beiden Zusatzbehauptungen stellt man leicht fest, daß sie jeweils zu Bedingung b) äquivalent sind. \square

6.4. Beispiel. Besteht ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ aus s generisch gewählten Punkten, so befindet sich \mathbb{X} in linear allgemeiner Lage, denn jede Teilmenge $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ aus $d+1$ Punkten hat die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{Y}} : 1 \ d+1 \ d+1 \ \dots$.

6.5. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \neq 2$. Das reduzierte 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_6\} \subseteq \mathbb{P}^3$ mit $P_1 = (1:1:0:0)$, $P_2 = (1:0:1:0)$, $P_3 = (1:-1:0:0)$, $P_4 = (1:0:-1:0)$, $P_5 = (1:0:0:1)$ und $P_6 = (1:0:0:-1)$ aus Beispiel 3.18 befindet sich nicht in linear allgemeiner Lage, denn z.B. die vier Punkte $\mathbb{Y} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ liegen auf der Hyperebene $\mathcal{Z}(X_3)$ und erfüllen $H_{\mathbb{Y}}(1) = 3 < \deg \mathbb{Y}$.

Ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ heißt *nicht ausgeartet*, wenn \mathbb{X} in keiner Hyperebene enthalten ist. Befindet sich \mathbb{X} in linear allgemeiner Lage, und ist $\deg \mathbb{X} \geq d+1$, so ist \mathbb{X} automatisch nicht ausgeartet. Umgekehrt erfüllt jedes nicht ausgeartete 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ die Bedingung $\deg \mathbb{X} \geq d+1$.

Für nicht ausgeartete 0-dimensionale Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ können wir die Bedingung, sich in linear allgemeiner Lage zu befinden, mit Hilfe der Modulstruktur des kanonischen Moduls ω_R charakterisieren. Sind U, V, W drei endlich-dimensionale K -Vektorräume, so nennen wir eine K -lineare Abbildung $\Phi : U \otimes_K V \rightarrow W$ *biinjektiv* (oder *1-generisch*), wenn für $u \in U$ und $v \in V$ aus $\Phi(u \otimes v) = 0$ schon folgt, daß $u = 0$ oder $v = 0$ ist.

6.6. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein nicht ausgeartetes 0-dimensionales Unterschema. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) \mathbb{X} ist in linear allgemeiner Lage.
- b) Die Multiplikationsabbildung $R_1 \otimes_K (\omega_R)_{-1} \rightarrow (\omega_R)_0$ ist biinjektiv.
- c) Für jedes $i \in \{1, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}\}$ ist die Abbildung $R_1 \otimes_K (\omega_R)_{-i} \rightarrow (\omega_R)_{-i+1}$ biinjektiv.

Beweis: Sei \mathbb{X} in linear allgemeiner Lage, und seien $\ell \in R_1 \setminus \{0\}$ sowie $\varphi \in (\omega_R)_{-1}$ mit $\ell \cdot \varphi = 0$. Nach Definition 6.2 gilt $\deg(\mathbb{X} \cap \mathcal{Z}(\ell)) \leq d$. Also gibt es ein Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = d+1$ und $\mathbb{X} \cap \mathcal{Z}(\ell) \subseteq \mathbb{Y}$. Dann folgt $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \subseteq (\ell)^{\text{sat}}$, und nach Lemma 1.6.b gibt es für jedes homogene Element $r \in I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ ein $i \geq 0$ mit $x_0^i \cdot r \in (\ell)$. Insbesondere folgt $x_0^i \cdot r \cdot \varphi = 0$, also $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \cdot \varphi = (0)$. Nach Satz 2.4.a erhalten wir

$\varphi \in (\omega_{R_Y})_{-1}$, was aber wegen $\sigma_Y = 0$ (vgl. Satz 6.3.c) nur für $\varphi = 0$ möglich ist. Also ist Bedingung b) eine Konsequenz von a).

Da die Bedingungen b) und c) wegen $(\omega_R)_{-i} \cong x_0^{i-1} \cdot (\omega_R)_{-i} \subseteq (\omega_R)_{-1}$ äquivalent sind, brauchen wir nur noch den Schluß von b) auf a) zu beweisen. Befindet sich \mathbb{X} nicht in allgemeiner Lage, so gibt es nach Satz 6.3 ein Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = d + 1$ und $H_{\mathbb{Y}}(1) \leq d$. Dann existiert ein Element $\ell \in (I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_1 \setminus \{0\}$ und wegen $\dim_K(\omega_{R_Y})_{-1} = \deg \mathbb{Y} - H_{\mathbb{Y}}(1) \geq 1$ auch ein Element $\varphi \in (\omega_{R_Y})_{-1} \setminus \{0\}$. Nun liefert $\ell \cdot \varphi \in I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \cdot \varphi = (0)$ einen Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Auch dieser Satz hat als Anwendung eine Reihe von Ungleichungen, die das Wachstum der Hilbert-Funktion eines 0-dimensionalen Schemas in linear allgemeiner Lage kontrollieren. In [EH], 3.2 wurden diese Ungleichungen auf eine andere Art bewiesen. Hier verwenden wir das Lemma über biinjektive Abbildungen, für das man z.B. in [Go], S. 86 einen einfachen Beweis finden kann.

6.7. Lemma (*Lemma über biinjektive Abbildungen*)

Sind U, V, W drei endlich-dimensionale K -Vektorräume, und ist $\Phi : U \otimes_K V \rightarrow W$ eine K -lineare, biinjektive Abbildung, so gilt

$$\dim_K(W) \geq \dim_K(U) + \dim_K(V) - 1.$$

6.8. Korollar. *Befindet sich ein nicht ausgeartetes 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ in linear allgemeiner Lage, so gilt*

$$\Delta H_{\mathbb{X}}(i) = H_{\mathbb{X}}(i) - H_{\mathbb{X}}(i-1) \geq d$$

für alle $i \in \{1, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}\}$. Insbesondere gilt $H_{\mathbb{X}}(i) \geq \min\{1 + id, \deg \mathbb{X}\}$ für alle $i \geq 0$.

Beweis: Wendet man für $i \in \{1, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}\}$ das Lemma über biinjektive Abbildungen auf die Multiplikationsabbildung $R_1 \otimes_K (\omega_R)_{-i} \rightarrow (\omega_R)_{-i+1}$ an, so folgt $\dim_K(\omega_R)_{-i+1} = \deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(i-1) \geq \dim_K(R_1) + \dim_K(\omega_R)_{-i} - 1 = d + \deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(i)$. Die zweite Behauptung ergibt sich durch Aufsummieren aus der ersten. \square

Im Falle eines nicht ausgearteten 0-dimensionalen Schemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ kann man die Charakterisierung des Begriffs “lineare allgemeine Lage” in Satz 6.3 auch so formulieren, daß verlangt wird, daß die Hilbert-Funktion jedes Unterschemas $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y} \leq d + 1 = H_{\mathbb{P}^d}(1)$ so lange wie möglich mit der Hilbert-Funktion von \mathbb{P}^d übereinstimmt. Diese Formulierung weist den Weg, wie man auch eine “allgemeine Lage höherer Ordnung” definieren kann.

6.9. Definition. Sei $i \geq 1$. Wir sagen, ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ befinde sich *in allgemeiner Lage i -ter Ordnung*, wenn für jedes Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y} \leq H_{\mathbb{P}^d}(i)$ und für jedes $j \in \mathbb{Z}$ gilt $H_{\mathbb{Y}}(j) = \min\{H_{\mathbb{P}^d}(j), \deg \mathbb{Y}\}$.

Nach Satz 6.3 ist \mathbb{X} genau dann in linear allgemeiner Lage, wenn sich \mathbb{X} in allgemeiner Lage erster Ordnung befindet. Die Bedingung, daß \mathbb{X} in allgemeiner Lage

$(\sigma_{\mathbb{X}}+1)$ -ter Ordnung ist, erweist sich als äquivalent damit, daß die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} gegeben ist durch $H_{\mathbb{X}}(j) = \min\{H_{\mathbb{P}^d}(j), \deg \mathbb{X}\}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$, und \mathbb{X} erfüllt die im nächsten Abschnitt studierte Bedingung der uniformen Lage. In [CJ], 3.3 wurde kürzlich auch gezeigt, daß diese Bedingungen äquivalent sind mit der Bedingung, daß sich \mathbb{X} in allgemeiner Lage $\sigma_{\mathbb{X}}$ -ter Ordnung befindet. Der Begriff der allgemeinen Lage i -ter Ordnung ist also genau für die Ordnungen $i \in \{1, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}\}$ nicht trivial. Unser nächster Satz charakterisiert ihn wieder mit Hilfe der Modulstruktur von ω_R .

6.10. Satz. *Sei $i \geq 0$, und sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema mit $\alpha_{\mathbb{X}} \geq i+1$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

- a) \mathbb{X} ist in allgemeiner Lage i -ter Ordnung.
- b) Für alle $j \in \{1, \dots, i\}$ ist die Multiplikationsabbildung $R_j \otimes_K (\omega_R)_{-j} \rightarrow (\omega_R)_0$ bijektiv.
- c) Für alle $j \in \{1, \dots, i\}$ und alle $k \in \{0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}-j\}$ ist die Multiplikationsabbildung $R_j \otimes_K (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+k} \rightarrow (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+j+k}$ bijektiv.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt mit vollständiger Induktion und Satz 6.6 (vgl. [K2], 4.4). Wendet man Lemma 6.7 auf c) an, so erhält man wieder Ungleichungen für die Hilbert-Funktionen von 0-dimensionalen Schemata in allgemeiner Lage i -ter Ordnung.

6.11. Korollar. *Sei $i \geq 0$, und sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema mit $\alpha_{\mathbb{X}} \geq i+1$. Dann ist für jedes $j \in \{1, \dots, i\}$ die Summe von j aufeinanderfolgenden Elementen der Folge $\{\Delta H_{\mathbb{X}}(1), \dots, \Delta H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}})\}$ mindestens gleich $\binom{j+d}{d} - 1$.*

6.12. Beispiel. Sei $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K) > 7$. Wir betrachten das reduzierte 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_{11}\} \subseteq \mathbb{P}^2$ mit $P_1 = (1:2:1)$, $P_2 = (1:1:2)$, $P_3 = (1:2:-1)$, $P_4 = (1:1:-2)$, $P_5 = (1:-2:1)$, $P_6 = (1:-2:-1)$, $P_7 = (1:3:2)$, $P_8 = (1:3:3)$, $P_9 = (1:4:0)$, $P_{10} = (1:5:0)$ und $P_{11} = (1:0:6)$. Dann gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 11 \ 11 \ \dots$ und $\alpha_{\mathbb{X}} = 4$. Da keine drei Punkte von \mathbb{X} auf einer Geraden liegen, befindet sich \mathbb{X} in linear allgemeiner Lage. Jedoch ist \mathbb{X} nicht in allgemeiner Lage zweiter Ordnung, denn die sechs Punkte $\mathbb{Y} = \{P_1, \dots, P_6\}$ von \mathbb{X} liegen auf einem Kreis und haben die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{Y}} : 1 \ 3 \ 5 \ 6 \ 6 \ \dots$.

6.13. Beispiel. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ ein 0-dimensionales Unterschema vom Grad $\deg \mathbb{X} \geq 10$. Hat \mathbb{X} die Eigenschaft, daß kein Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y} = 10$ in einer Quadrikenfläche enthalten ist, so kann nicht $\Delta H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}}-1) = 4$ und $\Delta H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}}) \leq 4$ gelten. Dies folgt aus Korollar 6.11, denn \mathbb{X} befindet sich in allgemeiner Lage zweiter Ordnung und

$$\Delta H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}}-1) + \Delta H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}}) \leq 8 < 9 = \binom{5}{3} - 1.$$

Schließlich erklären wir noch den Zusammenhang des Begriffs der allgemeinen Lage i -ter Ordnung mit dem klassischen Begriff “ \mathbb{X} stellt unabhängige Bedingungen and das lineare System der Hyperflächen vom Grad i ”. Wir verallgemeinern dazu die Definition aus [EK], S. 157 auf den nicht notwendig reduzierten Fall.

6.14. Definition. Sei $i \geq 1$. Ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ stellt unabhängige Bedingungen an das lineare System der Hyperflächen vom Grad i , wenn aus $\deg \mathbb{X} \leq H_{\mathbb{P}^d}(i)$ folgt, daß $H_{\mathbb{X}}(i) = \deg \mathbb{X}$ gilt, und wenn aus $\deg \mathbb{X} > H_{\mathbb{P}^d}(i)$ für alle Unterschemata $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y} = H_{\mathbb{P}^d}(i)$ folgt, daß $H_{\mathbb{Y}}(i) = H_{\mathbb{P}^d}(i)$ ist.

Nun erhalten wir eine einfache Beziehung zwischen den Definitionen 6.9 und 6.14.

6.15. Satz. Sei $i \geq 0$, und sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

a) \mathbb{X} ist in allgemeiner Lage i -ter Ordnung.

b) Für jedes $j \in \{1, \dots, i\}$ stellt \mathbb{X} unabhängige Bedingungen an das lineare System der Hyperflächen vom Grad j .

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß Bedingung b) aus a) folgt. Sei $j \in \{1, \dots, i\}$. Im Fall $\deg \mathbb{X} \leq H_{\mathbb{P}^d}(j)$ wählen wir $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ in Definition 6.9 und erhalten $H_{\mathbb{X}}(k) = \min\{H_{\mathbb{P}^d}(k), \deg \mathbb{X}\}$ für alle $k \geq 0$, also insbesondere $H_{\mathbb{X}}(j) = \deg \mathbb{X}$. Im Fall $\deg \mathbb{X} > H_{\mathbb{P}^d}(j)$ wählen wir ein Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y} = H_{\mathbb{P}^d}(j)$ und erhalten aus Definition 6.9 die gesuchte Beziehung $H_{\mathbb{Y}}(j) = \min\{H_{\mathbb{P}^d}(j), \deg \mathbb{Y}\} = H_{\mathbb{P}^d}(j)$. In beiden Fällen stellt \mathbb{X} also unabhängige Bedingungen an das lineare System der Hyperflächen vom Grad j .

Sei nun umgekehrt die Bedingung b) vorausgesetzt, und sei $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ ein Unterschema vom Grad $\deg \mathbb{Y} \leq H_{\mathbb{P}^d}(i)$, wobei wir o.E. den trivialen Fall $\deg \mathbb{Y} = 1$ ausschließen. Dann gibt es ein $j \in \{1, \dots, i\}$ mit $H_{\mathbb{P}^d}(j-1) < \deg \mathbb{Y} \leq H_{\mathbb{P}^d}(j)$. Wir wählen Unterschemata $\mathbb{Y}', \mathbb{Y}'' \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y}' = H_{\mathbb{P}^d}(j-1)$, mit $\deg \mathbb{Y}'' = H_{\mathbb{P}^d}(j)$ und mit $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{Y}'' \subseteq \mathbb{X}$. Da \mathbb{X} unabhängige Bedingungen an das lineare System der Hyperflächen vom Grad j stellt, gilt $H_{\mathbb{Y}''}(j) = H_{\mathbb{P}^d}(j) = \deg \mathbb{Y}''$, woraus sich $\sigma_{\mathbb{Y}} \leq \sigma_{\mathbb{Y}''} = j-1$ und $H_{\mathbb{Y}}(k) = \deg \mathbb{Y} = \min\{H_{\mathbb{P}^d}(k), \deg \mathbb{Y}\}$ für $k \geq j$ ergibt. Da \mathbb{X} unabhängige Bedingungen an das lineare System der Hyperflächen vom Grad $j-1$ stellt, gilt $H_{\mathbb{Y}'}(j-1) = H_{\mathbb{P}^d}(j-1)$. Dies liefert $H_{\mathbb{Y}}(j-1) = H_{\mathbb{P}^d}(j-1)$, und somit $H_{\mathbb{Y}}(k) = \min\{H_{\mathbb{P}^d}(k), \deg \mathbb{Y}\}$ für $0 \leq k \leq j-1$.

Insgesamt haben wir gezeigt, daß für alle $k \geq 0$ gilt $H_{\mathbb{Y}}(k) = \min\{H_{\mathbb{P}^d}(k), \deg \mathbb{Y}\}$. Da \mathbb{Y} beliebig war, heißt dies, daß sich \mathbb{X} in allgemeiner Lage i -ter Ordnung befindet. \square

7. Uniforme Lage

In diesem Abschnitt, der sich hauptsächlich auf [K2], §3 stützt, diskutieren wir das Konzept 0-dimensionaler Schemata in uniformer Lage und seine Verallgemeinerungen. Dieses Konzept basierte ursprünglich auf dem Satz von der uniformen Lage, den J. Harris 1980 bewies (vgl. [Ha], S. 197).

7.1. Satz. (Satz von der uniformen Lage)

Sei $\text{char}(K) = 0$, sei $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ eine integrale Kurve, und sei $H \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ eine generisch gewählte Hyperebene. Dann ist $\mathbb{X} = C \cap H \subseteq H \cong \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Schema mit der Eigenschaft, daß je zwei Unterschemata $\mathbb{Y}, \mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{Y}'$ dieselbe Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{Y}} = H_{\mathbb{Y}'}$ haben.

Einen Beweis dieses Satzes in der angegebenen Situation findet der Leser in [ACGH], S. 112. Verschiedene Voraussetzungen, unter denen er auch im Fall $\text{char}(K) > 0$ gültig bleibt, werden in [R] untersucht. Wir verallgemeinern die obige Eigenschaft wie folgt.

7.2. Definition. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, und sei $1 \leq i \leq \deg \mathbb{X} - 1$. Das Schema \mathbb{X} heißt *i-uniform*, wenn für alle Unterschemata $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{X} - i \leq \deg \mathbb{Y} \leq \deg \mathbb{X}$ gilt, daß ihre Hilbert-Funktion für alle $j \in \mathbb{Z}$ gegeben ist durch $H_{\mathbb{Y}}(j) = \min\{H_{\mathbb{X}}(j), \deg \mathbb{Y}\}$.

Insbesondere sagen wir, das Schema \mathbb{X} befinde sich *in uniformer Lage*, wenn es $(\deg \mathbb{X} - 1)$ -uniform ist.

7.3. Bemerkungen. a) Ist \mathbb{X} reduziert und $1 \leq i \leq \deg \mathbb{X} - 1$, so ist das Schema \mathbb{X} genau dann *i-uniform*, wenn alle Unterschemata $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ eines festen Grades $\deg \mathbb{Y} \geq \deg \mathbb{X} - i$ dieselbe Hilbert-Funktion haben, wie sich aus Lemma 1.10.b und vollständiger Induktion ergibt. Insbesondere ist die in Definition 7.2 formulierte “uniforme Lage” im reduzierten Fall äquivalent mit der Bedingung in Satz 7.1.

b) Aus Satz 5.6 folgt, daß ein Schema \mathbb{X} genau dann ein Cayley-Bacharach Schema ist, wenn es 1-uniform ist.

c) Satz 5.17 besagt, daß jedes Cayley-Bacharach Schema mit $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$ sogar 2-uniform ist.

d) Ist \mathbb{X} nicht ausgeartet und in uniformer Lage, so ist \mathbb{X} nach Satz 6.3 auch in linear allgemeiner Lage.

Nun veranschaulichen wir Definition 7.2 an zwei Beispielen.

7.4. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \notin \{2, 3\}$. Das reduzierte 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} = \{(1:0:0), (1:1:0), (1:2:0), (1:0:1), (1:1:1), (1:2:1)\} \subseteq \mathbb{P}^2$ ist ein vollständiger Durchschnitt mit $I_{\mathbb{X}} = (X_1(X_1 - X_0)(X_1 - 2X_0), X_2(X_2 - X_0))$. Nach Bemerkung 7.3.c ist \mathbb{X} also 2-uniform. Jedoch ist \mathbb{X} nicht 3-uniform, denn das Unterschema $\mathbb{Y} = \{(1:0:0), (1:1:0), (1:2:0)\}$ erfüllt $H_{\mathbb{Y}}(1) = 2 < 3 = \min\{H_{\mathbb{X}}(1), \deg \mathbb{Y}\}$.

7.5. Beispiel. Sei $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K) > 7$, und sei \mathbb{X} das reduzierte 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_{11}\} \subseteq \mathbb{P}^2$ aus Beispiel 6.12. Zuerst zeigt man mit den

in [K1], 2.20 oder [K5] beschriebenen Methoden, daß \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema ist. Wegen $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$ und Bemerkung 7.3.c ist \mathbb{X} somit 2-uniform, d.h. jedes Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y} = 9$ hat die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{Y}} : 1 \ 3 \ 6 \ 9 \ 9 \ \dots$, also die Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{Y}} : 1 \ 2 \ 3 \ 3$. Die einzige mögliche Castelnuovo-Funktion eines Unterschemas $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y}' = 8$ ist dann $\Delta H_{\mathbb{Y}'} : 1 \ 2 \ 3 \ 2$ (vgl. [GMR]), und \mathbb{X} ist 3-uniform. Das Unterschema $\mathbb{Y}'' = \{P_1, \dots, P_7\} \subseteq \mathbb{X}$ hat $\deg \mathbb{Y}'' = 7$ sowie $H_{\mathbb{Y}''} : 1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 7 \ \dots$ und zeigt, daß \mathbb{X} nicht 4-uniform ist.

Für manche Zahlen $1 \leq i \leq \deg \mathbb{X} - 1$ kann man die Frage, ob ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ i -uniform ist, an Hand der Modulstruktur des kanonischen Moduls ω_R entscheiden. Im Fall $i = \deg \mathbb{X} - 1$ erhalten wir damit ein algebraisches Kriterium für die uniforme Lage.

7.6. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, und sei $0 \leq i \leq \sigma_{\mathbb{X}}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

a) \mathbb{X} ist $(\deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(i))$ -uniform.

b) Für jede Zahl $j \in \{i, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}\}$ ist die Multiplikationsabbildung $R_j \otimes_K (\omega_R)_{-j} \longrightarrow (\omega_R)_0$ biinjektiv.

c) Für alle $j \in \{0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}} - i\}$ und alle $k \in \{0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}} - j\}$ ist die Multiplikationsabbildung $R_k \otimes_K (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+j} \longrightarrow (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+j+k}$ biinjektiv.

Insbesondere ist \mathbb{X} genau dann in uniformer Lage, wenn für $j = 1, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}$ die Multiplikationsabbildungen $R_j \otimes_K (\omega_R)_{-j} \longrightarrow (\omega_R)_0$ biinjektiv sind.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung nur im Fall $i = \sigma_{\mathbb{X}}$. Der allgemeine Fall folgt hieraus durch absteigende Induktion nach i (vgl. [K2], 3.2). Um zu beweisen, daß Bedingung b) aus a) folgt, wählen wir ein Element $r \in R_{\sigma_{\mathbb{X}}} \setminus \{0\}$ und betrachten das von $(r)^{\text{sat.}} \subseteq R$ definierte Unterschema $\mathbb{Y} = \mathcal{Z}((r)) \subseteq \mathbb{X}$. Wegen $r \in (I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ gilt dann $H_{\mathbb{Y}}(\sigma_{\mathbb{X}}) < H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}})$, und da \mathbb{X} nach Voraussetzung $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniform ist, bedeutet dies $\deg \mathbb{Y} < H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}}) = \deg \mathbb{X} - \Delta_{\mathbb{X}}$. Dann gibt es ein Unterschema $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y}' = \deg \mathbb{X} - \Delta_{\mathbb{X}}$ und $\mathbb{Y} \subsetneq \mathbb{Y}'$ (vgl. [K2], 2.2.b). Mit Satz 2.4.b und der Voraussetzung erhalten wir $\sigma_{\mathbb{Y}} \leq \sigma_{\mathbb{Y}'} = \sigma_{\mathbb{X}} - 1$, also $(\omega_{R_{\mathbb{Y}}})_{-\sigma_{\mathbb{X}}} = \{\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} \mid (I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}) \cdot \varphi = 0\} = \langle 0 \rangle$. Wegen $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} = (r)^{\text{sat.}}$ und Lemma 1.6.b wird daher kein Element von $(\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} \setminus \{0\}$ von r annulliert.

Da die Behauptungen b) und c) wegen $R_k \cong x_0^{\sigma_{\mathbb{X}}-k} R_k \subseteq R_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ und Satz 2.3.c äquivalent sind, bleibt nur noch zu zeigen, daß Bedingung a) aus b) folgt. Dazu ist für ein vorgegebenes Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{X} - \Delta_{\mathbb{X}} \leq \deg \mathbb{Y} \leq \deg \mathbb{X}$ nur nachzuweisen, daß $H_{\mathbb{Y}}(\sigma_{\mathbb{X}}) = H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}})$ gilt. Andernfalls wäre $H_{\mathbb{Y}}(\sigma_{\mathbb{X}}) < H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}}) \leq \deg \mathbb{Y}$, und es gäbe ein Element $r \in (I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_{\sigma_{\mathbb{X}}} \setminus \{0\}$. Außerdem hätten wir $\sigma_{\mathbb{Y}} = \sigma_{\mathbb{X}}$, d.h. jedes von Null verschiedene Element von $(\omega_{R_{\mathbb{Y}}})_{-\sigma_{\mathbb{Y}}} \subseteq (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}}$ würde im Widerspruch zur Voraussetzung von r annulliert. \square

Durch Anwendung des Satzes über biinjektive Abbildungen erhalten wir wiederum Ungleichungen, die das Wachstum der Hilbert-Funktionen i -uniformer 0-dimensionaler Schemata begrenzen.

7.7. Korollar. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, und sei $0 \leq i \leq \sigma_{\mathbb{X}}$. Ist \mathbb{X} mindestens $(\deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(i))$ -uniform, so gilt

$$H_{\mathbb{X}}(j) \geq H_{\mathbb{X}}(k) + H_{\mathbb{X}}(j - k) - 1$$

für alle $j = i, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}$ und alle $k = 0, \dots, j$. Insbesondere erfüllt die Hilbert-Funktion jedes $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniformen Schemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ die Ungleichungen

$$H_{\mathbb{X}}(j) + H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - j) \leq \deg \mathbb{X} - \Delta_{\mathbb{X}} + 1$$

für $j = 0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}$.

Beweis: Wendet man den Satz über biinjektive Abbildungen auf die Bedingung 7.6.c an, so folgt $\deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - j - k) \geq H_{\mathbb{X}}(k) + \deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - j) - 1$ für $j = 0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}} - i$ und $k = 0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}} - j$. Jetzt ersetze j durch $\sigma_{\mathbb{X}} - j$ und erhalte die Behauptung. \square

Falls ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ lokal Gorenstein und mindestens 1-uniform ist, so existiert nach Satz 5.8 eine Injektion $R(\sigma_{\mathbb{X}}) \hookrightarrow \omega_R$. Hat \mathbb{X} in diesem Fall sogar eine noch höhere Uniformität, so erhalten wir aus Satz 7.6 auch die Biinjektivität gewisser Multiplikationsabbildungen in R .

7.8. Korollar. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, und sei $0 \leq i \leq \sigma_{\mathbb{X}}$. Ist \mathbb{X} lokal Gorenstein und $(\deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(i))$ -uniform, so sind die Multiplikationsabbildungen $R_j \otimes_K R_k \rightarrow R_{j+k}$ für alle $j = 0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}} - i$ und alle $k = 0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}} - j$ biinjektiv.

Im Falle eines reduzierten 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ können wir mit Hilfe von Satz 5.18 auch im Bereich $1 \leq i \leq \Delta_{\mathbb{X}}$ eine Charakterisierung dafür angeben, ob \mathbb{X} ein i -uniformes Schema ist (s.a. [K2], 3.4).

7.9. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema und $1 \leq i \leq \Delta_{\mathbb{X}}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) \mathbb{X} ist i -uniform.
- b) Jede Teilmenge aus i Elementen von $\{Lf_1, \dots, Lf_s\}$ ist K -linear unabhängig in $\overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$.

Beweis: Dies folgt sofort aus Satz 5.18 und Definition 7.2. \square

7.10. Beispiel. Sei $\text{char}(K) = p > 0$, und sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, das aus $s \geq p + 2$ \mathbb{F}_p -rationalen Punkten besteht und $\Delta_{\mathbb{X}} = 2$ erfüllt. Dann ist \mathbb{X} nicht 2-uniform.

Andernfalls sind die Elemente $\{Lf_1, \dots, Lf_s\}$ paarweise K -linear unabhängig in $\overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$. Wenn z.B. $\{Lf_1, Lf_2\}$ eine Basis dieses 2-dimensionalen Vektorraums darstellt, so kann man für $i = 1, \dots, s$ Darstellungen $Lf_i = \lambda_i Lf_1 + \mu_i Lf_2$ finden mit $\lambda_i, \mu_i \in K$. Da alle Operationen bei der Berechnung der Separatoren und ihrer Leitformen über \mathbb{F}_p definiert sind (vgl. [K5]), hat man sogar $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{F}_p$. Nun bildet $\{(\lambda_1:\mu_1), \dots, (\lambda_s:\mu_s)\}$ eine Menge von $s \geq p + 2$ paarweise verschiedenen \mathbb{F}_p -rationalen Punkten in \mathbb{P}^1 , was offenbar unmöglich ist.

Dieses Beispiel bringt uns bereits zum Thema des letzten Teils dieses Abschnitts, nämlich zur Verallgemeinerung der im dritten Abschnitt beschriebenen Gale-Transformierten von \mathbb{X} . In diesem Teil sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema. Wir verwenden die in den Abschnitten 1 und 3 für diesen Fall eingeführten Notationen.

7.11. Definition. Sei $1 \leq i \leq \sigma_{\mathbb{X}}$, sei $r = s - H_{\mathbb{X}}(i)$, und sei $\{t_1, \dots, t_r\}$ eine K -Basis von $(\mathcal{J}_{R/K[x_0]})_{2\sigma_{\mathbb{X}}+1-i}$. Für $j = 1, \dots, r$ schreibe

$$t_j = x_0^{\sigma_{\mathbb{X}}-i} \cdot (\gamma_{j1}f_1 + \dots + \gamma_{js}f_s)$$

mit $\gamma_{j1}, \dots, \gamma_{js} \in K$ und bilde die Matrix $\Gamma_i = (\gamma_{jk}) \in \text{Mat}_{r \times s}(K)$. Dann heißt die durch die von Null verschiedenen Spalten der Matrix Γ_i definierte Punktmenge in \mathbb{P}^{r-1} die *i -te kanonische Transformierte* von \mathbb{X} und wird mit $\kappa_i(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{P}^{r-1}$ bezeichnet.

Die i -te kanonische Transformierte von \mathbb{X} ist offenbar bis auf eine Koordinatentransformation in \mathbb{P}^{r-1} , die der Wahl einer anderen Basis $\{t'_1, \dots, t'_r\}$ von $(\mathcal{J}_{R/K[x_0]})_{2\sigma_{\mathbb{X}}+1-i}$ entspricht, eindeutig bestimmt. Die erste kanonische Transformierte von \mathbb{X} ist in der Situation von Definition 3.17 mit der Gale-Transformierten von \mathbb{X} identisch. Zunächst beschäftigen wir uns mit der Frage, wann die i -te kanonische Transformierte von \mathbb{X} wieder aus $s = \deg \mathbb{X}$ verschiedenen Punkten besteht. Dazu verallgemeinern wir den in Definition 7.2 eingeführten Begriff der i -Uniformität wie folgt.

7.12. Definition. Sei $1 \leq i \leq \deg \mathbb{X} - 1$, und sei $1 \leq j \leq \sigma_{\mathbb{X}}$. Das reduzierte 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ heißt *(i, j) -uniform*, wenn für jedes Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - i$ gilt $H_{\mathbb{Y}}(j) = H_{\mathbb{X}}(j)$.

7.13. Bemerkungen. a) Genau dann ist \mathbb{X} ein $(i, \sigma_{\mathbb{X}})$ -uniformes Schema, wenn \mathbb{X} im Sinne von Definition 7.2 ein i -uniformes Schema ist, denn aus $H_{\mathbb{Y}}(\sigma_{\mathbb{X}}) = H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}})$ folgt $H_{\mathbb{Y}}(k) = \min\{H_{\mathbb{X}}(k), \deg \mathbb{Y}\}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

b) Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ nicht ausgeartet, so ist \mathbb{X} nach Satz 6.3 genau dann $(s-d-1, 1)$ -uniform, wenn sich \mathbb{X} in linear allgemeiner Lage befindet.

c) Allgemeiner gilt für $1 \leq i \leq \sigma_{\mathbb{X}}$ und $\alpha_{\mathbb{X}} \geq i + 1$, daß \mathbb{X} genau dann $(s - \binom{d+i}{d})$ -uniform ist, wenn sich \mathbb{X} in linear allgemeiner Lage i -ter Ordnung befindet, denn aus $H_{\mathbb{Y}}(i) = H_{\mathbb{X}}(i) = H_{\mathbb{P}^d}(i)$ für $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = s - (s - \binom{d+i}{i}) = H_{\mathbb{P}^d}(i)$ folgt $H_{\mathbb{Y}}(j) = \min\{H_{\mathbb{P}^d}(j), \deg \mathbb{Y}\}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Jetzt können wir die gestellte Frage beantworten und in Verallgemeinerung von Lemma 3.16 genau charakterisieren, wann die i -te kanonische Transformierte eines reduzierten 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit $\deg \mathbb{X} = s$ wieder aus s verschiedenen Punkten besteht.

7.14. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema und $1 \leq i \leq \sigma_{\mathbb{X}}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) \mathbb{X} ist $(2, i)$ -uniform.
- b) Die i -te kanonische Transformierte $\kappa_i(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{P}^{r-1}$ mit $r = s - H_{\mathbb{X}}(i)$ besteht aus s verschiedenen Punkten.

Beweis: Bedingung b) ist damit äquivalent, daß für alle $1 \leq j < k \leq s$ die j -te und die k -te Spalte der Matrix Γ_i über K linear unabhängig sind. Bei geeigneter Wahl der Basis $\{t_1, \dots, t_r\}$ von $(\mathfrak{J}_{R/K[x_0]})_{2\sigma_{\mathbb{X}}+1-i}$ bedeutet dies, daß $(\gamma_{1j}, \dots, \gamma_{rj}) = (1, 0, \dots, 0)$ und $(\gamma_{1k}, \dots, \gamma_{rk}) = (0, 1, 0, \dots, 0)$ gilt. Äquivalent hiermit ist wiederum die Bedingung

$$\begin{aligned} \dim_K \{x_0^{\sigma_{\mathbb{X}}-i} \cdot (c_1 f_1 + \dots + c_s f_s) \in (\mathfrak{J}_{R/K[x_0]})_{2\sigma_{\mathbb{X}}+1-i} \mid c_j = c_k = 0\} \\ = \dim_K (\mathfrak{J}_{R/K[x_0]})_{2\sigma_{\mathbb{X}}+1-i} - 2 = r - 2, \end{aligned}$$

also $\dim_K(\omega_{R_{\mathbb{Y}}})_{-i} = \dim_K(\omega_R)_{-i} - 2$ für alle Unterschemata $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = s - 2$. Letzteres stimmt wegen $H_{\mathbb{Y}}(i) = \deg \mathbb{Y} - \dim_K(\omega_{R_{\mathbb{Y}}})_{-i} = (s - 2) - (\dim_K(\omega_R)_{-i} - 2) = H_{\mathbb{X}}(i)$ mit Bedingung a) überein. \square

Es ist ein interessantes, und außer im Fall der Gale-Transformierten anscheinend noch weitgehend unerforschtes Fragengebiet, wie geometrische Eigenschaften von \mathbb{X} (bzw. algebraische Eigenschaften von R , ω_R , $\Omega_{R/K}^1$ etc.) mit denen von $\kappa_i(\mathbb{X})$ zusammenhängen. Wir schließen mit einem einfachen Beispiel in dieser Richtung.

7.15. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema mit $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$. Genau dann ist \mathbb{X} ein $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniformes Schema, wenn $\kappa_{\sigma_{\mathbb{X}}}(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{P}^{\Delta_{\mathbb{X}}-1}$ aus s Punkten in linear allgemeiner Lage besteht.*

Beweis: Bilden wir die Matrix $\Gamma_{\sigma_{\mathbb{X}}} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mid \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} = (\beta_{ji})^{\text{transp.}}$ wie im ersten Abschnitt, so sind ihre Spalten gerade die Koordinatenvektoren der Leitformen $\{Lf_1, \dots, Lf_s\}$ in der Basis $\{Lf_1, \dots, Lf_{\Delta_{\mathbb{X}}}\}$ von $\overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$. Nun folgt die Behauptung aus Satz 7.9. \square

8. Kohomologische Uniformität

Für diesen und den nächsten Abschnitt setzen wir voraus, daß $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema ist. Wir verwenden die im ersten und dritten Abschnitt eingeführten Notationen, insbesondere Vereinbarung 3.4. Außerdem weisen wir darauf hin, daß die nachfolgenden Ausführungen im Fall $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$ weitgehend trivial sind, so daß wir uns o.E. auf den Fall $\Delta_{\mathbb{X}} \geq 2$ beschränken könnten. Das kanonische Ideal von \mathbb{X} bezeichnen wir mit $\mathfrak{I} \subseteq R$, und $\mathfrak{B} = (\beta_{ji})^{\text{transp.}}$ ist die Matrix aus dem letzten Teil des ersten Abschnitts, wobei wir die Punkte $\{P_1, \dots, P_s\}$ von \mathbb{X} so numeriert haben, daß $\{Lf_1, \dots, Lf_{\Delta}\}$ eine K -Basis von $\overline{R}_{\sigma+1}$ darstellt. Das Material dieses Abschnitts basiert auf [K3], §3 und [K4], §2.

Aus Satz 5.15 folgt einerseits, daß \mathbb{X} genau dann ein Cayley-Bacharach Schema (also 1-uniform) ist, wenn die Multiplikationsabbildung $R_{\sigma} \otimes \mathfrak{I}_{\sigma+1} \longrightarrow \mathfrak{I}_{2\sigma+1}$ nicht ausgeartet ist. Andererseits besagt Satz 7.6, daß \mathbb{X} genau dann $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniform ist, wenn diese Multiplikationsabbildung biinjektiv ist. Im ersten Fall haben wir nach Korollar 5.9 die Ungleichungen

$$H_{\mathbb{X}}(i) + H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - i) \leq s$$

für $i = 0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}$, und im zweiten Fall nach Korollar 7.7 die Ungleichungen

$$H_{\mathbb{X}}(i) + H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - i) \leq s - \Delta_{\mathbb{X}} + 1 \quad (*)$$

für $i = 0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}$. Das nächste Beispiel zeigt, daß letztere Ungleichungen für Cayley-Bacharach Schemata mit $\Delta_{\mathbb{X}} \geq 2$ nicht immer zu gelten brauchen.

8.1. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \notin \{2, 3\}$, und seien $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{P}^3$ zwei windschiefe Geraden, z.B. $L_1 = \mathcal{Z}(X_2, X_3)$ und $L_2 = \mathcal{Z}(X_3 - X_0, X_1)$. Nun wähle ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_8\} \subseteq \mathbb{P}^3$, das aus vier Punkten P_1, \dots, P_4 von L_1 und aus vier Punkten P_5, \dots, P_8 von L_2 besteht, z.B. sei $P_1 = (1:0:0:0)$, $P_2 = (1:1:0:0)$, $P_3 = (1:2:0:0)$, $P_4 = (1:3:0:0)$, $P_5 = (1:0:0:1)$, $P_6 = (1:0:1:1)$, $P_7 = (1:0:2:1)$ und $P_8 = (1:0:3:1)$. Dann gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 4 \ 6 \ 8 \ 8 \ \dots$, $\sigma_{\mathbb{X}} = \Delta_{\mathbb{X}} = 2$, und \mathbb{X} ist ein Cayley-Bacharach Schema (vgl. [K1], 2.20 oder [K5]). Jedoch erfüllt \mathbb{X} wegen

$$H_{\mathbb{X}}(1) + H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - 1) = 8 > 7 = s - \Delta_{\mathbb{X}} + 1$$

nicht die Ungleichungen (*).

Allerdings erweist es sich als nicht leicht, Beispiele wie das vorstehende zu finden. Alle bisher bekannten haben die Eigenschaft, daß \mathbb{X} die Vereinigung zweier echter Teilmengen ist, die jeweils auf Varietäten "niedrigen" Grades liegen. Um für dieses Verhalten eine formale Definition anzugeben, scheint die Einführung des folgenden Uniformitätsbegriffs nützlich zu sein.

8.2. Definition. Wir sagen, ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ zerfällt *kohomologisch*, wenn man \mathbb{X} so in zwei nichtleere, disjunkte Teilmengen $\mathbb{X} = \mathbb{Y} \cup \mathbb{Y}'$ zerlegen kann, daß in $\overline{R}_{\sigma+1}$ gilt

$$\sum_{P_i \in \mathbb{Y}} K \cdot Lf_i \quad \cap \quad \sum_{P_i \in \mathbb{Y}'} K \cdot Lf_i = \{0\}.$$

Zerfällt \mathbb{X} nicht kohomologisch, so heißt \mathbb{X} *kohomologisch uniform*.

Als erstes begründen wir nun die Verwendung des Wortes “zerfällt” in dieser Definition und weisen ihre Unabhängigkeit von der Wahl des Nichtnullteilers $x_0 \in R_1$ nach.

8.3. Satz. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent.*

a) \mathbb{X} zerfällt kohomologisch.

b) Man kann die Punkte $\{P_1, \dots, P_\Delta\}$ bzw. $\{P_{\Delta+1}, \dots, P_s\}$ so umnumerieren, daß die Matrix \mathfrak{B} von der Form $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$ ist, wobei jeder Block null Zeilen oder Spalten haben kann und echt kleiner als \mathfrak{B} ist.

Beweis: Sei zunächst Bedingung a) vorausgesetzt. Gilt $Lf_i = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, s\}$, so ist eine Spalte von \mathfrak{B} gleich dem Nullvektor, d.h. die Matrix \mathfrak{B} ist nach einer Umnumerierung von der Form $\mathfrak{B} = (0*)$. Im folgenden nehmen wir daher an, daß alle Elemente Lf_i mit $1 \leq i \leq s$ ungleich null sind. Sei $\mathbb{X} = \mathbb{Y} \cup \mathbb{Y}'$ die Darstellung von \mathbb{X} gemäß Definition 8.2. O.E. numerieren wir $\{P_1, \dots, P_\Delta\}$ bzw. $\{P_{\Delta+1}, \dots, P_s\}$ so um, daß \mathbb{Y} gegeben ist durch $\mathbb{Y} = \{P_1, \dots, P_\delta, P_{\Delta+1}, \dots, P_{\Delta+\epsilon}\}$ mit $0 \leq \delta \leq \Delta$ und $0 \leq \epsilon \leq s - \Delta$.

Hierbei kann nicht $\delta = 0$ gelten, weil sonst $\bar{R}_{\sigma+1}$ mit $\sum_{P_i \in \mathbb{Y}'} K \cdot Lf_i$ übereinstimmen würde, und für alle Punkte $P_j \in \mathbb{Y}$ wäre $Lf_j = 0$. Analog sehen wir, daß $\delta < \Delta$ sein muß. Im Fall $\epsilon = 0$ gilt $Lf_j \in \sum_{P_i \in \mathbb{Y}'} K \cdot Lf_i$ für $j = \Delta + 1, \dots, s$, weshalb die Matrix \mathfrak{B} von der Form $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}$ ist. Ebenso ergibt sich, daß die Matrix \mathfrak{B} im Fall $\epsilon = s - \Delta$ von der Form $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Somit können wir im weiteren voraussetzen, daß $1 \leq \epsilon < s - \Delta$ gilt.

Nun folgt für $j = 1, \dots, \epsilon$ aus

$$\begin{aligned} \beta_{j\delta+1}Lf_{\delta+1} + \dots + \beta_{j\Delta}Lf_\Delta &= Lf_{\Delta+j} - \beta_{j1}Lf_1 \dots - \beta_{j\delta}Lf_\delta \\ &\in \sum_{P_i \in \mathbb{Y}} K \cdot Lf_i \cap \sum_{P_i \in \mathbb{Y}'} K \cdot Lf_i = \{0\}, \end{aligned}$$

daß $\beta_{j\delta+1} = \dots = \beta_{j\Delta} = 0$ ist. Ebenso folgt für $j = \epsilon + 1, \dots, s - \Delta$ aus

$$\begin{aligned} \beta_{j1}Lf_1 + \dots + \beta_{j\delta}Lf_\delta &= Lf_{\Delta+j} - \beta_{j\delta+1}Lf_{\delta+1} - \dots - \beta_{j\Delta}Lf_\Delta \\ &\in \sum_{P_i \in \mathbb{Y}} K \cdot Lf_i \cap \sum_{P_i \in \mathbb{Y}'} K \cdot Lf_i = \{0\}, \end{aligned}$$

daß $\beta_{j1} = \dots = \beta_{j\delta} = 0$ ist. Also ist die Matrix \mathfrak{B} von der behaupteten Form.

Umgekehrt sei nun Bedingung b) vorausgesetzt. Gilt $\beta_{j1} = \dots = \beta_{j\Delta} = 0$ für ein $j \in \{1, \dots, s - \Delta\}$, so können wir $\mathbb{Y} = \{P_j\}$ und $\mathbb{Y}' = \mathbb{X} \setminus \{P_j\}$ wählen und erhalten die gewünschte Zerlegung von $\bar{R}_{\sigma+1}$. Ist die Matrix \mathfrak{B} jedoch von der Form $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$ oder $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}$, so sei $\delta \in \{1, \dots, \Delta - 1\}$ die Anzahl der Zeilen der oberen Blöcke und $\epsilon \in \{1, \dots, s - \Delta - 1\}$ die Anzahl der Spalten der linken Blöcke. Dann wählen wir $\mathbb{Y} = \{P_1, \dots, P_\delta, P_{\Delta+1}, \dots, P_{\Delta+\epsilon}\}$ sowie $\mathbb{Y}' = \mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$ und erhalten wiederum die gewünschte Zerlegung von $\bar{R}_{\sigma+1}$. \square

8.4. Korollar. *Die Bedingungen “ \mathbb{X} zerfällt kohomologisch” bzw. “ \mathbb{X} ist kohomologisch uniform” aus Definition 8.2 hängen nicht von der Wahl des Nichtnullteilers $x_0 \in R_1$ ab.*

Beweis: Wegen Lemma 1.12 ist die Bedingung 8.3.b unabhängig von der Wahl des Nichtnullteilers $x_0 \in R_1$. \square

Mit Hilfe von Satz 8.3 können wir uns leicht davon überzeugen, daß das reduzierte 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ aus Beispiel 8.1 tatsächlich kohomologisch zerfällt.

8.5. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \notin \{2, 3\}$, und sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_8\} \subseteq \mathbb{P}^3$ das reduzierte 0-dimensionale Unterschema aus Beispiel 8.1. Mit den in [K5] beschriebenen Methoden berechnen wir die Separatoren $f_1, \dots, f_8 \in R_3$. Es stellt sich heraus, daß $\{Lf_1, Lf_5\}$ eine K -Basis von \overline{R}_3 ist, und bzgl. dieser Basis hat die Matrix \mathfrak{B} die Gestalt

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

woraus wir sehen, daß \mathbb{X} in der Form $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_4\} \cup \{P_5, \dots, P_8\}$ kohomologisch zerfällt.

Auch für die Wahl des Wortes “kohomologisch” in Definition 8.2 gibt es eine Begründung.

8.6. Bemerkung. Wie wir im zweiten Abschnitt bereits gesehen haben, hat der lokale Kohomologiemodul $H_{\mathfrak{m}}^1(R)$ die Hilbert-Funktion $\dim_K H_{\mathfrak{m}}^1(R)_i = s - H_{\mathbb{X}}(i)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Insbesondere gilt $\sigma_{\mathbb{X}} = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid H_{\mathfrak{m}}^1(R)_i \neq \{0\}\}$. Für jedes Unterschema $\mathbb{Y}_i = \mathbb{X} \setminus \{P_i\}$ mit $1 \leq i \leq s$ können wir den *verallgemeinerten Bruch* $\left[\begin{smallmatrix} f_i \\ x_0 \end{smallmatrix} \right] \in H_{\mathfrak{m}}^1(R)_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ bilden (vgl. [Ku], S. 51). Aus dem Beweis von Lemma 1.12 folgt, daß der 1-dimensionale K -Vektorraum $c(\mathbb{Y}_i) = K \cdot \left[\begin{smallmatrix} f_i \\ x_0 \end{smallmatrix} \right] \subseteq H_{\mathfrak{m}}^1(R)_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ nicht von der Wahl des Nichtnullteilers $x_0 \in R_1$ abhängt. Wir nennen ihn die *Kohomologieklass*e von \mathbb{Y}_i (vgl. auch [H1], ex. III.7.4). Mit dieser Bezeichnung und den Regeln für das Rechnen mit verallgemeinerten Brüchen (vgl. [Ku], 4.13 und 4.14) können wir Definition 8.2 auch so aussprechen:

Ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ zerfällt genau dann kohomologisch, wenn es eine Zerlegung $\mathbb{X} = \mathbb{Y} \cup \mathbb{Y}'$ gibt mit $\mathbb{Y}, \mathbb{Y}' \neq \emptyset$ und $\sum_{P_i \in \mathbb{Y}} c(\mathbb{Y}_i) \cap \sum_{P_i \in \mathbb{Y}'} c(\mathbb{Y}_i) = \{0\}$.

Auch die kohomologische Uniformität eines reduzierten 0-dimensionalen Schemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ist an der Modulstruktur von ω_R bzw. \mathfrak{J} erkennbar. Bevor wir jedoch zu dieser Charakterisierung schreiten können, brauchen wir noch eine weitere Kohärenzeigenschaft der Matrix \mathfrak{B} kohomologisch uniformer Schemata.

8.7. Lemma. Sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d$ kohomologisch uniform, und sei \sim eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\{1, \dots, s\}$ mit der Eigenschaft, daß $i \sim j$ gilt für alle $i \in \{1, \dots, \Delta\}$ und $j \in \{\Delta+1, \dots, s\}$ mit $\beta_{j-\Delta i} \neq 0$. Dann gilt $1 \sim 2 \sim \dots \sim s$.

Beweis: O.B.d.A. seien $\{\Delta+1, \dots, \Delta+t_1\}$ für ein $t_1 \geq 1$ diejenigen Zahlen $j \in \{\Delta+1, \dots, s\}$ mit $\beta_{j-\Delta 1} \neq 0$. Hierbei gilt $t_1 \neq 0$ wegen Lemma 1.11.a. Nach Voraussetzung haben wir $1 \sim \Delta+1 \sim \dots \sim \Delta+t_1$, und für $j \in \{\Delta+t_1+1, \dots, s\}$ gilt $\beta_{j-\Delta 1} = 0$. Da \mathbb{X} kohomologisch uniform ist, zeigt Satz 8.3, daß es eine Zahl $i \in \{2, \dots, \Delta\}$ gibt, so daß

nicht alle Elemente der Menge $\{\beta_{1i}, \dots, \beta_{t_1 i}\}$ gleich null sind. O.B.d.A. sei $i = 2$ und $\beta_{\nu_1 2} \neq 0$ mit einem $\nu_1 \in \{1, \dots, t_1\}$. Dann gilt $2 \sim \Delta + \nu_1 \sim 1$.

Nun seien o.E. $\{\Delta + t_1 + 1, \dots, \Delta + t_2\}$ mit $t_2 \geq t_1$ diejenigen Zahlen $j \in \{\Delta + t_1 + 1, \dots, s\}$ mit $\beta_{j-\Delta 2} \neq 0$. (Hierbei erlauben wir auch den Fall $t_2 = t_1$.) Dann gilt $2 \sim \Delta + t_1 + 1 \sim \dots \sim \Delta + t_2$ sowie $\beta_{j-\Delta 2} = 0$ für $j = \Delta + t_1 + 2, \dots, s$. Da \mathbb{X} kohomologisch uniform ist, liefert Satz 8.3 wieder eine Zahl $i \in \{3, \dots, \Delta\}$, so daß nicht alle Elemente der Menge $\{\beta_{1i}, \dots, \beta_{t_2 i}\}$ gleich null sind. O.B.d.A. sei $i = 3$ und $\beta_{\nu_2 3} \neq 0$ mit $\nu_2 \in \{1, \dots, t_2\}$. Dann folgt $3 \sim \Delta + \nu_2 \sim 2 \sim 1$.

Indem wir so fortfahren, erhalten wir schließlich $t_\Delta = s - \Delta$, da nicht alle Zahlen der Menge $\{\beta_{s-\Delta 1}, \dots, \beta_{s-\Delta \Delta}\}$ verschwinden, und es gilt $\Delta \sim \Delta - 1 \sim \dots \sim 1$. Weil jede Spalte von \mathfrak{B} einen von null verschiedenen Eintrag hat, ergibt sich die Behauptung. \square

8.8. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

a) \mathbb{X} ist kohomologisch uniform.

b) Die Multiplikationsabbildung $\mu : R_\sigma \otimes \mathfrak{I}_{\sigma+1} \longrightarrow \mathfrak{I}_{2\sigma+1}$ ist nicht ausgeartet und surjektiv.

c) Die Multiplikationsabbildung $\tilde{\mu} : R_\sigma \otimes (\omega_R)_{-\sigma} \longrightarrow (\omega_R)_0$ ist nicht ausgeartet und surjektiv.

Beweis: Wegen Satz 3.9 sind die Bedingungen b) und c) äquivalent. Sei \mathbb{X} nun kohomologisch uniform. Nach Satz 8.3 ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema, so daß aus Satz 5.15 folgt, daß die Multiplikationsabbildungen μ und $\tilde{\mu}$ nicht ausgeartet sind. In Anbetracht von Korollar 3.11 müssen wir also noch zeigen, daß die Elemente $h_i = x_0^\sigma(f_{i+1} - f_i)$ für $1 \leq i \leq s - 1$ im Bild von μ liegen. Wir definieren eine Relation \sim auf der Menge $\{1, \dots, s\}$ durch

$$i \sim j \quad \Longleftrightarrow \quad x_0^\sigma(f_i - f_j) \in \text{im } \mu.$$

Offenbar ist \sim eine Äquivalenzrelation. Für $1 \leq i \leq \Delta$ und $\Delta + 1 \leq j \leq s$ gilt $g_{j-\Delta} \cdot \pi_i = \beta_{j-\Delta i} \cdot x_0^\sigma(f_j - f_i) \in \text{im } \mu$ nach Korollar 3.12. Also folgt $i \sim j$ aus $\beta_{j-\Delta i} \neq 0$. Darum können wir das Lemma 8.7 anwenden und erhalten $1 \sim \dots \sim s$, also $x_0^\sigma(f_j - f_i) \in \text{im } \mu$ für $i, j \in \{1, \dots, s\}$. Insbesondere liegen die Elemente h_1, \dots, h_{s-1} im Bild von μ .

Schließlich zeigen wir, daß Bedingung a) aus b) folgt. Angenommen, \mathbb{X} zerfällt kohomologisch in der Form $\mathbb{X} = \mathbb{Y} \cup \mathbb{Y}'$. Dann gilt $\Delta \geq 2$, und wir können $\{P_1, \dots, P_s\}$ so unnummerieren, daß $\mathbb{Y} = \{P_1, \dots, P_\delta, P_{\Delta+1}, \dots, P_{\Delta+\epsilon}\}$ ist mit $1 \leq \delta \leq \Delta - 1$ und $0 \leq \epsilon \leq s - \Delta$ (vgl. Satz 8.3). Da das Bild von μ von den Elementen $g_{j-\Delta} \cdot \pi_i = \beta_{j-\Delta i} \cdot x_0^\sigma(f_j - f_i)$ mit $1 \leq i \leq \Delta$ und $\Delta + 1 \leq j \leq s$ erzeugt wird, können wir uns auch auf diejenigen dieser Elemente beschränken, für die $\beta_{j-\Delta i} \neq 0$ ist. Da \mathbb{X} kohomologisch zerfällt, ist diese Teilmenge enthalten in

$$\begin{aligned} M = & \{x_0^\sigma(f_j - f_i) \mid i = 1, \dots, \delta \text{ und } j = \Delta + 1, \dots, \Delta + \epsilon\} \\ & \cup \{x_0^\sigma(f_j - f_i) \mid i = \delta + 1, \dots, \Delta \text{ und } j = \Delta + \epsilon + 1, \dots, s\}. \end{aligned}$$

Nun sei $r = x_0^\sigma(c_1 f_1 + \cdots + c_s f_s) \in \text{im } \mu$ mit $c_1, \dots, c_s \in K$. Wir stellen r als Linearkombination der Elemente von M dar und erhalten

$$r = \sum_{i=1}^{\delta} \sum_{j=\Delta+1}^{\Delta+\epsilon} \zeta_{ij} x_0^\sigma(f_j - f_i) + \sum_{i=\delta+1}^{\Delta} \sum_{j=\Delta+\epsilon+1}^s \zeta_{ij} x_0^\sigma(f_j - f_i)$$

mit $\zeta_{ij} \in K$. Durch Vergleich der beiden Darstellungen von r folgt

$$c_i = \begin{cases} -\zeta_{i\Delta+1} - \cdots - \zeta_{i\Delta+\epsilon} & \text{für } i = 1, \dots, \delta, \\ -\zeta_{i\Delta+\epsilon+1} - \cdots - \zeta_{is} & \text{für } i = \delta + 1, \dots, \Delta, \\ \zeta_{1i} + \cdots + \zeta_{\delta i} & \text{für } i = \Delta + 1, \dots, \Delta + \epsilon, \\ \zeta_{\delta+1 i} + \cdots + \zeta_{\Delta i} & \text{für } i = \Delta + \epsilon + 1, \dots, s. \end{cases}$$

Hieraus schließen wir $\sum_{P_i \in \mathbb{Y}} c_i = 0$ und $\sum_{P_i \in \mathbb{Y}'} c_i = 0$. Insbesondere liegt das Element $x_0^\sigma(f_\Delta - f_1)$ nicht im Bild von μ , was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. \square

Wie in den vorhergehenden Abschnitten stellt sich natürlich die Frage, welche Auswirkungen diese Charakterisierung kohomologisch uniformer 0-dimensionaler Schemata für ihre Hilbert-Funktionen hat. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, daß ein Uniformitätsbegriff vorliegt, der es uns erlaubt, die Ungleichungen (*) zu beweisen. Auf jeden Fall liegt er zwischen der 1-Uniformität und der $\Delta_{\mathbb{X}}$ -Uniformität.

8.9. Korollar. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema. Dann gilt:*

$$\begin{array}{c} \mathbb{X} \text{ ist } \Delta_{\mathbb{X}}\text{-uniform} \\ \Downarrow \\ \mathbb{X} \text{ ist kohomologisch uniform} \\ \Downarrow \\ \mathbb{X} \text{ ist ein Cayley-Bacharach Schema (also 1-uniform).} \end{array}$$

Beweis: Die erste Implikation folgt aus 7.6 und 8.8, die zweite aus Satz 8.3. \square

Für den Rest dieses Abschnitts spezialisieren wir die Situation noch weiter und nehmen an, daß $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d$ nicht ausgeartet ist und $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$ erfüllt. Dann besteht \mathbb{X} aus $d + 2 \leq s \leq \binom{d+2}{2}$ Punkten, die den Raum \mathbb{P}^d aufspannen, und \mathbb{X} hat die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}} : 1 \ d+1 \ s \ s \ \cdots$ sowie $\Delta_{\mathbb{X}} = s - d - 1$. In diesem Fall stimmen zwei der bisher betrachteten Uniformitätsbedingungen überein.

8.10. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein nicht ausgeartetes, reduziertes, 0-dimensionales Unterschema mit $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

- \mathbb{X} ist in linear allgemeiner Lage.
- \mathbb{X} ist $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniform.
- Die Multiplikationsabbildung $R_1 \otimes \mathfrak{I}_2 \rightarrow \mathfrak{I}_3$ ist bijektiv.

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Sätzen 6.6 und 7.6. \square

Für $i = 1, \dots, s$ schreiben wir $P_i = (1 : p_{i1} : \cdots : p_{id})$ mit $p_{i1}, \dots, p_{id} \in K$. In geeigneten Koordinaten können wir die Matrix \mathfrak{B} explizit angeben.

8.11. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein nicht ausgeartetes, reduziertes, 0-dimensionales Unterschema mit $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$. Wir können die Koordinaten von \mathbb{P}^d so wählen, daß $P_{\Delta+1} = (1 : 0 : \dots : 0)$, $P_{\Delta+2} = (1 : 1 : 0 : \dots : 0)$, ..., $P_s = (1 : 0 : \dots : 0 : 1)$ gilt. Dann ist die Matrix \mathfrak{B} gegeben durch

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -1 + p_{11} + \dots + p_{1d} & -p_{11} & \dots & -p_{1d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 + p_{\Delta 1} + \dots + p_{\Delta d} & -p_{\Delta 1} & \dots & -p_{\Delta d} \end{pmatrix}$$

Beweis: Nach Satz 5.18 spannen die $d + 1$ Punkte $\{P_{\Delta+1}, \dots, P_s\}$ den Raum \mathbb{P}^d auf, weshalb ein geeigneter Koordinatenwechsel sie in die Punkte $\{(1 : 0 : \dots : 0), (1 : 1 : 0 : \dots : 0), \dots, (1 : 0 : \dots : 0 : 1)\}$ überführt. Außer $\{x_0 - x_1 - \dots - x_d, x_1, \dots, x_d\}$ ist nach Lemma 1.11.b auch $\{g_1, \dots, g_{d+1}\}$ eine K -Basis von R_1 . Für $0 \leq i \leq d$ und $1 \leq j \leq d$ nehmen beide Basen an den Punkten P_{s-d+i} die gleichen Funktionswerte

$$(x_0 - x_1 - \dots - x_d)(P_{s-d+i}) = \delta_{i0} = g_1(P_{s-d+i})$$

bzw.

$$x_j(P_{s-d+i}) = \delta_{ij} = g_{j+1}(P_{s-d+i})$$

an, d.h. es gilt $g_1 = x_0 - x_1 - \dots - x_d$, $g_2 = x_1$, ..., $g_{d+1} = x_d$. Jetzt folgt die Behauptung aus $\beta_{ij} = -g_i(P_j)$ für $1 \leq i \leq d + 1$ und $1 \leq j \leq \Delta$ (vgl. Lemma 1.11.b). \square

Auf Grund von Beispiel 8.5 kann man bereits vermuten, daß (zumindest im Fall $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$) auch eine geometrische Interpretation für das kohomologische Zerfallen eines reduzierten 0-dimensionalen Schemas existiert.

8.12. Definition. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema. Wir sagen, \mathbb{X} zerfalle linear, wenn es (echte) lineare Teilräume $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{P}^d$ gibt mit $\mathbb{X} \subseteq L_1 \cup L_2$ und $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

Das 0-dimensionale Schema aus Beispiel 8.1 zerfällt offenbar linear. Unser nächster Satz stellt eine geometrische Charakterisierung der kohomologischen Uniformität im Fall $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$ dar. Die Äquivalenz der Bedingungen a) und d) kann man auch aus [CRV1], 1.2 und 1.5 ableiten.

8.13. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein nicht ausgeartetes, reduziertes, 0-dimensionales Unterschema mit $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) \mathbb{X} zerfällt nicht linear.
- b) \mathbb{X} ist kohomologisch uniform.
- c) Die Multiplikationsabbildung $\mu : R_1 \otimes \mathfrak{I}_2 \longrightarrow \mathfrak{I}_3$ ist nicht ausgeartet und surjektiv.
- d) \mathbb{X} ist ein Level-Schema (oder rein), d.h. sein kanonisches Ideal \mathfrak{I} wird von den Elementen von \mathfrak{I}_2 erzeugt.

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß Bedingung b) aus a) folgt. Das Schema \mathbb{X} hat die Cayley-Bacharach Eigenschaft vom Grad $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$, denn jede Hyperebene L_1 , die genau $s - 1$ Punkte von \mathbb{X} enthält, liefert zusammen mit dem 0-dimensionalen linearen Raum,

der aus dem verbleibenden Punkt besteht, eine Inklusion $\mathbb{X} \subseteq L_1 \cup L_2$, die bedeutet, daß \mathbb{X} linear zerfällt.

Angenommen, \mathbb{X} zerfällt kohomologisch und wir haben die Punkte $\{P_1, \dots, P_s\}$ so unnumeriert, daß Bedingung 8.3.b erfüllt ist. Dann gilt $g_i(P_j) = 0$ für $j \in \{1, \dots, \epsilon\}$ und $i \in \{\delta+1, \dots, \Delta\} \cup \{\Delta+\epsilon+1, \dots, s\}$. Daher enthält der lineare Teilraum $L_1 = \mathcal{Z}(g_1, \dots, g_\epsilon) \subseteq \mathbb{P}^d$ die Punkte $\{P_{\delta+1}, \dots, P_\Delta, P_{\Delta+\epsilon+1}, \dots, P_s\}$. Analog sehen wir, daß der lineare Teilraum $L_2 = \mathcal{Z}(g_{\epsilon+1}, \dots, g_{s-\Delta}) \subseteq \mathbb{P}^d$ die Punkte $\{P_1, \dots, P_\delta, P_{\Delta+1}, \dots, P_{\Delta+\epsilon}\}$ enthält. Insgesamt gilt $\mathbb{X} \subseteq L_1 \cup L_2$ und $L_1 \cap L_2 = \mathcal{Z}(g_1, \dots, g_s) = \emptyset$, im Widerspruch zu a).

Da die Äquivalenz der Bedingungen b) und c) aus Satz 8.8 folgt, zeigen wir nun den Schluß von c) auf d). Dazu bemerken wir, daß \mathfrak{J}_3 wegen der Surjektivität von μ keinen minimalen Erzeuger von \mathfrak{J} enthält. Wegen $x_0\mathfrak{J}_3 \subseteq \mathfrak{J}_4$ und $\dim_K \mathfrak{J}_3 = s-1$ genügt es nach Korollar 3.11, ein einziges Element $r = x_0^2(c_1f_1 + \dots + c_sf_s) \in \mathfrak{J}_4 = R_4$ mit $c_1, \dots, c_s \in K$ und $c_1 + \dots + c_s \neq 0$ anzugeben. Dazu nehmen wir ein Element $r' = c'_1f_1 + \dots + c'_sf_s \in \mathfrak{J}_2 \setminus \{0\}$ mit $c'_1, \dots, c'_s \in K$ und $c'_i \neq 0$ für ein $i \in \{1, \dots, s\}$ und erhalten $f_i \cdot r' = c'_i \cdot x_0^2 \cdot f_i \in \mathfrak{J}_4 \setminus \{0\}$.

Bedingung c) folgt aus d), denn wie wir im 11. Abschnitt sehen werden, ist jedes Level-Schema ein Cayley-Bacharach Schema, d.h. die Abbildung μ ist nach Satz 5.15 nicht ausgeartet, und surjektiv ist sie nach Voraussetzung.

Schließlich zeigen wir noch die Richtung von b) nach a). Angenommen, es gibt lineare Teilräume $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{P}^d$ mit $\mathbb{X} \subseteq L_1 \cup L_2$ und $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. O.E. können wir annehmen, daß $\dim L_1 + \dim L_2 = d-1$ ist. Wir setzen $\epsilon = d - \dim L_1 = \dim L_2 + 1$ und wählen ein Koordinatensystem $\{Y_0, \dots, Y_d\}$ von \mathbb{P}^d , so daß $L_1 = \mathcal{Z}(Y_0, \dots, Y_{\epsilon-1})$ sowie $L_2 = \mathcal{Z}(Y_\epsilon, \dots, Y_d)$ gilt. Die Bilder der Polynome $Y_i \in A_1$ in R bezeichnen wir für $i = 0, \dots, d$ mit y_i . Außerdem numerieren wir die Punkte von \mathbb{X} so um, daß es ein $r \in \{1, \dots, s-1\}$ gibt mit $\mathbb{X} \cap L_1 = \{P_1, \dots, P_r\}$ und $\mathbb{X} \cap L_2 = \{P_{r+1}, \dots, P_s\}$.

Aus $\mathbb{X} \subseteq L_1 \cup L_2$ folgt $y_i y_j = 0$ für $0 \leq i \leq \epsilon-1$ und $\epsilon \leq j \leq d$. Daher hat f_i für jedes $i \in \{1, \dots, s\}$ eine Zerlegung $f_i = f'_i + f''_i$ mit $f'_i \in K[y_0, \dots, y_{\epsilon-1}] \subseteq R$ sowie $f''_i \in K[y_\epsilon, \dots, y_d] \subseteq R$. Hieraus folgt $f'_i(P_j) = 0$ für $1 \leq j \leq r$ sowie $f''_i(P_j) = 0$ für $r+1 \leq j \leq s$. Da aber für $1 \leq i \leq r$ und $r+1 \leq j \leq s$ sowieso $f'_i(P_j) = f_i(P_j) = 0$ ist, ergibt sich $f'_i = 0$. Analog erhalten wir $f''_i = 0$ für $r+1 \leq i \leq s$. Insgesamt liefert dies $f_i \in K[y_\epsilon, \dots, y_d]$ für $1 \leq i \leq r$ und $f_i \in K[y_0, \dots, y_{\epsilon-1}]$ für $r+1 \leq i \leq s$. Wir folgern, daß $x_0(Ky_\epsilon + \dots + Ky_d) \subseteq Kf_1 \oplus \dots \oplus Kf_r$ und $x_0(Ky_0 + \dots + Ky_{\epsilon-1}) \subseteq Kf_{r+1} \oplus \dots \oplus Kf_s$ gilt. Sind somit $c_1, \dots, c_s \in K$ mit $c_1f_1 + \dots + c_sf_s \in x_0R_1$, dann ergibt sich $c_1f_1 + \dots + c_rf_r \in x_0R_1$ sowie $c_{r+1}f_{r+1} + \dots + c_sf_s \in x_0R_1$, d.h. wir haben eine Darstellung $\bar{R}_2 = \sum_{i=1}^r K \cdot Lf_i \oplus \sum_{i=r+1}^s K \cdot Lf_i$, die der Voraussetzung widerspricht. \square

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem Beispiel, das beweist, daß nicht jedes kohomologisch zerfallende Schema auch linear zerfällt. Es zeigt sich auch, daß die Frage, ob ein Cayley-Bacharach Schema kohomologisch zerfällt oder kohomologisch uniform ist, von recht subtilen geometrischen Eigenschaften der Konstellation der Punkte abhängen kann. Man könnte aber die Frage stellen, ob für jedes kohomologisch zerfallende Schema

\mathbb{X} zwei irreduzible Varietäten $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^d$ “kleinen” Grades existieren mit $\mathbb{X} \subseteq V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Die dem nachfolgenden Beispiel zugrunde liegenden Berechnungen wurden mit dem Programm COP ausgeführt, das auf den in [MR] und [K5] dargestellten Methoden basiert.

8.14. Beispiel. a) Sei $\text{char}(K) = 0$, seien $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{P}^3$ zwei nicht ausgeartete, windschiefe (d.h. punktfremde), kubische Raumkurven, und sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_{40}\} \subseteq \mathbb{P}^3$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema mit $P_1, \dots, P_{20} \in C_1$ und $P_{21}, \dots, P_{40} \in C_2$. Z.B. können wir $C_1 = \{(u^3:u^2v:uv^2:v^3) \mid (u:v) \in \mathbb{P}^1\}$ und $C_2 = \{(2uv^2:u^3:v^3:u^2v) \mid (u:v) \in \mathbb{P}^1\}$ wählen, und dann jeweils die Punkte von C_1 bzw. C_2 nehmen, die für $i = 1, \dots, 20$ den Punkten $(u:v) = (1:i)$ entsprechen.

Die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} ist gegeben durch $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 4 \ 10 \ 20 \ 26 \ 32 \ 38 \ 40 \ 40 \ \dots$, und es gilt $\sigma_{\mathbb{X}} = 6$ sowie $\Delta_{\mathbb{X}} = 2$. Das Schema \mathbb{X} ist ein Cayley-Bacharach Schema, und die Matrix \mathfrak{B} von \mathbb{X} ist von der Form $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} * & \dots & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$. Daher zerfällt \mathbb{X} kohomologisch in $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_{20}\} \cup \{P_{21}, \dots, P_{40}\}$. Offenbar zerfällt \mathbb{X} aber nicht linear. Wir bemerken noch, daß die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} wegen $H_{\mathbb{X}}(3) + H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - 3) = 40 > 39 = s - \Delta_{\mathbb{X}} + 1$ nicht die Ungleichungen (*) erfüllt.

b) Ersetzen wir C_2 durch die Kurve $C_3 = \{(u^3:uv^2:v^3:2u^2v) \mid (u:v) \in \mathbb{P}^1\}$, so gilt $C_1 \cap C_3 = \{(1:0:0:0)\}$, und das analog definierte Schema \mathbb{X} hat die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 4 \ 10 \ 19 \ 25 \ 31 \ 37 \ 40 \ 40 \ \dots$ sowie $\sigma_{\mathbb{X}} = 6$ und $\Delta_{\mathbb{X}} = 3$. Es stellt sich heraus, daß die Matrix \mathfrak{B} in diesem Fall nicht zerfällt, d.h. \mathbb{X} ist kohomologisch uniform. Die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} erfüllt die Ungleichungen (*).

9. Hilbert-Funktionen kohomologisch uniformer Schemata

Das Ziel dieses Abschnitts, der auf [K4], §3 basiert, ist der Beweis des folgenden Satzes.

9.1. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, das kohomologisch uniform ist. Dann gilt für alle $i \in \{0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}\}$ die Ungleichung*

$$H_{\mathbb{X}}(i) + H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - i) \leq s - \Delta_{\mathbb{X}} + 1.$$

Wir verwenden weiterhin die Vereinbarungen und Notationen aus den Abschnitten 1, 3 und 8. Besteht \mathbb{X} nur aus einem Punkt, so gilt $\sigma_{\mathbb{X}} = -1$ und die Behauptung von Satz 9.1 ist leer. Im Fall $\sigma_{\mathbb{X}} = 0$ ist die Behauptung von Satz 9.1 ebenfalls trivialerweise wahr, so daß wir im folgenden stets $s \geq 3$ und $\sigma_{\mathbb{X}} \geq 1$ voraussetzen. Da die Behauptung von Satz 9.1 im Fall $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$ aus Satz 8.3 und Korollar 5.9 folgt, können wir außerdem annehmen, daß $\Delta_{\mathbb{X}} \geq 2$ ist.

Der Beweis von Satz 9.1 gründet sich auf ein detailliertes Studium der Struktur des kanonischen Ideals eines kohomologisch uniformen Schemas. Der nächste Satz und sein Korollar liefern uns die notwendige Verbindung.

9.2. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, sei $r \in R_{\sigma}$, und sei $\varphi \in \mathfrak{I}_{\sigma+1}$. Dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent.*

a) *Es gibt Elemente $\varphi_2, \dots, \varphi_{\Delta} \in \mathfrak{I}_{\sigma+1}$, so daß gilt*

$$\mathfrak{I}_{2\sigma+1} = R_{\sigma} \cdot \varphi \oplus K \cdot r\varphi_2 \oplus \dots \oplus K \cdot r\varphi_{\Delta}.$$

b) *Sind Elemente $\varphi_2, \dots, \varphi_{\Delta} \in \mathfrak{I}_{\sigma+1}$ gegeben, so daß $\{\varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_{\Delta}\}$ eine K -Basis von $\mathfrak{I}_{\sigma+1}$ darstellt, dann gilt*

$$\mathfrak{I}_{2\sigma+1} = R_{\sigma} \cdot \varphi \oplus K \cdot r\varphi_2 \oplus \dots \oplus K \cdot r\varphi_{\Delta}.$$

c) *Es gilt $\varphi \neq 0$, und für alle Elemente $r' \in R_{\sigma}$ sowie $\varphi' \in \mathfrak{I}_{\sigma+1}$ mit $r'\varphi = r\varphi'$ existiert ein $\lambda \in K$, so daß $r' = \lambda r$ und $\varphi' = \lambda\varphi$ erfüllt ist.*

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß Bedingung c) aus a) folgt. Wegen $s-1 = \dim_K \mathfrak{I}_{2\sigma+1} > \Delta-1 = \dim_K (K \cdot r\varphi_2 \oplus \dots \oplus K \cdot r\varphi_{\Delta})$ muß $\varphi \neq 0$ sein. Angenommen, es gilt $r\varphi' = r'\varphi$ für gewisse Elemente $r' \in R_{\sigma}$ und $\varphi' \in \mathfrak{I}_{\sigma+1}$. Aus der Voraussetzung ergibt sich offenbar, daß die Elemente $\{\varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_{\Delta}\}$ K -linear unabhängig sind und folglich eine K -Basis von $\mathfrak{I}_{\sigma+1}$ bilden. Also können wir eine Darstellung $\varphi' = \lambda_1\varphi + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_{\Delta}\varphi_{\Delta}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_{\Delta} \in K$ finden. Hieraus erhalten wir

$$r(\lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_{\Delta}\varphi_{\Delta}) = (r' - \lambda_1 r)\varphi \in R_{\sigma} \cdot \varphi \cap (K \cdot r\varphi_2 \oplus \dots \oplus K \cdot r\varphi_{\Delta}) = \{0\},$$

also $\lambda_2 = \dots = \lambda_{\Delta} = 0$ und $\varphi' = \lambda_1\varphi$. Weil die Voraussetzung auch $\dim_K (R_{\sigma} \cdot \varphi) = s - \Delta$ impliziert, haben wir $r' - \lambda_1 r = 0$, also $r' = \lambda_1 r$.

Da Bedingung a) offensichtlich aus b) folgt, bleibt noch der Schluß von c) nach b) zu beweisen. Wir behaupten, daß $\dim_K(R_\sigma \cdot \varphi) = s - \Delta$ ist, d.h. daß kein Element $r' \in R_\sigma \setminus \{0\}$ das Element φ annulliert. Andernfalls könnten wir $\varphi' = 0$ wählen, und aus $r'\varphi = 0 = r\varphi'$ würde $\varphi' = \lambda\varphi$ sowie $r' = \lambda r$ mit $\lambda \in K$ folgen, was $r' \neq 0$ widerspräche. Weiter behaupten wir, daß wir annehmen können, daß $r \neq 0$ ist. Andernfalls würde $r'\varphi = 0$ mit $r' \in R_\sigma$ nach c) stets $r' = 0$ implizieren, d.h. nach Satz 5.15, daß \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema wäre. Weil sich aus $0 \cdot \varphi = 0 \cdot \varphi'$ auch $\varphi' \in K \cdot \varphi$ ergäbe, würde \mathbb{X} dann $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$ erfüllen, und die Behauptung wäre trivialerweise wahr.

Angenommen, ein Element $\varphi' = \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_\Delta\varphi_\Delta$ mit $\lambda_2, \dots, \lambda_\Delta \in K$ erfüllt nun $r\varphi' = 0$. Dann gilt $r\varphi' = r'\varphi$ für $r' = 0$, also $r' = \lambda r$ und $\varphi' = \lambda\varphi$ mit $\lambda \in K$, und somit $\varphi' = 0$. Dies zeigt $\dim_K(K \cdot r\varphi_2 + \dots + K \cdot r\varphi_\Delta) = \Delta - 1$. Schließlich ist es auf Grund der Voraussetzung klar, daß $R_\sigma \cdot \varphi \cap (K \cdot r\varphi_2 \oplus \dots \oplus K \cdot r\varphi_\Delta) = \{0\}$ ist, woraus wir wegen $\dim_K(R_\sigma \cdot \varphi) + \dim_K(K \cdot r\varphi_2 \oplus \dots \oplus K \cdot r\varphi_\Delta) = (s - \Delta) + (\Delta - 1) = s - 1 = \dim_K \mathfrak{J}_{2\sigma+1}$ die Behauptung erhalten. \square

9.3. Korollar. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema.

a) Gibt es ein Element $\ell \in R_1$, so daß die Bedingungen 9.2.a) – c) für $r = \ell^\sigma \in R_\sigma$ und ein $\varphi \in \mathfrak{J}_{\sigma+1}$ erfüllt sind, dann gilt für alle $i \in \{0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}}\}$ die Ungleichung

$$H_{\mathbb{X}}(i) + H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - i) \leq s - \Delta_{\mathbb{X}} + 1.$$

b) Gibt es Elemente $r \in R_\sigma$ und $\varphi \in \mathfrak{J}_{\sigma+1}$, so daß die Bedingungen 9.2.a) – c) erfüllt sind, dann ist \mathbb{X} kohomologisch uniform.

Beweis: Zum Beweis von Teil a) wählen wir Elemente $\varphi_2, \dots, \varphi_\Delta \in \mathfrak{J}_{\sigma+1}$ wie in Satz 9.2.b. Im Beweis dieses Satzes haben wir bereits gesehen, daß $\text{Ann}_R(\varphi) \cap R_\sigma = \{0\}$ ist. Nun beachten wir, daß aus $\ell^i (\lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_\Delta\varphi_\Delta) \in R_i \cdot \varphi$ für ein $i \in \{0, \dots, \sigma\}$ und gewisse Elemente $\lambda_2, \dots, \lambda_\Delta \in K$ bereits $\ell^\sigma (\lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_\Delta\varphi_\Delta) \in R_\sigma \cdot \varphi$, also $\lambda_2 = \dots = \lambda_\Delta = 0$ folgt. Deshalb gilt $s - H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - i) = \dim_K \mathfrak{J}_{\sigma+1+i} \geq \dim_K(R_i \cdot \varphi) + \Delta_{\mathbb{X}} - 1 = H_{\mathbb{X}}(i) + \Delta_{\mathbb{X}} - 1$ wie behauptet.

Teil b) folgt daraus, daß $\text{Ann}_R(\varphi) \cap R_\sigma = \{0\}$ zusammen mit Satz 5.15 beweist, daß \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema ist, so daß Satz 8.8 die Behauptung liefert. \square

Aus dem vorstehenden Korollar ersehen wir, daß es für den Beweis von Satz 9.1 genügt, für jedes kohomologisch uniforme Schema \mathbb{X} Elemente $\ell \in R_1$ und $\varphi \in \mathfrak{J}_{\sigma+1}$ zu finden, so daß die Bedingungen 9.2.a) – c) für $r = \ell^\sigma$ und φ erfüllt sind. Diese Aufgabe reduzieren wir im weiteren Verlauf auf ein Problem der linearen Algebra. An dieser Stelle erinnern wir noch einmal an Lemma 1.11.b und Korollar 3.10, wo wir explizite Basen $\{g_1, \dots, g_{s-\Delta}\}$ von R_σ und $\{\pi_1, \dots, \pi_\Delta\}$ von $\mathfrak{J}_{\sigma+1}$ konstruiert haben.

9.4. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, sei $r \in R_\sigma$, und sei $\varphi \in \mathfrak{J}_{\sigma+1}$. Wir schreiben $r = a_1g_1 + \dots + a_{s-\Delta}g_{s-\Delta}$ mit $a_1, \dots, a_{s-\Delta} \in K$ sowie $\varphi = c_1\pi_1 + \dots + c_\Delta\pi_\Delta$ mit $c_1, \dots, c_\Delta \in K$. Jetzt setzen wir $b_i = a_1\beta_{1i} + \dots + a_{s-\Delta}\beta_{s-\Delta i}$ für $i = 1, \dots, \Delta$ sowie $d_j = c_1\beta_{j1} + \dots + c_\Delta\beta_{j\Delta}$ für $j = 1, \dots, s - \Delta$. Ferner definieren

wir die Matrix

$$M(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -b_1 & & 0 & c_1\beta_{11} & \cdots & c_1\beta_{s-\Delta 1} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -b_\Delta & c_\Delta\beta_{1\Delta} & \cdots & c_\Delta\beta_{s-\Delta \Delta} \\ a_1\beta_{11} & \cdots & a_1\beta_{1\Delta} & -d_1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{s-\Delta}\beta_{s-\Delta 1} & \cdots & a_{s-\Delta}\beta_{s-\Delta \Delta} & 0 & & -d_{s-\Delta} \end{pmatrix}$$

Dann sind die Bedingungen 9.2.a) – c) äquivalent mit $\text{rk } M(r, \varphi) = s - 1$.

Beweis: Mit Hilfe von Korollar 3.12 berechnen wir

$$\begin{aligned} r\pi_i &= a_1g_1\pi_i + \cdots + a_{s-\Delta}g_{s-\Delta}\pi_i \\ &= a_1x_0^\sigma (\beta_{1i}f_{\Delta+1} - \beta_{1i}f_i) + \cdots + a_{s-\Delta}x_0^\sigma (\beta_{s-\Delta i}f_s - \beta_{s-\Delta i}f_i) \\ &= x_0^\sigma (-b_i f_i + a_1\beta_{1i}f_{\Delta+1} + \cdots + a_{s-\Delta}\beta_{s-\Delta i}f_s) \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, \Delta$ sowie

$$\begin{aligned} g_j\varphi &= c_1g_j\pi_1 + \cdots + c_\Delta g_j\pi_\Delta \\ &= c_1x_0^\sigma (\beta_{j1}f_{\Delta+j} - \beta_{j1}f_1) + \cdots + c_\Delta x_0^\sigma (\beta_{j\Delta}f_{\Delta+j} - \beta_{j\Delta}f_\Delta) \\ &= x_0^\sigma (-c_1\beta_{j1}f_1 - \cdots - c_\Delta\beta_{j\Delta}f_\Delta + d_j f_{\Delta+j}) \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, s - \Delta$. Also repräsentieren die Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} T_1^{2\sigma+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_s^{2\sigma+1} \end{pmatrix} \cdot M(r, \varphi)$$

die Bilder von $r\pi_1, \dots, r\pi_\Delta, -g_1\varphi, \dots, -g_{s-\Delta}\varphi$ unter der Injektion $\iota : R \hookrightarrow K[T_1] \times \cdots \times K[T_s]$ aus dem ersten Abschnitt. Somit ist die Bedingung $\text{rk } M(r, \varphi) = s - 1$ äquivalent damit, daß der K -Vektorraum $r \cdot \mathfrak{I}_{\sigma+1} + R_\sigma \cdot \varphi$ die Dimension $s - 1$ hat. Dies ist wiederum äquivalent mit $\dim_K(r \cdot \mathfrak{I}_{\sigma+1} \cap R_\sigma \cdot \varphi) = 1$, also mit den Bedingungen 9.2.a) – c). \square

9.5. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, und sei $r = a_1g_1 + \cdots + a_{s-\Delta}g_{s-\Delta} \in R_\sigma$ mit $a_1, \dots, a_{s-\Delta} \in K$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- Es gibt ein Element $\varphi \in \mathfrak{I}_{\sigma+1}$, so daß die Bedingungen 9.2.a) – c) erfüllt sind.
- Die Matrix

$$\mathfrak{M}(r) = \begin{pmatrix} -b_1 & & 0 & a_1\beta_{11} & \cdots & a_{s-\Delta}\beta_{s-\Delta 1} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -b_\Delta & a_1\beta_{1\Delta} & \cdots & a_{s-\Delta}\beta_{s-\Delta \Delta} \\ \beta_{11}Y_1 & \cdots & \beta_{1\Delta}Y_\Delta & -D_1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ \beta_{s-\Delta 1}Y_1 & \cdots & \beta_{s-\Delta \Delta}Y_\Delta & 0 & & -D_{s-\Delta} \end{pmatrix}$$

hat den Rang $s - 1$.

Hierbei sei $b_i = a_1\beta_{1i} + \cdots + a_{s-\Delta}\beta_{s-\Delta i}$ für $i = 1, \dots, \Delta$, die Symbole Y_1, \dots, Y_Δ bedeuten unabhängige Variable über K , und für $j = 1, \dots, s - \Delta$ sei $D_j = \beta_{j1}Y_1 + \cdots + \beta_{j\Delta}Y_\Delta$.

Beweis: Dies folgt aus Satz 9.4, denn die Matrix $\mathfrak{M}(r)$ hat genau dann den Rang $s - 1$, wenn eine ihrer Spezialisierungen $M(r, \varphi)^{\text{transp.}}$ den Rang $s - 1$ hat. \square

Unser Ziel ist es also nun zu zeigen, daß es zu jedem kohomologisch uniformen Schema \mathbb{X} ein Element $\ell \in R_1$ gibt mit $\text{rk } \mathfrak{M}(\ell^\sigma) = s - 1$. Unter einer zusätzlichen Voraussetzung ist dies jetzt bereits möglich.

9.6. Korollar. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema.

a) Gibt es in der Matrix \mathfrak{B} eine Zeile $(\beta_{1i}, \dots, \beta_{s-\Delta i})$, in der alle Einträge ungleich null sind, so gilt $\text{rk } \mathfrak{M}(x_0^\sigma) = s - 1$ und die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} erfüllt die Ungleichungen von Satz 9.1.

b) Ist \mathbb{X} ein $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniformes Schema, so gilt $\text{rk } \mathfrak{M}(x_0^\sigma) = s - 1$.

Beweis: Um Behauptung a) zu beweisen, nehmen wir o.E. an, daß $\beta_{11} \neq 0, \dots, \beta_{s-\Delta 1} \neq 0$ gilt. Dann streichen wir die erste Zeile und die erste Spalte aus der Matrix $\mathfrak{M}(x_0^\sigma)$. Der Koeffizient von $Y_1^{s-\Delta}$ in der Determinante der restlichen Matrix ist $(-\beta_{11}) \cdots (-\beta_{s-\Delta 1}) \neq 0$. Für den Beweis von Teil b) erinnern wir an Korollar 3.12, wo gezeigt wurde, daß für alle $i = 1, \dots, \Delta$ und $j = 1, \dots, s - \Delta$ die Gleichung $g_j \pi_i = \beta_{ji}(h_{\Delta+j-1} - \delta_{i1}h_{i-1})$ gilt. Da die Multiplikationsabbildung $R_\sigma \otimes \mathfrak{I}_{\sigma+1} \rightarrow \mathfrak{I}_{2\sigma+1}$ nach Satz 7.6 biinjektiv ist, müssen alle Einträge β_{ji} von \mathfrak{B} ungleich null sein, und Teil a) liefert die Behauptung. \square

In Anbetracht dieses Korollars stellt sich natürlich die Frage, ob der Rang von $\mathfrak{M}(x_0^\sigma)$ für alle kohomologisch uniformen Schemata gleich $s - 1$ ist. Das folgende Beispiel belegt, daß dem nicht so ist, und daß wir $\text{rk } \mathfrak{M}(\ell^\sigma) = s - 1$ allenfalls für ein generisch gewähltes Element $\ell \in R_1$ erhoffen können.

9.7. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \notin \{2, 3\}$. Das reduzierte 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ bestehe aus den sechs Punkten $P_1 = (1:1:1:0)$, $P_2 = (1:2:0:1)$, $P_3 = (1:0:0:0)$, $P_4 = (1:1:0:0)$, $P_5 = (1:0:1:0)$ und $P_6 = (1:0:0:1)$. Dann gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 4 \ 6 \ 6 \ \cdots$ sowie $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$ und $\Delta_{\mathbb{X}} = 2$. Wir berechnen auch die Matrix \mathfrak{B} und erhalten

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da die Einträge der ersten beiden Spalten ungleich null sind, zeigt Satz 8.3, daß \mathbb{X} kohomologisch uniform ist. Es gilt jedoch

$$\text{rk } \mathfrak{M}(x_0^\sigma) = \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ Y_1 & 2Y_2 & -Y_1 - 2Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ -Y_1 & -2Y_2 & 0 & Y_1 + 2Y_2 & 0 & 0 \\ -Y_1 & 0 & 0 & 0 & Y_1 & 0 \\ 0 & -Y_2 & 0 & 0 & 0 & Y_2 \end{pmatrix} = 4 = s - 2.$$

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, daß die Umkehrung von Korollar 9.3.b ebenfalls richtig ist. Auf diese Weise erhalten wir eine Charakterisierung der kohomologischen Uniformität mit deren Hilfe wir Satz 9.1 in allgemeineren Situationen beweisen können.

Für den Rest dieses Abschnitts seien Y_1, \dots, Y_Δ und $Z_1, \dots, Z_{s-\Delta}$ unabhängige Variable über K , und wir setzen $B_i = \beta_{1i}Z_1 + \dots + \beta_{s-\Delta i}Z_{s-\Delta}$ für $i = 1, \dots, \Delta$ sowie $D_j = \beta_{j1}Y_1 + \dots + \beta_{j\Delta}Y_\Delta$ für $j = 1, \dots, s - \Delta$.

9.8. Lemma. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, sei $1 \leq u < \Delta$, sei $1 \leq v < s - \Delta$, und sei $M_{u,v}$ die Matrix*

$$M_{u,v} = \begin{pmatrix} -B_1 & & 0 & \beta_{11}Z_1 & \cdots & \beta_{v1}Z_v \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -B_u & \beta_{1u}Z_1 & \cdots & \beta_{vu}Z_v \\ \beta_{11}Y_1 & \cdots & \beta_{1u}Y_u & -D_1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ \beta_{v1}Y_1 & \cdots & \beta_{vu}Y_u & 0 & & -D_v \end{pmatrix}$$

Gilt dann $\det M_{u,v} = 0$, so zerfällt \mathbb{X} kohomologisch.

Beweis: Wir schließen mit vollständiger Induktion nach $u+v$. Im Fall $u+v = 2$ müssen wir die Matrix $M_{1,1} = \begin{pmatrix} -B_1 & \beta_{11}Z_1 \\ \beta_{11}Y_1 & -D_1 \end{pmatrix}$ betrachten. Wegen $\det M_{1,1} = 0$ kann keine der Variablen Y_2, \dots, Y_Δ bzw. $Z_2, \dots, Z_{s-\Delta}$ in B_1 bzw. D_1 vorkommen, d.h. es gilt $\beta_{12} = \dots = \beta_{1\Delta} = 0$ sowie $\beta_{21} = \dots = \beta_{s-\Delta 1} = 0$, und die Matrix \mathfrak{B} zerfällt.

Um den Induktionsschritt zu beweisen, führen wir auf dem Polynomring $K[Y_1, \dots, Y_\Delta, Z_1, \dots, Z_{s-\Delta}]$ die Graduierung $\deg Y_1 = \dots = \deg Y_\Delta = \deg Z_1 = \dots = \deg Z_v = 0$ und $\deg Z_{v+1} = \dots = \deg Z_{s-\Delta} = 1$ ein. Wir betrachten die Terme höchsten Grades in der Entwicklung des Polynoms $\det M_{u,v}$ bzgl. dieser Graduierung. Offenbar kommen die Variablen $Z_{v+1}, \dots, Z_{s-\Delta}$ nur in B_1, \dots, B_u vor. O.B.d.A. können wir die Punkte $\{P_1, \dots, P_u\}$ so umnumerieren, daß $\{1, \dots, u'\}$ mit $1 \leq u' \leq u$ gerade diejenigen Indizes i aus der Menge $\{1, \dots, u\}$ sind, für die $\beta_{v+1 i} = \dots = \beta_{s-\Delta i} = 0$ gilt. Hierbei muß $u' \geq 1$ sein, denn $u' = 0$ würde bedeuten, daß die Leitform von $\det M_{u,v}$ gegeben ist durch

$$\pm(\beta_{v+1 1}Z_{v+1} + \dots + \beta_{s-\Delta 1}Z_{s-\Delta}) \cdots (\beta_{v+1 u}Z_{v+1} + \dots + \beta_{s-\Delta u}Z_{s-\Delta}) \cdot D_1 \cdots D_v \neq 0,$$

im Widerspruch zu $\det M_{u,v} = 0$. Ist nun $u' \geq 1$, so sind die Terme höchsten Grades in der Entwicklung von $\det M_{u,v}$ gegeben durch

$$\pm(\beta_{v+1 u'+1}Z_{v+1} + \dots + \beta_{s-\Delta u'+1}Z_{s-\Delta}) \cdots (\beta_{v+1 u}Z_{v+1} + \dots + \beta_{s-\Delta u}Z_{s-\Delta}) \cdot \det M_{u',v}.$$

Insbesondere folgt die Behauptung im Fall $u' < u$ aus der Induktionsvoraussetzung, so daß wir nur noch den Fall $u' = u$ betrachten müssen, also den Fall $\beta_{v+1 i} = \dots = \beta_{s-\Delta i} = 0$ für $i = 1, \dots, u$.

In diesem Fall graduieren wir den Polynomring $K[Y_1, \dots, Y_\Delta, Z_1, \dots, Z_{s-\Delta}]$ durch $\deg Y_1 = \dots = \deg Y_u = \deg Z_1 = \dots = \deg Z_{s-\Delta} = 0$ und $\deg Y_{u+1} = \dots = \deg Y_\Delta = 1$. Wiederum betrachten wir die Terme höchsten Grades in der Entwicklung von $\det M_{u,v}$ bzgl. dieser Graduierung und stellen fest, daß die Variablen Y_{u+1}, \dots, Y_Δ nur in D_1, \dots, D_v vorkommen. O.E. numerieren wir dann $\{P_{\Delta+1}, \dots, P_{\Delta+v}\}$ so um, daß $\{1, \dots, v'\}$ mit $1 \leq v' \leq v$ genau diejenigen Indizes j aus der Menge $\{1, \dots, v\}$ sind, für die $\beta_{j u+1} = \dots = \beta_{j \Delta} = 0$ gilt. Auch hier muß $v' \geq 1$ gelten, weil im Fall $v' = 0$ die Leitform von $\det M_{u,v}$ gegeben wäre durch

$$\pm(\beta_{1 u+1} Y_{u+1} + \dots + \beta_{1 \Delta} Y_\Delta) \cdots (\beta_{v u+1} Y_{u+1} + \dots + \beta_{v \Delta} Y_\Delta) \cdot B_1 \cdots B_u \neq 0,$$

was der Voraussetzung $\det M_{u,v} \neq 0$ widerspräche. Gilt $v' \geq 1$, so ist die Summe der Terme höchsten Grades in der Entwicklung von $\det M_{u,v}$ gegeben durch

$$\pm(\beta_{v'+1 u+1} Y_{u+1} + \dots + \beta_{v'+1 \Delta} Y_\Delta) \cdots (\beta_{v u+1} Y_{u+1} + \dots + \beta_{v \Delta} Y_\Delta) \cdot \det M_{u,v'},$$

d.h. die Behauptung folgt für $v' < v$ wieder aus der Induktionsvoraussetzung.

Schließlich bleibt nur noch der Fall $u' = u$ und $v' = v$ zu betrachten. In diesem Fall gilt $\beta_{v+1 i} = \dots = \beta_{s-\Delta i} = 0$ für $i = 1, \dots, u$ sowie $\beta_{j u+1} = \dots = \beta_{j \Delta} = 0$ für $j = 1, \dots, v$. Offensichtlich zerfällt die Matrix \mathfrak{B} wiederum. \square

9.9. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema. Dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent.*

a) \mathbb{X} ist kohomologisch uniform.

b) Es gibt Elemente $r \in R_\sigma$ und $\varphi \in \mathfrak{I}_{\sigma+1}$, so daß die Bedingungen 9.2.a) – c) erfüllt sind.

Beweis: Wegen Korollar 9.3.b genügt es zu zeigen, daß Bedingung b) aus a) folgt. Nach Satz 9.5 müssen wir also ein Element $r = a_1 g_1 + \dots + a_{s-\Delta} g_{s-\Delta} \in R_\sigma$ mit $a_1, \dots, a_{s-\Delta} \in K$ finden, so daß $\text{rk } \mathfrak{M}(r) = s-1$ gilt. Dazu brauchen wir nur zu zeigen, daß die Matrix

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} -B_1 & & 0 & \beta_{11} Z_1 & \cdots & \beta_{s-\Delta 1} Z_{s-\Delta} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -B_\Delta & \beta_{1\Delta} Z_1 & \cdots & \beta_{s-\Delta \Delta} Z_{s-\Delta} \\ \beta_{11} Y_1 & \cdots & \beta_{1\Delta} Y_\Delta & -D_1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ \beta_{s-\Delta 1} Y_1 & \cdots & \beta_{s-\Delta \Delta} Y_\Delta & 0 & & -D_{s-\Delta} \end{pmatrix}$$

den Rang $s-1$ besitzt. Sei \mathfrak{M}' die Matrix, die man erhält, wenn man in \mathfrak{M} die letzte Zeile und die letzte Spalte streicht. Wir zeigen nun, daß \mathbb{X} kohomologisch zerfällt, wenn $\det \mathfrak{M}' = 0$ ist. Dazu bemerken wir, daß die Variable $Z_{s-\Delta}$ nur in den Einträgen $-B_1, \dots, -B_\Delta$ von \mathfrak{M}' vorkommt. O.E. sei $1 \leq u \leq \Delta$ so, daß $\beta_{s-\Delta 1} = \dots = \beta_{s-\Delta u} = 0$ und $\beta_{s-\Delta u+1} \neq 0, \dots, \beta_{s-\Delta \Delta} \neq 0$ gilt. Da \mathbb{X} 1-uniform ist, gilt $Lf_s \neq 0$ und

$u < \Delta$. Dann ist die Summe der Terme höchsten Grades in $Z_{s-\Delta}$ in der Entwicklung von $\det \mathfrak{M}'$ gegeben durch

$$(-\beta_{s-\Delta, u+1}) \cdots (-\beta_{s-\Delta, \Delta}) \cdot \det M_{u, s-\Delta-1},$$

und eine Anwendung von Lemma 9.8 liefert die Behauptung. \square

Mit diesem Satz haben wir also eine weitere Charakterisierung kohomologisch uniformer Schemata gefunden. Im Fall $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$ können wir mit seiner Hilfe bereits den Rang von $\mathfrak{M}(\ell^\sigma)$ für generisch gewählte Elemente $\ell \in R_1$ bestimmen.

9.10. Korollar. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema mit $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$. Für generisch gewählte Elemente $\ell \in R_1$ gilt dann $\text{rk } \mathfrak{M}(\ell) = s - 1$.*

Beweis: Die Bedingung $\text{rk } \mathfrak{M}(\ell) > s - 2$ definiert eine Zariski-offene Teilmenge des affinen Raums $\mathbb{A}(R_1)$, und diese Teilmenge ist nach den Sätzen 9.5 sowie 9.9 nicht leer. \square

Um nun Satz 9.1 in voller Allgemeinheit zu beweisen, müssen wir den Rang von $\mathfrak{M}(\ell)$ für generisch gewählte Elemente $\ell \in R_1$ auch im Fall $\sigma_{\mathbb{X}} \geq 2$ bestimmen. Das nächste Lemma und der darauffolgende Satz bilden daher den Kern des Beweises von Satz 9.1.

9.11. Lemma *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein nicht ausgeartetes, 0-dimensionales Unterschema mit $\sigma_{\mathbb{X}} \geq 2$, und sei $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K) > \sigma_{\mathbb{X}}$. Angenommen, es gibt Zahlen $i \in \{1, \dots, \Delta\}$ und $j \in \{1, \dots, s-\Delta\}$ sowie paarweise verschiedene Zahlen $\nu_1, \dots, \nu_j \in \{1, \dots, s-\Delta\}$, so daß für generisch gewählte Elemente $\ell \in R_1$ die Beziehung*

$$\ell(P_{\Delta+\nu_1})^\sigma \beta_{\nu_1, i} + \cdots + \ell(P_{\Delta+\nu_j})^\sigma \beta_{\nu_j, i} = 0$$

erfüllt ist. Dann gilt $\beta_{\nu_1, i} = \cdots = \beta_{\nu_j, i} = 0$.

Beweis: Sei $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(A_\sigma)$ mit $N = \binom{d+\sigma}{d} - 1$ der zu $A_\sigma = K[X_0, \dots, X_d]_\sigma$ assoziierte projektive Raum. Verwenden wir als K -Basis von A_σ die lexikographisch geordnete Menge $\{X_0^\sigma, X_0^{\sigma-1}X_1, \dots, X_d^\sigma\}$ aller Monome vom Grad σ , und ist $L = \lambda_0 X_0 + \cdots + \lambda_d X_d \in A_1$ mit $\lambda_0, \dots, \lambda_d \in K$ eine Linearform, so ist $L^\sigma \in A_\sigma$ in dieser Basis gegeben durch das Tupel $(\lambda_0^\sigma, \sigma \lambda_0^{\sigma-1} \lambda_1, \dots, \lambda_d^\sigma)$, wobei der Koeffizient von $\lambda_0^{\nu_0} \cdots \lambda_d^{\nu_d}$ der Polynomkoeffizient $\binom{\sigma}{\nu_0, \dots, \nu_d}$ ist. Wegen $\text{char}(K) \notin \{2, \dots, \sigma\}$ sind diese Koeffizienten alle ungleich null. In der lexikographisch geordneten Basis $\{\binom{\sigma}{\nu_0, \dots, \nu_d} X_0^{\nu_0} \cdots X_d^{\nu_d} \mid \nu_0 + \cdots + \nu_d = \sigma\}$ ist L^σ dann gegeben durch das Tupel $(\lambda_0^\sigma, \lambda_0^{\sigma-1} \lambda_1, \dots, \lambda_d^\sigma)$. Die Menge aller Elemente der Form L^σ mit $L \in A_1$ bildet also gerade die Menge aller abgeschlossenen Punkte einer Veronese-Varietät V , nämlich der σ -ten Veronese Einbettung von \mathbb{P}^d in \mathbb{P}^N (vgl. auch [Ge], S. 34).

Nun betrachten wir den linearen Teilraum $\Lambda = \mathbb{P}((I_{\mathbb{X}})_\sigma)$ von \mathbb{P}^N . Er hat die Kodimension $\text{codim}(\Lambda, \mathbb{P}^N) = s - \Delta$. Da $I_{\mathbb{X}}$ ein Radikalideal ist, folgt aus $L^\sigma \in (I_{\mathbb{X}})_\sigma$ für ein $L \in A_1$ schon $L \in I_{\mathbb{X}}$. Dies ist jedoch nur für $L = 0$ möglich, da \mathbb{X} nicht ausgeartet ist. Insgesamt erhalten wir $\Lambda \cap V = \emptyset$.

Jetzt sei $\pi : \mathbb{P}^N \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^{s-\Delta-1} = \mathbb{P}(R_\sigma)$ der für $F \in A_\sigma \setminus (I_{\mathbb{X}})_\sigma$ durch $\langle F \rangle \mapsto \langle F + I_{\mathbb{X}} \rangle$ gegebene Morphismus. Wegen $\Lambda \cap V = \emptyset$ ist $\bar{V} = \pi(V) \subseteq \mathbb{P}^{s-\Delta-1}$ ein abgeschlossenes Unterschema (vgl. [E], 14.2), und da V bekanntlich irreduzibel und nicht ausgeartet ist, gilt dies auch für \bar{V} . Mithin ist die Menge aller abgeschlossenen Punkte von $\mathbb{P}(R_\sigma)$ der Form ℓ^σ mit $\ell \in R_1$ in keiner Hyperebene von $\mathbb{P}(R_\sigma)$ enthalten.

Nun betrachten wir das Koordinatensystem von $\mathbb{P}(R_\sigma)$, das zu der K -Basis $\{g_1, \dots, g_{s-\Delta}\}$ von R_σ gehört. Wegen $\ell^\sigma = \ell(P_{\Delta+1})^\sigma g_1 + \dots + \ell(P_s)^\sigma g_{s-\Delta}$ ist der zu $\ell^\sigma \in R_\sigma$ assoziierte abgeschlossene Punkt von $\mathbb{P}(R_\sigma)$ in diesem Koordinatensystem gegeben durch $P = (\ell(P_{\Delta+1})^\sigma : \dots : \ell(P_s)^\sigma)$. Nach Voraussetzung liegt er für generisch gewählte $\ell \in R_1$ auf der Varietät $H = \mathcal{Z}(\beta_{\nu_1 i} X_{\nu_1} + \dots + \beta_{\nu_j i} X_{\nu_j}) \subseteq \mathbb{P}(R_\sigma)$. Daher kann H keine Hyperebene von $\mathbb{P}(R_\sigma)$ sein, d.h. es muß $H = \mathbb{P}(R_\sigma)$ und $\beta_{\nu_1 i} = \dots = \beta_{\nu_j i} = 0$ gelten. \square

9.12. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, und sei $\ell \in R_1$ ein generisch gewähltes Element. Dann gilt $\text{rk } \mathfrak{M}(\ell^\sigma) = s - 1$.*

Beweis: Wegen Korollar 9.10 können wir uns auf den Fall $\sigma_{\mathbb{X}} \geq 2$ beschränken. Wir numerieren die Punkte $\{P_{\Delta+1}, \dots, P_s\}$ so, daß für eine Zahl $t_1 \in \{1, \dots, s - \Delta\}$ gilt $\beta_{11} \neq 0, \dots, \beta_{t_1 1} \neq 0$ sowie $\beta_{t_1+1 1} = \dots = \beta_{s-\Delta 1} = 0$. Hierbei muß $t_1 \geq 1$ sein, denn nach Lemma 1.11.a haben wir $\beta_{11} + \dots + \beta_{s-\Delta 1} = -1$. Nun numerieren wir die Punkte $\{P_2, \dots, P_\Delta\}$ so, daß eines der Elemente $\beta_{12}, \dots, \beta_{t_1 2}$ ungleich null ist. Dies ist möglich, weil die Matrix \mathfrak{B} nicht zerfällt. Als nächstes numerieren wir die Punkte $\{P_{\Delta+t_1+1}, \dots, P_s\}$ so, daß für eine Zahl $t_1 \leq t_2 \leq s - \Delta$ gilt $\beta_{t_1+1 2} \neq 0, \dots, \beta_{t_2 2} \neq 0$ sowie $\beta_{t_2+1 2} = \dots = \beta_{s-\Delta 2} = 0$, und wir numerieren $\{P_3, \dots, P_\Delta\}$ so, daß eines der Elemente $\beta_{13}, \dots, \beta_{t_2 3}$ ungleich null ist. Indem wir so fortfahren, erhalten wir schließlich Zahlen $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq s - \Delta$, so daß die Matrix \mathfrak{B} die folgende Gestalt hat:

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{t_1 1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{12} & \cdots & \beta_{t_1 2} & \beta_{t_1+1 2} & \cdots & \beta_{t_2 2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \beta_{t_2+1 3} & \cdots & \beta_{t_3 3} & \cdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{1\Delta} & \cdots & \beta_{t_1 \Delta} & \beta_{t_1+1 \Delta} & \cdots & \beta_{t_2 \Delta} & \beta_{t_2+1 \Delta} & \cdots & \beta_{t_3 \Delta} & \cdots & \beta_{t_{\Delta-1}+1 \Delta} & \cdots & \beta_{s-\Delta \Delta} \end{pmatrix}$$

Dabei beachten wir, daß $t_\Delta = s - \Delta$ sein muß, da nach Satz 8.3 keine der Spalten von \mathfrak{B} gleich dem Nullvektor ist. Für $j = 1, \dots, s - \Delta$ setzen wir $\lambda_j = \ell(P_{\Delta+j})^\sigma$. Dann gelten für generisch gewählte Elemente $\ell \in R_1$ nach Lemma 9.11 die Ungleichungen $\gamma_2 = \lambda_1 \beta_{12} + \dots + \lambda_{t_1} \beta_{t_1 2} \neq 0, \dots, \gamma_\Delta = \lambda_1 \beta_{1\Delta} + \dots + \lambda_{t_{\Delta-1}} \beta_{t_{\Delta-1} \Delta} \neq 0$.

Nach diesen Vorbereitungen addieren wir jetzt in der Matrix $\mathfrak{M}(\ell^\sigma)$ die Spalten

$2, \dots, \Delta + t_1$ zur ersten Spalte und erhalten die Matrix $\mathfrak{M}_0 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \beta_{11} & \cdots & \lambda_{t_1} \beta_{t_1 1} & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_2 & -b_2 & & 0 & \lambda_1 \beta_{12} & \cdots & \lambda_{t_1} \beta_{t_1 2} & \lambda_{t_1+1} \beta_{t_1+1 2} & \cdots & \lambda_{s-\Delta} \beta_{s-\Delta 2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_\Delta & 0 & & -b_\Delta & \lambda_1 \beta_{1\Delta} & \cdots & \lambda_{t_1} \beta_{t_1 \Delta} & \lambda_{t_1+1} \beta_{t_1+1 \Delta} & \cdots & \lambda_{s-\Delta} \beta_{s-\Delta \Delta} \\ 0 & \beta_{12} Y_2 & \cdots & \beta_{1\Delta} Y_\Delta & -D_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \beta_{t_1 2} Y_2 & \cdots & \beta_{t_1 \Delta} Y_\Delta & 0 & & -D_{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ D_{t_1+1} & \beta_{t_1+1 2} Y_2 & \cdots & \beta_{t_1+1 \Delta} Y_\Delta & 0 & \cdots & 0 & -D_{t_1+1} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ D_{s-\Delta} & \beta_{s-\Delta 2} Y_2 & \cdots & \beta_{s-\Delta \Delta} Y_\Delta & 0 & \cdots & 0 & 0 & & -D_{s-\Delta} \end{pmatrix}$$

Gilt $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$, so ist $t_1 = s - \Delta$, und die Behauptung $\text{rk } \mathfrak{M}(\ell^\sigma) = \text{rk } \mathfrak{M}_0 = s - 1$ folgt aus $(-D_1) \cdots (-D_{s-\Delta}) \neq 0$. Also nehmen wir ab sofort an, daß $\Delta_{\mathbb{X}} \geq 2$ gilt. Sei \mathfrak{M}_1 die Matrix, die wir aus \mathfrak{M}_0 erhalten, wenn wir die erste Zeile und die erste Spalte streichen. Wir zeigen die Behauptung $\text{rk } \mathfrak{M}(\ell^\sigma) = \text{rk } \mathfrak{M}_0 = s - 1$, indem wir $\det \mathfrak{M}_1 \neq 0$ beweisen. Dazu bemerken wir, daß die Variable Y_1 nur in den Einträgen $-D_1, \dots, -D_{t_1}$ von \mathfrak{M}_1 vorkommt. Sei \mathfrak{M}_2 die Matrix, die aus \mathfrak{M}_1 entsteht, wenn wir die Zeilen und Spalten streichen, die diese Einträge enthalten. Der Koeffizient von $Y_1^{t_1}$ in dem Polynom $\det \mathfrak{M}_1$ ist

$$(-\beta_{11}) \cdots (-\beta_{t_1 1}) \cdot \det \mathfrak{M}_2.$$

Also folgt $\det \mathfrak{M}_1 \neq 0$ aus $\det \mathfrak{M}_2 \neq 0$.

Allgemeiner definieren wir für jedes $i \in \{2, \dots, \Delta\}$ eine Teilmatrix \mathfrak{M}_i von \mathfrak{M}_1 durch $\mathfrak{M}_i =$

$$\begin{pmatrix} -b_i & & 0 & \lambda_{t_{i-1}+1} \beta_{t_{i-1}+1 i} & \cdots & \lambda_{t_i} \beta_{t_i i} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -b_\Delta & \lambda_{t_{i-1}+1} \beta_{t_{i-1}+1 \Delta} & \cdots & \lambda_{t_i} \beta_{t_i \Delta} & \lambda_{t_i+1} \beta_{t_i+1 \Delta} & \cdots & \lambda_{s-\Delta} \beta_{s-\Delta \Delta} \\ \beta_{t_{i-1}+1 i} Y_i & \cdots & \beta_{t_{i-1}+1 \Delta} Y_\Delta & -D_{t_{i-1}+1} & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{t_i i} Y_i & \cdots & \beta_{t_i \Delta} Y_\Delta & 0 & & -D_{t_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \beta_{t_i+1 \Delta} Y_\Delta & 0 & \cdots & 0 & -D_{t_i+1} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \beta_{s-\Delta \Delta} Y_\Delta & 0 & \cdots & 0 & 0 & & -D_{s-\Delta} \end{pmatrix}$$

Mit absteigender Induktion nach $i \in \{2, \dots, \Delta\}$ werden wir zeigen, daß $\det \mathfrak{M}_i = 0$ nur möglich ist, wenn die Matrix \mathfrak{B} zerfällt. Da \mathbb{X} kohomologisch uniform ist, liefert dies $\det \mathfrak{M}_2 \neq 0$.

Der Induktionsanfang ist der Fall $i = \Delta$. Gilt $\det \mathfrak{M}_\Delta = 0$, so folgt $t_{\Delta-1} < s - \Delta$, denn aus $t_{\Delta-1} = s - \Delta$ ergibt sich $\det \mathfrak{M}_\Delta = -b_\Delta \neq 0$ für generisch gewählte Elemente $\ell \in R_1$. Wir addieren ab der zweiten Spalte alle Spalten von \mathfrak{M}_Δ zur ersten Spalte und erhalten die Matrix

$$\mathfrak{M}'_\Delta = \begin{pmatrix} -\gamma_\Delta & \lambda_{t_{\Delta-1}+1}\beta_{t_{\Delta-1}+1\Delta} & \cdots & \lambda_{s-\Delta}\beta_{s-\Delta\Delta} \\ 0 & -D_{t_{\Delta-1}+1} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & -D_{s-\Delta} \end{pmatrix}$$

für die $\det \mathfrak{M}'_\Delta = \det \mathfrak{M}_\Delta \neq 0$ gilt, denn $-\gamma_\Delta = -\lambda_1\beta_{1\Delta} - \cdots - \lambda_{t_{\Delta-1}}\beta_{t_{\Delta-1}\Delta} \neq 0$.

Schließlich beweisen wir den Induktionsschritt. Sei $i < \Delta$ und $\det \mathfrak{M}_i = 0$. Gilt $t_{i-1} = t_i$, so ist der einzige von null verschiedene Eintrag in der ersten Spalte von \mathfrak{M}_i das Element $-b_i$, und wegen $\det \mathfrak{M}_i = (-b_i) \cdot \det \mathfrak{M}_{i+1}$ sowie wegen $b_i \neq 0$ für generisch gewählte Elemente $\ell \in R_1$ folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung. Also bleibt noch der Fall $t_{i-1} < t_i$ zu betrachten. Wir addieren die Spalten $2, \dots, \Delta - i + 1 + t_i - t_{i-1}$ von \mathfrak{M}_i zur ersten und erhalten die Matrix $\mathfrak{M}'_i =$

$$\begin{pmatrix} -\gamma_i & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{t_{i-1}+1}\beta_{t_{i-1}+1i} & \cdots & \lambda_{t_i}\beta_{t_i} & 0 & \cdots & 0 \\ \eta_{i+1} & -b_{i+1} & & 0 & \lambda_{t_{i-1}+1}\beta_{t_{i-1}+1i+1} & \cdots & \lambda_{t_i}\beta_{t_i i+1} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_\Delta & 0 & & -b_\Delta & \lambda_{t_{i-1}+1}\beta_{t_{i-1}+1\Delta} & \cdots & \lambda_{t_i}\beta_{t_i\Delta} & * & \cdots & * \\ 0 & \beta_{t_{i-1}+1i+1}Y_{i+1} & \cdots & \beta_{t_i\Delta}Y_\Delta & -D_{t_{i-1}+1} & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \beta_{t_i i+1}Y_{i+1} & \cdots & \beta_{t_i\Delta}Y_\Delta & 0 & & -D_{t_i} & 0 & \cdots & 0 \\ D_{t_i+1} & \beta_{t_i+1i+1}Y_{i+1} & \cdots & \beta_{t_i+1\Delta}Y_\Delta & 0 & \cdots & 0 & -D_{t_i+1} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_{s-\Delta} & \beta_{s-\Delta i+1}Y_{i+1} & \cdots & \beta_{s-\Delta\Delta}Y_\Delta & 0 & \cdots & 0 & 0 & & -D_{s-\Delta} \end{pmatrix}$$

Hierbei stehen die Einträge “*” für die entsprechenden Einträge der Matrix \mathfrak{M}_i . Die einzigen Einträge der Matrix \mathfrak{M}'_i , die die Variable Y_i enthalten, sind $-D_{t_{i-1}+1}, \dots, -D_{t_i}$. Wenn wir die Zeilen und Spalten aus \mathfrak{M}'_i streichen, in denen diese Einträge stehen, entsteht eine Matrix \mathfrak{M}''_i , für die der Koeffizient von $Y_i^{t_i-t_{i-1}}$ im Polynom $\det \mathfrak{M}'_i$ gegeben ist durch

$$(-\beta_{t_{i-1}+1i}) \cdots (-\beta_{t_i i}) \cdot \det \mathfrak{M}''_i.$$

Also folgt $\det \mathfrak{M}'_i = 0$ aus $\det \mathfrak{M}''_i = 0$. Nun ist jedoch das Element $-\gamma_i = -\lambda_1\beta_{1i} - \cdots - \lambda_{t_{i-1}}\beta_{t_{i-1}i} \neq 0$ der einzige von null verschiedene Eintrag in der ersten Zeile von \mathfrak{M}'_i , d.h. es gilt $\det \mathfrak{M}'_i = (-\gamma_i) \cdot \det \mathfrak{M}_{i+1}$, und die Behauptung folgt aus der Induktionsvoraussetzung. \square

Beweis von Satz 9.1: Die gesuchten Ungleichungen gelten auf Grund der Sätze 9.3.a, 9.5 und 9.12. \square

10. Die Hierarchie der Cayley-Bacharach Schemata

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir verschiedene Uniformitätsbegriffe für 0-dimensionale Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit Hilfe von Eigenschaften der Multiplikationsabbildung $\mu : R_{\sigma_{\mathbb{X}}} \otimes (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} \longrightarrow (\omega_R)_0$ charakterisiert. Im folgenden wollen wir versuchen, diese auf den ersten Blick recht unterschiedlichen Eigenschaften einem einheitlichen Konzept unterzuordnen. Als Anwendung erhalten wir dann eine ‘‘Hierarchie der Cayley-Bacharach Schemata’’, mit deren Hilfe wir den Grad der Uniformität eines 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ fein abgestuft klassifizieren können. Abkürzend schreiben wir in diesem Abschnitt wieder $\sigma = \sigma_{\mathbb{X}}$, $\Delta = \Delta_{\mathbb{X}}$, etc.

10.1. Definition. a) Für alle Elemente $r \in R_{\sigma}$ und $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma}$ sei $F(r, \varphi) \subseteq R_{\sigma} \oplus (\omega_R)_{-\sigma}$ das Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc} F(r, \varphi) & \longrightarrow & R_{\sigma} \\ \downarrow & \square & \downarrow \mu(-, \varphi) \\ (\omega_R)_{-\sigma} & \xrightarrow{\mu(r, -)} & (\omega_R)_0 \end{array}$$

d.h. es gilt $F(r, \varphi) = \{(r', \varphi') \in R_{\sigma} \oplus (\omega_R)_{-\sigma} \mid r'\varphi = r\varphi'\}$.

b) Für alle $i = 1, \dots, \deg \mathbb{X}$ definieren wir

$$Z_i = \{(r, \varphi) \in R_{\sigma} \oplus (\omega_R)_{-\sigma} \mid \dim_K F(r, \varphi) \geq i\}.$$

10.2. Bemerkungen. a) Es gilt $R_{\sigma} \oplus (\omega_R)_{-\sigma} = Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_{\deg \mathbb{X}} \supseteq \{(0, 0)\}$.

b) Die Mengen $Z_1, \dots, Z_{\deg \mathbb{X}}$ entsprechen Zariski-abgeschlossenen Teilmengen des zu $R_{\sigma} \oplus (\omega_R)_{-\sigma}$ assoziierten $(\deg \mathbb{X})$ -dimensionalen affinen Raums über K .

c) Satz 9.5 besagt, daß ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ genau dann kohomologisch uniform ist, wenn $Z_2 \subsetneq Z_1$ gilt.

d) Es gilt $R_{\sigma} \oplus \{0\} \subseteq Z_{\deg \mathbb{X} - \Delta}$, denn für alle Elemente $r \in R_{\sigma}$ ist $\dim_K F(r, 0) \geq \dim_K(R_{\sigma} \oplus \{0\}) = s - \Delta$.

e) Ebenso gilt $\{0\} \oplus (\omega_R)_{-\sigma} \subseteq Z_{\Delta}$, denn für alle Elemente $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma}$ ist $\dim_K F(0, \varphi) \geq \dim_K(\{0\} \oplus (\omega_R)_{-\sigma}) = \Delta$.

Verschiedene Uniformitätseigenschaften eines 0-dimensionalen Schemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ sind in der Struktur der Mengen $Z_2, \dots, Z_{\deg \mathbb{X}}$ gespeichert.

10.3. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema.

a) Es gilt $Z_{\deg \mathbb{X}} = \{r \in R_{\sigma} \mid r \cdot (\omega_R)_{-\sigma} = 0\} \oplus \{0\}$.

b) Genau dann ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema, wenn $Z_{\deg \mathbb{X}} = \{(0, 0)\}$ ist.

Beweis: Es genügt, Teil a) zu beweisen, da Satz 5.15 dann auch Aussage b) liefert. Offenbar liegen alle Elemente $(r, 0) \in R_{\sigma} \oplus (\omega_R)_{-\sigma}$ mit $r \in R_{\sigma}$ und $r \cdot (\omega_R)_{-\sigma} = 0$ in $Z_{\deg \mathbb{X}}$. Sei also ein Element $(r, \varphi) \in Z_{\deg \mathbb{X}}$ vorgegeben. Dann gilt $r\varphi' = r'\varphi$ für alle $r' \in R_{\sigma}$ und alle $\varphi' \in (\omega_R)_{-\sigma}$. Insbesondere folgt aus $x_0^{\sigma} \cdot \varphi = r \cdot 0 = 0$ und Satz 2.3.c, daß $\varphi = 0$ sein muß. Nun ergibt sich $r\varphi' = r' \cdot 0 = 0$ für alle $\varphi' \in (\omega_R)_{-\sigma}$, also die Behauptung. \square

10.4. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema mit $\deg \mathbb{X} \geq 3$.

a) Ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema mit $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$, so gilt $Z_2 = \cdots = Z_{\deg \mathbb{X}-1} = R_{\sigma} \oplus \{0\}$ und $Z_{\deg \mathbb{X}} = \{(0, 0)\}$.

b) Genau dann ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema mit $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$, wenn $Z_2 = R_{\sigma} \oplus \{0\}$ gilt.

Beweis: Zuerst beweisen wir Behauptung a). Nach Bemerkung 10.2.a und 10.2.d gilt $R_{\sigma} \oplus \{0\} \subseteq Z_{\deg \mathbb{X}-1} \subseteq Z_2$, so daß es genügt, die Inklusion $Z_2 \subseteq R_{\sigma} \oplus \{0\}$ zu zeigen. Angenommen, es gibt ein Element $(r, \varphi) \in Z_2$ mit $\varphi \neq 0$. Dann ist $\dim_K F(r, \varphi) \geq 2$, d.h. wir finden zwei K -linear unabhängige Paare $(r_1, \varphi_1), (r_2, \varphi_2) \in R_{\sigma} \oplus (\omega_R)_{-\sigma}$ mit $r_i \varphi = r \varphi_i$ für $i = 1, 2$. Wegen $\Delta = 1$ gibt es dann $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit $\varphi_i = \lambda_i \varphi$, und wir erhalten $r_i \varphi = \lambda_i r \varphi$ für $i = 1, 2$. Nach Korollar 5.11 ist \mathbb{X} lokal Gorenstein, so daß Satz 5.8 zeigt, daß für $i = 1, 2$ sogar $r_i - \lambda_i r = 0$ gelten muß. Doch nun stellt $(r_i, \varphi_i) = \lambda_i \cdot (r, \varphi)$ für $i = 1, 2$ einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der beiden Paare dar.

Zum Beweis von Teil b) setzen wir voraus, daß $Z_2 = R_{\sigma} \oplus \{0\}$ gilt. Wegen Bemerkung 3.2.a und 3.2.e haben wir $\{0\} \oplus (\omega_R)_{-\sigma} \subseteq Z_{\Delta} \subseteq Z_2$ für $\Delta \geq 2$, so daß in unserem Fall nur $\Delta = 1$ in Frage kommt. Wir wollen mit Hilfe von Satz 5.15 noch zeigen, daß \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema ist. Dazu wählen wir ein Element $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma} \setminus \{0\}$ und nehmen an, es gibt ein Element $r' \in R_{\sigma}$ mit $r' \varphi = 0$. Dann hat $K \cdot r' \oplus (\omega_R)_{-\sigma} \subseteq F(0, \varphi)$ die K -Vektorraumdimension zwei, was der Voraussetzung widerspricht. \square

Auch die Frage, ob $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniformes Schema ist, läßt sich – sogar auf mehrere Arten – an Hand der Struktur der Mengen $Z_2, \dots, Z_{\deg \mathbb{X}}$ entscheiden.

10.5. Lemma. Für jedes 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) \mathbb{X} ist $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniform.
- b) Die Multiplikationsabbildung $\mu : R_{\sigma} \otimes (\omega_R)_{-\sigma} \longrightarrow (\omega_R)_0$ ist bijektiv.
- c) Für alle $r \in R_{\sigma} \setminus \{0\}$ gilt $F(r, 0) = R_{\sigma} \oplus \{0\}$.
- d) Für alle $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma} \setminus \{0\}$ gilt $F(0, \varphi) = \{0\} \oplus (\omega_R)_{-\sigma}$.
- e) Es gilt $Z_{\deg \mathbb{X} - \Delta + 1} \cap (R_{\sigma} \oplus \{0\}) = \{(0, 0)\}$.
- f) Es gilt $Z_{\Delta + 1} \cap (\{0\} \oplus (\omega_R)_{-\sigma}) = \{(0, 0)\}$.

Beweis: Die Äquivalenz von a) und b) ist ein Spezialfall von Satz 7.6. Bedingungen c) und d) sind offensichtlich nur Umformulierungen von b). Bedingung e) ist äquivalent mit $\dim_K F(r, 0) \leq \deg \mathbb{X} - \Delta$ für alle $r \in R_{\sigma} \setminus \{0\}$, also wegen $R_{\sigma} \oplus \{0\} \subseteq F(r, 0)$ mit Bedingung c). Analog ergibt sich die Äquivalenz von Bedingung f) mit d). \square

Unser nächster Satz verallgemeinert Satz 10.4.b auf den Fall $\Delta_{\mathbb{X}} \geq 1$. Die Voraussetzung $\deg \mathbb{X} \geq 2 \cdot \Delta_{\mathbb{X}} + 1$ ist natürlich fast immer erfüllt und schließt nur einige triviale Fälle aus, deren direkte Betrachtung wir dem Leser überlassen.

10.6. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema mit $\deg \mathbb{X} \geq 2 \cdot \Delta_{\mathbb{X}} + 1$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) \mathbb{X} ist $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniform.
b) Es gilt $Z_{\Delta+1} = R_{\sigma} \oplus \{0\}$.

Beweis: Auf Grund des Lemmas brauchen wir nur zu zeigen, daß Bedingung b) aus a) folgt. Nach Bemerkung 10.2.a und 10.2.d gilt $R_{\sigma} \oplus \{0\} \subseteq Z_{\deg \mathbb{X} - \Delta} \subseteq Z_{\Delta+1}$. Angenommen, es gibt ein Paar $(r, \varphi) \in Z_{\Delta+1}$ mit $\varphi \neq 0$. Seien dann $(r_i, \varphi_i) \in R_{\sigma} \oplus (\omega_R)_{-\sigma}$ linear unabhängige Paare mit $r_i \varphi = r \varphi_i$ für $i = 1, \dots, \Delta + 1$. Wegen $\dim_K (\omega_R)_{-\sigma} = \Delta$ gibt es Elemente $\lambda_1, \dots, \lambda_{\Delta+1} \in K$ mit $\sum_{i=1}^{\Delta+1} \lambda_i \varphi_i = 0$, und aus $\sum_{i=1}^{\Delta+1} \lambda_i r_i \varphi = r \cdot \sum_{i=1}^{\Delta+1} \lambda_i \varphi_i = 0$ folgt $\sum_{i=1}^{\Delta+1} \lambda_i r_i = 0$. Dann stellt $\sum_{i=1}^{\Delta+1} \lambda_i \cdot (r_i, \varphi_i) = 0$ einen Widerspruch zur Wahl der Paare (r_i, φ_i) dar. \square

Für $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniforme 0-dimensionale Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ kann man wiederum die Mengen $Z_2, \dots, Z_{\deg \mathbb{X}}$ genauer angeben.

10.7. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniformes 0-dimensionales Unterschema mit $\deg \mathbb{X} \geq 2 \cdot \Delta_{\mathbb{X}} + 1 \geq 5$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Z_{\Delta} &= R_{\sigma} \oplus \{0\} \cup \{0\} \oplus (\omega_R)_{-\sigma} \\ \text{sowie} \quad Z_{\Delta+1} &= \dots = Z_{\deg \mathbb{X} - \Delta} = R_{\sigma} \oplus \{0\} \\ \text{und} \quad Z_{\deg \mathbb{X} - \Delta + 1} &= \dots = Z_{\deg \mathbb{X}} = \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Beweis: Wegen Bemerkung 10.2 brauchen wir nur die folgenden drei Behauptungen zu beweisen:

- 1) $Z_{\Delta} \subseteq R_{\sigma} \oplus \{0\} \cup \{0\} \oplus (\omega_R)_{-\sigma}$
- 2) $Z_{\Delta+1} \subseteq R_{\sigma} \oplus \{0\}$
- 3) $Z_{\deg \mathbb{X} - \Delta + 1} = \{(0, 0)\}$

Hierbei folgt Behauptung 2) wegen Lemma 10.5 aus 1), und Behauptung 3) ergibt sich auf Grund desselben Lemmas aus 2). Um Behauptung 1) zu zeigen, nehmen wir an, es gibt ein Paar $(r, \varphi) \in Z_{\Delta}$ mit $r \in R_{\sigma} \setminus \{0\}$ und $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma} \setminus \{0\}$. Dann existieren K -linear unabhängige Paare $(r_1, \varphi_1), \dots, (r_{\Delta}, \varphi_{\Delta}) \in R_{\sigma} \oplus (\omega_R)_{-\sigma}$ mit $r_i \varphi = r \varphi_i$ für $i = 1, \dots, \Delta$. Wären $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{\Delta}\}$ linear abhängig, d.h. gäbe es $\lambda_1, \dots, \lambda_{\Delta} \in K$ mit

$$0 = r \cdot 0 = r \cdot \left(\sum_{i=1}^{\Delta} \lambda_i \varphi_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{\Delta} \lambda_i r_i \right) \cdot \varphi,$$

so würde aus der Voraussetzung und Satz 7.6 folgen, daß $\sum_{i=1}^{\Delta} \lambda_i r_i = 0$ ist, und $\sum_{i=1}^{\Delta} \lambda_i \cdot (r_i, \varphi_i) = 0$ wäre ein Widerspruch zur Wahl der Paare (r_i, φ_i) . Also stellt $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{\Delta}\}$ eine K -Basis von $(\omega_R)_{-\sigma}$ dar, und wir finden $\lambda_1, \dots, \lambda_{\Delta} \in K$ mit $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_{\Delta} \varphi_{\Delta}$.

Nun ergibt sich aus $r \cdot \varphi = r \cdot \left(\sum_{i=1}^{\Delta} \lambda_i \varphi_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{\Delta} \lambda_i r_i \right) \cdot \varphi$ und Satz 7.6, daß $r = \sum_{i=1}^{\Delta} \lambda_i r_i$ gilt. Setzen wir diese Darstellungen in die Gleichungen $r_i \varphi = r \varphi_i$ ein, so erhalten wir $\sum_{j \neq i} \lambda_j r_j \varphi_j = \sum_{j \neq i} \lambda_j r_j \varphi_i$ für $i = 1, \dots, \Delta$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Elemente $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{\Delta}\}$ liefert dies $\lambda_i r_j = 0$ für $i, j \in \{1, \dots, \Delta\}$ mit $i \neq j$ sowie $\sum_{j \neq i} \lambda_j r_j = 0$ für $i = 1, \dots, \Delta$. O.E. sei $1 \leq \delta \leq \Delta$ so, daß $\lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_{\delta} \neq 0$ und $\lambda_{\delta+1} = \dots = \lambda_{\Delta} = 0$ gilt.

Im Fall $\delta = 1$ folgt nun $r_2 = \dots = r_\Delta = 0$ aus $\lambda_1 r_j = 0$ für $j \neq 1$ und $r_1 = 0$ aus $\sum_{j \neq 1} \lambda_j r_j = 0$, und im Fall $\delta \geq 2$ folgt $r_2 = \dots = r_\Delta = 0$ aus $\lambda_1 r_j = 0$ für $j \neq 1$ sowie $r_1 = 0$ aus $\lambda_2 r_j = 0$ für $j \neq 2$. In beiden Fällen erhalten wir $r = \sum_{i=1}^{\Delta} \lambda_i r_i = 0$, was unserer Annahme widerspricht. \square

Jetzt weisen wir noch auf die praktische Berechenbarkeit der Mengen $Z_2, \dots, Z_{\deg \mathbb{X}}$ hin. Insbesondere kann man die Bedingungen 10.2.c, 10.3.b, 10.4.b, 10.5.e, 10.5.f und 10.6.b mit den Mitteln der Computeralgebra effektiv prüfen.

10.8. Bemerkung. Wie in [K5] gezeigt wurde, kann man eine minimale Präsentation des kanonischen Moduls ω_R effektiv berechnen, wenn \mathbb{X} reduziert ist und die Koordinaten der Punkte von \mathbb{X} gegeben sind. Auch im nichtreduzierten Fall kann man eine solche Präsentation bestimmen, wenn das Verschwindungsideal $I_{\mathbb{X}}$ von $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ gegeben ist. Mit Hilfe des Satzes von Macaulay (vgl. z.B. [E], 15.3) findet man dann Monome, deren Restklassen Basen $\{g_1, \dots, g_{\deg \mathbb{X} - \Delta}\}$ von R_σ bzw. $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\Delta\}$ von $(\omega_R)_{-\sigma}$ bzw. $\{h_1, \dots, h_{\deg \mathbb{X} - 1}\}$ von $(\omega_R)_0$ darstellen. Als nächstes berechnet man die Repräsentationen

$$g_i \cdot \varphi_j = \gamma_{ij}^{(1)} h_1 + \dots + \gamma_{ij}^{(\deg \mathbb{X} - 1)} h_{\deg \mathbb{X} - 1}$$

der Produkte $g_i \cdot \varphi_j$ in der Basis $\{h_1, \dots, h_{\deg \mathbb{X} - 1}\}$. Nachdem man Unbestimmte $\{X_1, \dots, X_\Delta\}$ für die Koordinaten von r , Unbestimmte $\{Y_1, \dots, Y_{\deg \mathbb{X} - \Delta}\}$ für die Koordinaten von φ , Unbestimmte $\{X'_1, \dots, X'_\Delta\}$ für die Koordinaten von r' sowie Unbestimmte $\{Y'_1, \dots, Y'_{\deg \mathbb{X} - \Delta}\}$ für die Koordinaten von φ' eingeführt hat, übersetzt sich die Bedingung $r'\varphi = r\varphi'$ in ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \gamma_{ij}^{(1)} X_i Y'_j - \sum_{i,j} \gamma_{ij}^{(1)} Y_j X'_i &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{i,j} \gamma_{ij}^{(s-1)} X_i Y'_j - \sum_{i,j} \gamma_{ij}^{(s-1)} Y_j X'_i &= 0 \end{aligned}$$

in den Variablen $\{X'_1, \dots, X'_\Delta, Y'_1, \dots, Y'_{\deg \mathbb{X} - \Delta}\}$. Die Mengen $Z_2, \dots, Z_{\deg \mathbb{X}}$ werden dann als Unterschemata des affinen Raums $\mathbb{A}(KX_1 \oplus \dots \oplus KX_\Delta \oplus KY_1 \oplus \dots \oplus KY_{\deg \mathbb{X} - \Delta})$ durch die entsprechenden Ideale von Minoren der Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems definiert.

Diese Berechnungen vereinfachen sich im Fall reduzierter 0-dimensionaler Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ außerordentlich. Wie in [MR] bzw. [K5] bestimmen wir bei der Ausführung des Buchberger-Möller Algorithmus auch gleich Polynome $F_1, \dots, F_s \in A_{\sigma+1}$, deren Restklassen in R die bzgl. x_0 normierten Separatoren sind. Dann werden die Leitformen Lf_1, \dots, Lf_s durch die Polynome $F_1(0, X_1, \dots, X_d), \dots, F_s(0, X_1, \dots, X_d)$ repräsentiert, und wir können die Matrix \mathfrak{B} von \mathbb{X} bestimmen, indem wir in $\bar{R} = A/I_{\mathbb{X}} + (X_0)$ die K -linearen Relationen zwischen diesen Leitformen ausrechnen. Wegen Korollar 3.12 sind die Konstanten $\gamma_{ij}^{(k)}$ gegeben durch

$$\gamma_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \delta_{k \Delta + j - 1} \beta_{j1} & \text{für } i = 1 \\ \delta_{k \Delta + j - 1} \beta_{ji} - \delta_{k i - 1} \beta_{ji} & \text{für } i = 2, \dots, \Delta \end{cases}$$

und für $j = 1, \dots, s-\Delta$ sowie für $k = 1, \dots, s-1$. Bilden wir dann die Matrix, deren Minoren die Mengen Z_2, \dots, Z_s definieren, so erhalten wir

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{j=1}^{s-\Delta} \beta_{j2} Y_j & & 0 & -\beta_{12} X_2 & \cdots & -\beta_{s-\Delta 2} X_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \sum_{j=1}^{s-\Delta} \beta_{j\Delta} Y_j & -\beta_{1\Delta} X_\Delta & \cdots & -\beta_{s-\Delta\Delta} X_\Delta \\ -\beta_{11} Y_1 & \cdots & \cdots & -\beta_{1\Delta} Y_\Delta & \sum_{i=1}^{\Delta} \beta_{1i} X_i & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \\ -\beta_{s-\Delta 1} Y_1 & \cdots & \cdots & -\beta_{s-\Delta\Delta} Y_\Delta & 0 & & \sum_{i=1}^{\Delta} \beta_{s-\Delta i} X_i \end{pmatrix}$$

also gerade das Negative der unteren $s-1$ Zeilen der Matrix \mathfrak{M} aus dem Beweis von Satz 9.9.

Wie im Beweis dieses Satzes sieht man dann z.B., daß die Matrix $\widetilde{\mathfrak{M}}$ genau dann den maximalen Rang hat, wenn \mathbb{X} kohomologisch uniform ist. Andererseits definieren die maximalen Minoren von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ gerade die Menge Z_2 , so daß wir Bemerkung 10.2.c zurückerhalten.

Unser letzter Satz in diesem Kapitel faßt einige der vorgestellten Resultate zusammen.

10.9. Satz. *(Die Hierarchie der Cayley-Bacharach Schemata)*

Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema. Wir betrachten die folgenden Bedingungen.

- 1) \mathbb{X} ist arithmetisch Gorenstein.
- 2) \mathbb{X} ist ein Cayley-Bacharach Schema mit $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$.
- 2') Es gibt eine K -Basis $\{\varphi\}$ von $(\omega_R)_{-\sigma}$ mit $\text{Ann}_R(\varphi) = (0)$.
- 2'') Es gilt $Z_2 = R_\sigma \oplus \{0\}$.
- 3) \mathbb{X} ist $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniform.
- 3') Die Multiplikationsabbildung $\mu : R_\sigma \otimes (\omega_R)_{-\sigma} \longrightarrow (\omega_R)_0$ ist biinjektiv.
- 3'') Es gilt $Z_{\Delta+1} = R_\sigma \oplus \{0\}$.
- 4) \mathbb{X} ist ein Cayley-Bacharach Schema.
- 4') Die Multiplikationsabbildung $\mu : R_\sigma \otimes (\omega_R)_{-\sigma} \longrightarrow (\omega_R)_0$ ist nicht ausgeartet.
- 4'') Es gilt $Z_{\deg \mathbb{X}} = \{(0, 0)\}$.

Wir stellen die folgenden Behauptungen auf.

- a) Es gilt $1) \Rightarrow 2) \iff 2') \Rightarrow 3) \iff 3') \Rightarrow 4) \iff 4') \iff 4'')$.
- b) Ist $\deg \mathbb{X} \geq 2 \cdot \Delta_{\mathbb{X}} + 1$, so gilt auch $2) \iff 2'')$ sowie $3) \iff 3'')$.

Ist \mathbb{X} reduziert, so betrachten wir ferner die folgenden Bedingungen.

- 5) Alle Einträge der Matrix \mathfrak{B} sind ungleich null.
- 6) Es gibt eine Zeile in der Matrix \mathfrak{B} , in der alle Einträge ungleich null sind.
- 7) \mathbb{X} ist kohomologisch uniform.
- 7') Die Abbildung $\mu : R_\sigma \otimes (\omega_R)_{-\sigma} \longrightarrow (\omega_R)_0$ ist nicht ausgeartet und surjektiv.
- 7'') Es gibt Elemente $\ell \in R_1$ und $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma}$ mit $\dim_K F(\ell^\sigma, \varphi) = 1$.
- 7''') Es gilt $Z_2 \subsetneq Z_1$, d.h. es gibt $r \in R_\sigma$ und $\varphi \in (\omega_R)_{-\sigma}$ mit $\dim_K F(r, \varphi) = 1$.

Wir stellen in diesem Fall die folgenden zusätzlichen Behauptungen auf.

c) Es gilt $3) \Rightarrow 5) \Rightarrow 6) \Rightarrow 7) \iff 7') \iff 7'') \iff 7''') \Rightarrow 4)$.

d) Alle in a) und c) nicht behaupteten Implikationen " \Leftarrow " gelten nicht.

Beweis: Zuerst beweisen wir Behauptung a). Die Implikation $1) \Rightarrow 2)$ folgt aus Korollar 5.13, die Äquivalenz $2) \iff 2')$ folgt aus Satz 5.8, die Implikation $2) \Rightarrow 3)$ ist klar, die Äquivalenz $3) \iff 3')$ ist ein Spezialfall von Satz 7.6, die Implikation $3) \Rightarrow 4)$ folgt aus Bemerkung 7.3.b, die Äquivalenz $4) \iff 4')$ ist eine Aussage von Satz 5.15, und die Äquivalenz $4) \iff 4'')$ wurde in Satz 10.3.b gezeigt. Die Behauptung b) ergibt sich aus Satz 10.4.b und Satz 10.6.

Nun zeigen wir Behauptung c). Die Implikation $3) \Rightarrow 5)$ folgt wegen $3) \iff 3')$ aus Korollar 3.12, die Implikation $5) \Rightarrow 6)$ ist klar, die Implikation $6) \Rightarrow 7)$ folgt aus Satz 8.3, die Äquivalenz $7) \iff 7')$ ist die Aussage von Satz 8.8, die Äquivalenz $7) \iff 7'')$ gilt wegen Satz 9.9 und Bedingung 9.2.c, die Äquivalenz $7) \iff 7''')$ folgt aus Satz 9.5, und die Implikation $7) \Rightarrow 4)$ ist eine Konsequenz von Satz 8.3. Den Beweis von Behauptung d) erbringen wir mit Hilfe der nachstehenden Beispiele. \square

10.10. Beispiel. Besteht ein reduziertes 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ aus sieben generisch gewählten Punkten, so hat es die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 6 \ 7 \ 7 \ \dots$, erfüllt also $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$, und ist nach Beispiel 5.7 ein Cayley-Bacharach Schema. Jedoch kann \mathbb{X} in Anbetracht von Korollar 5.13 nicht arithmetisch Gorenstein sein. Daher gilt die Implikation $2) \Rightarrow 1)$ in Satz 10.9 nicht.

10.11. Beispiel. Besteht ein reduziertes 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ aus acht generisch gewählten Punkten, so hat es die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 6 \ 8 \ 8 \ \dots$ und erfüllt somit $\Delta_{\mathbb{X}} = 2$. Da jedes Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y} = 6$ die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{Y}} : 1 \ 3 \ 6 \ 6 \ \dots$ besitzt, ist \mathbb{X} ein $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniformes Schema. Also gilt die Implikation $3) \Rightarrow 2)$ in Satz 10.9 nicht.

10.12. Beispiel. Sei $\text{char}(K) = 3$, und sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_5\} \subseteq \mathbb{P}^2$ das reduzierte 0-dimensionale Unterschema mit $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (1:0:1)$, $P_3 = (1:1:0)$, $P_4 = (1:1:1)$ und $P_5 = (1:2:0)$. Dann ist die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} gegeben durch $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 5 \ 5 \ \dots$, und für jedes Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = 4$ gilt $H_{\mathbb{Y}} : 1 \ 3 \ 4 \ 4 \ \dots$. Somit ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema mit $\Delta_{\mathbb{X}} = 2$. Jedoch ist \mathbb{X} nach Beispiel 7.10 nicht $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniform. In der Tat hat $\mathbb{Y}_1 = \{P_1, P_2, P_3\} \subseteq \mathbb{X}$ die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{Y}_1} : 1 \ 3 \ 3 \ \dots$, während $\mathbb{Y}_2 = \{P_1, P_3, P_5\} \subseteq \mathbb{X}$ die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{Y}_2} : 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ \dots$ besitzt. Also gilt die Implikation $4) \Rightarrow 3)$ in Satz 10.9 nicht.

10.13. Beispiel. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, das aus den vier Punkten $P_1 = (1:0:0:0)$, $P_2 = (1:1:0:0)$, $P_3 = (1:0:1:0)$, $P_4 = (1:1:1:0)$ und vier weiteren, generisch gewählten Punkten P_5, \dots, P_8 bestehe. Z.B. sei $\text{char}(K) = 101$ und $P_5 = (1:-46:-41:8)$, $P_6 = (1:8:35:7)$, $P_7 = (1:-4:3:5)$ sowie $P_8 = (1:-28:2:46)$. Dann ist die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} gegeben durch $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 4 \ 8 \ 8 \ \dots$, es gilt $\Delta_{\mathbb{X}} = 4$, und \mathbb{X} ist ein Cayley-Bacharach Schema. Für die Matrix \mathfrak{B} errechnet sich (etwa mit Hilfe von

COP)

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 43 & 3 & 35 & 19 \\ 36 & 21 & 49 & -6 \\ -15 & 39 & -12 & -13 \\ -22 & -44 & 2 & -38 \end{pmatrix}$$

d.h. kein Eintrag von \mathfrak{B} ist gleich null. Jedoch ist \mathbb{X} nicht $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniform, denn das Unterschema $\mathbb{Y} = \{P_1, \dots, P_4\} \subseteq \mathbb{X}$ hat die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{Y}} : 1 \ 3 \ 4 \ 4 \ \dots$, für die $H_{\mathbb{Y}}(1) = 3 < 4 = \min\{H_{\mathbb{X}}(1), \deg \mathbb{Y}\}$ ist. Also gilt die Implikation 5) \Rightarrow 3) in Satz 10.9 nicht.

10.14. Beispiel. Sei $\text{char}(K) = 11$, und das reduzierte 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_7\} \subseteq \mathbb{P}^3$ bestehe aus den sieben Punkten $P_1 = (1:0:0:0)$, $P_2 = (1:1:0:0)$, $P_3 = (1:0:1:0)$, $P_4 = (1:1:1:0)$, $P_5 = (1:2:3:4)$, $P_6 = (1:2:4:-3)$ sowie $P_7 = (1:-1:1:-1)$. Dann hat \mathbb{X} die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 4 \ 7 \ 7 \ \dots$, und es gilt $\Delta_{\mathbb{X}} = 3$. Für die Matrix \mathfrak{B} errechnet sich

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d.h. die zweite und dritte Zeile haben alle Einträge ungleich null, nicht jedoch die erste Zeile. Also gilt die Implikation 6) \Rightarrow 5) in Satz 10.9 nicht.

10.15. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \neq 2$, und sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ das reduzierte 0-dimensionale Unterschema vom Grad sechs aus Beispiel 3.18. Wegen $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ und Satz 8.3 ist \mathbb{X} kohomologisch uniform. Jedoch enthält jede Zeile von \mathfrak{B} den Eintrag null. Also gilt die Implikation 7) \Rightarrow 6) in Satz 10.9 nicht.

Schließlich bemerken wir noch, daß jedes kohomologisch zerfallende 0-dimensionale Schema (z.B. die Schemata aus Beispiel 8.1 oder 8.14.a) zeigt, daß die Implikation 4) \Rightarrow 7) in Satz 10.9 nicht gilt.

III. Spezialfälle und Anwendungen

11. Level-Schemata

In Korollar 5.16, Satz 9.1 und Korollar 7.7 haben wir Ungleichungen für die Hilbert-Funktionen uniformer 0-dimensionaler Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ bewiesen, die umso stärkere Einschränkungen darstellten, je höher der Grad der Uniformität von \mathbb{X} war. Suchen wir nach noch strengeren Bedingungen, so stoßen wir auf den folgenden, von T. Hibi eingeführten Begriff.

11.1. Definition. Die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}}$ eines 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ heißt *makellos*, wenn für alle $i \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq 2i \leq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ gilt

$$\Delta H_{\mathbb{X}}(i-1) \leq \Delta H_{\mathbb{X}}(i) \leq \Delta H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} + 1 - i).$$

Mit anderen Worten verlangen wir, daß die Castelnuovo-Funktion von \mathbb{X} bis zur Mitte des Intervalls $[0, \sigma_{\mathbb{X}} + 1]$ ansteigt und in der zweiten Hälfte spiegelbildlich punktweise mindestens so große Werte annimmt wie in der ersten Hälfte.

In der Arbeit [Hi1] bewies T. Hibi in einer bestimmten kombinatorischen Situation, daß die Hilbert-Funktionen gewisser Ringe makellos sind. Wir wollen dieses Ergebnis – für unseren Fall adaptiert – nun erklären. Das Material für diesen Abschnitt stammt hauptsächlich aus [K3], §5.

Aus der Präsentation $R = A/I_{\mathbb{X}}$ erhalten wir $\bar{R} = K[X_1, \dots, X_d]/J_{\mathbb{X}}$ mit $J_{\mathbb{X}} = (F(0, X_1, \dots, X_d))_{F \in I_{\mathbb{X}}}$. Wir wählen eine gradkompatible Termordnung \leq_{τ} auf dem Polynomring $K[X_1, \dots, X_d]$ und betrachten das *Leittermideal* $\text{Lt}_{\tau}(J_{\mathbb{X}}) = (\text{Lt}_{\tau}(F))_{F \in J_{\mathbb{X}}}$ sowie das *Ordnungsideal*

$$O_{\tau}(J_{\mathbb{X}}) = \{m \in K[X_1, \dots, X_d] \text{ Monom} \mid m \notin \text{Lt}_{\tau}(J_{\mathbb{X}})\}.$$

Die Menge $O_{\tau}(J_{\mathbb{X}})$ ist ein Ordnungsideal von Monomen, d.h. für jedes Monom aus $O_{\tau}(J_{\mathbb{X}})$ sind auch alle seine Teiler in $O_{\tau}(J_{\mathbb{X}})$. (Für eine nähere Untersuchung dieser Begriffe verweisen wir z.B. auf [E], §15 oder [K9], Kap. 1.)

11.2. Definition. Ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ heißt *kombinatorisch rein*, wenn man einen Nichtnullteiler $x_0 \in R_1$ und eine gradkompatible Termordnung \leq_{τ} auf $K[X_1, \dots, X_d]$ so wählen kann, daß alle maximalen Elemente von $O_{\tau}(J_{\mathbb{X}})$ denselben Grad $\sigma_{\mathbb{X}} + 1$ haben.

Mit diesen Definitionen lautet der Satz von T. Hibi (vgl. [Hi1], 1.1 und 1.3) folgendermaßen.

11.3. Satz. *Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein kombinatorisch reines, 0-dimensionales Unterschema, so ist die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} makellos.*

Jedoch wäre es wünschenswert, eine Version dieses Satzes zu finden, die von den in Definition 11.2 getroffenen Wahlen unabhängig ist. Unser nächstes Beispiel zeigt, daß es nämlich in der Praxis schwierig sein kann nachzuprüfen, ob ein gegebenes 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ kombinatorisch rein ist.

11.4. Beispiel. a) Sei $\text{char}(K) \neq 2$, und sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_4\} \subseteq \mathbb{P}^2$ das reduzierte 0-dimensionale Unterschema mit $P_1 = (1:0:1)$, $P_2 = (1:0:2)$, $P_3 = (1:1:0)$ und $P_4 = (1:2:0)$. Dann gilt $J_{\mathbb{X}} = (X_1X_2, X_1^2+X_2^2, X_1^3, X_2^3)$, und egal wie wir die Termordnung \leq_τ wählen, stets besitzt $O_\tau(J_{\mathbb{X}})$ ein maximales Element vom Grad $1 < 2 = \sigma_{\mathbb{X}} + 1$.

b) Führen wir an dem angegebenen Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definierte Koordinatentransformation durch, so erhalten wir $\mathbb{X}' = \{P'_1, \dots, P'_4\} \subseteq \mathbb{P}^2$ mit $P'_1 = P_1$, $P'_2 = P_2$, $P'_3 = (1:1:1)$ und $P'_4 = (1:2:2)$. In diesem Fall ergibt sich $J_{\mathbb{X}'} = (X_1^2, X_1X_2 - X_2^2, X_1X_2^2, X_2^3)$, und wenn wir die gradkompatible Termordnung \leq_τ mit $X_1 <_\tau X_2$ wählen, so haben alle maximalen Elemente von $O_\tau(J_{\mathbb{X}'}) = \{1, X_1, X_2, X_1X_2\}$ den Grad $2 = \sigma_{\mathbb{X}} + 1$.

Auf Grund dieser Einwände erscheint es nützlich, die folgende algebraische Bedingung zu studieren.

11.5. Definition. Ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ heißt ein *Level-Schema* oder *rein*, wenn der kanonische Modul ω_R als R -Modul von seinen homogenen Elementen $(\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}}$ kleinsten Grades erzeugt wird.

Bevor wir den Zusammenhang dieses Begriffs mit der kombinatorischen Reinheit angeben, charakterisieren wir ihn auf verschiedene Weisen.

11.6. Satz. Für ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) \mathbb{X} ist ein Level-Schema.
- b) Der kanonische Modul $\omega_{\bar{R}} = \underline{\text{Hom}}_K(\bar{R}, K)$ von \bar{R} wird als \bar{R} -Modul von seinen homogenen Elementen $(\omega_{\bar{R}})_{-\sigma_{\mathbb{X}}-1}$ kleinsten Grades erzeugt.
- c) Für alle $i, j \geq 0$ mit $i + j \leq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ ist die Multiplikationsabbildung $\bar{R}_i \otimes \bar{R}_j \rightarrow \bar{R}_{i+j}$ nicht ausgeartet.
- d) Der Sockel $\mathfrak{S}(\bar{R}) = \{r \in \bar{R} \mid \bar{\mathfrak{m}} \cdot r = 0\}$ von \bar{R} ist gegeben durch $\mathfrak{S}(\bar{R}) = \bar{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$.

Beweis: Die Äquivalenz von a) und b) folgt daraus, daß x_0 nach Satz 2.3.b ein Nicht-nullteiler auf ω_R ist, daß nach [GW], 2.2.10 gilt $\omega_{\bar{R}} \cong (\omega_R/x_0 \cdot \omega_R)(1)$, und aus der graduierten Version des Lemmas von Nakayama. Offenbar ist b) damit äquivalent, daß die Multiplikationsabbildungen $\bar{R}_i \otimes (\omega_{\bar{R}})_{-\sigma_{\mathbb{X}}-1} \rightarrow (\omega_{\bar{R}})_{-\sigma_{\mathbb{X}}-1+i}$ für $i = 0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ surjektiv sind. Wegen $\omega_{\bar{R}} \cong \underline{\text{Hom}}_K(\bar{R}, K)$ ist dies äquivalent mit den Behauptungen c) und d). \square

Jetzt können wir zeigen, daß der Begriff der Level-Schemata eine Verallgemeinerung des Begriffs der kombinatorischen Reinheit darstellt. Der Beweis des folgenden Satzes beruht auf einer Idee von L. Robbiano.

11.7. Satz. *Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein kombinatorisch reines, 0-dimensionales Unterschema, so ist \mathbb{X} ein Level-Schema.*

Beweis: Sei $r \in \mathfrak{S}(\overline{R}) \setminus \{0\}$ ein homogenes Sockelelement von \overline{R} , und sei $r = F + J_{\mathbb{X}}$ mit einem homogenen Polynom $F \in K[X_1, \dots, X_d]$ vom Grad $\varrho = \deg r$. Für $i = 1, \dots, d$ gilt dann $X_i \cdot \text{Lt}_{\tau}(F) = \text{Lt}_{\tau}(X_i \cdot F) \in \text{Lt}_{\tau}(J_{\mathbb{X}})$, d.h. das Monom $\text{Lt}_{\tau}(F)$ ist ein maximales Element des Ordnungsideals $O_{\tau}(J_{\mathbb{X}})$. Nach Voraussetzung ist dann $\varrho = \sigma_{\mathbb{X}} + 1$, also $r \in \overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$. Die umgekehrte Inklusion $\overline{R}_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} \subseteq \mathfrak{S}(\overline{R})$ ist ohnehin klar, so daß wir die Behauptung erhalten. \square

An einem Beispiel zeigen wir nun, daß die Umkehrung von Satz 11.7 nicht gilt.

11.8. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \neq 2$. Das reduzierte 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_5\} \subseteq \mathbb{P}^3$ bestehe aus den fünf Punkten $P_1 = (1:0:0:0)$, $P_2 = (1:1:0:0)$, $P_3 = (1:0:1:0)$, $P_4 = (1:0:0:1)$ und $P_5 = (1:1:2:2)$. Dann gilt $J_{\mathbb{X}} = (X_1^2, X_1X_2 - X_3^2, X_1X_3 - X_3^2, X_2^2 - X_3^2, X_2X_3 - 2X_3^2)$ und $\overline{R} = K \oplus K\overline{X}_1 \oplus K\overline{X}_2 \oplus K\overline{X}_3 \oplus K\overline{X}_1\overline{X}_2$ mit $\overline{X}_1\overline{X}_2 = \frac{1}{2}\overline{X}_2\overline{X}_3$. Also folgt $\mathfrak{S}(\overline{R}) = K \cdot \overline{X}_1\overline{X}_2$, d.h. das Schema \mathbb{X} ist arithmetisch Gorenstein und insbesondere ein Level-Schema.

Jedoch besteht $O_{\tau}(J_{\mathbb{X}})$ für jede Wahl des Koordinatensystems und jede gradkompatible Termordnung \leq_{τ} aus den Monomen $\{1, X_1, X_2, X_3\}$ sowie einem Monom vom Grad zwei. Da dieses Monom nicht durch alle drei Variablen teilbar sein kann, ist \mathbb{X} nicht kombinatorisch rein.

Wenn man die Aussagen von Satz 11.6 betrachtet, so wird sofort klar, daß für Level-Schemata starke Einschränkungen bzgl. der möglichen Hilbert-Funktionen existieren. Die Behauptungen des folgenden Satzes wurden erstmals (ohne Beweis) in [S1] aufgestellt.

11.9. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Level-Schema.*

a) *Für alle $i, j \geq 0$ mit $i + j \leq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ gilt*

$$\Delta H_{\mathbb{X}}(i) \leq \Delta H_{\mathbb{X}}(j) \cdot \Delta H_{\mathbb{X}}(i + j).$$

b) *Die Funktion $\Delta H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}}+1-i)$ mit $i \in \mathbb{Z}$ ist die Summe von $\Delta_{\mathbb{X}}$ Hilbert-Funktionen von Restklassenringen von \overline{R} .*

c) *Ist $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ ein Unterschema mit $\deg \mathbb{Y} = H_{\mathbb{X}}(i)$ für ein $0 \leq i \leq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ und gilt $H_{\mathbb{Y}}(j) = \min\{H_{\mathbb{X}}(j), \deg \mathbb{Y}\}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$, so ist \mathbb{Y} wiederum ein Level-Schema und $H_{\mathbb{Y}}$ genügt den Bedingungen a) und b).*

Beweis: Behauptung a) folgt aus Satz 11.6.c, denn jene Bedingung liefert eine Injektion $\overline{R}_i \hookrightarrow \text{Hom}_K(\overline{R}_j, \overline{R}_{i+j})$. Behauptung b) folgt aus Satz 11.6.b mit vollständiger Induktion nach $\Delta_{\mathbb{X}}$. Ist $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{\Delta_{\mathbb{X}}}\} \subseteq (\omega_{\overline{R}})_{-\sigma_{\mathbb{X}}-1}$ ein minimales Erzeugendensystem des \overline{R} -Moduls $\omega_{\overline{R}}$, so wird $\omega_{\overline{R}}/\overline{R} \cdot \varphi_1$ erzeugt von den Bildern $\{\overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_{\Delta_{\mathbb{X}}}\}$, während

$\bar{R} \cdot \varphi_1 \cong (\bar{R}/\text{Ann}_{\bar{R}}(\varphi_1))(\sigma_{\mathbb{X}} + 1)$ bis auf eine Gradverschiebung um $\sigma_{\mathbb{X}} + 1$ die Hilbert-Funktion eines Restklassenrings von \bar{R} besitzt. Nun ist die Funktion $\Delta H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} + 1 - i)$ aber bis auf eine Gradverschiebung um $\sigma_{\mathbb{X}} + 1$ gerade die Hilbert-Funktion von $\omega_{\bar{R}}$. Behauptung c) folgt schließlich aus Satz 11.6.c und 11.6.d, denn der Sockel von $\bar{R}_{\mathbb{Y}} = R/(I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} + (x_0)) = \bigoplus_{j=0}^i \bar{R}_j$ ist gerade die homogene Komponente vom Grad i dieses Rings. \square

Das nächste Beispiel stammt aus [S1] und zeigt, wie man mit Hilfe des vorhergehenden Satzes beweisen kann, daß gewisse Hilbert-Funktionen für Level-Schemata unmöglich sind.

11.10. Beispiel. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^4$ ein 0-dimensionales Unterschema mit Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 5 \ 7 \ 9 \ 9 \ \dots$. Dann ist \mathbb{X} kein Level-Schema. Nach Satz 11.9.b müßte die Funktion $\Delta H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} + 1 - i) : 1 \ 2 \ 4 \ 1$ nämlich die Summe zweier Hilbert-Funktionen von Restklassenringen \bar{R}' und \bar{R}'' von \bar{R} sein. Dabei gäbe es nur die folgenden fünf Möglichkeiten. Die Zerlegung $H_{\bar{R}'} : 1 \ 0 \ 0 \ 0$ und $H_{\bar{R}''} : 1 \ 2 \ 4 \ 1$ geht nicht, da die zweite Folge keine O-Sequenz darstellt. Die Zerlegungen $H_{\bar{R}'} : 1 \ 1 \ 0 \ 0$ und $H_{\bar{R}''} : 1 \ 1 \ 4 \ 1$ bzw. $H_{\bar{R}'} : 1 \ 1 \ 1 \ 0$ und $H_{\bar{R}''} : 1 \ 1 \ 3 \ 1$ bzw. $H_{\bar{R}'} : 1 \ 1 \ 1 \ 1$ und $H_{\bar{R}''} : 1 \ 1 \ 3 \ 0$ bzw. $H_{\bar{R}'} : 1 \ 1 \ 2 \ 1$ und $H_{\bar{R}''} : 1 \ 1 \ 2 \ 0$ scheitern aus demselben Grund.

Andererseits belegt das folgende Beispiel, daß die Hilbert-Funktionen von Level-Schemata durch die bisherigen Bedingungen noch nicht vollständig charakterisiert sind.

11.11. Beispiel. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ ein 0-dimensionales Unterschema mit Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 5 \ 4 \ 5 \ 3 \ 1$. Dann kann \mathbb{X} kein Level-Schema sein, weil es gemäß [S2], 4.2 keinen 0-dimensionalen standard-graduierten Gorenstein-Ring \bar{R} mit dieser Hilbert-Funktion gibt. Diese Castelnuovo-Funktion ist aber durch die Bedingungen von Satz 11.9 nicht ausgeschlossen.

Angesichts von Satz 11.7 könnte man vermuten, daß jedes Level-Schema eine makellose Hilbert-Funktion hat. Es gibt aber 0-dimensionale standard-graduierte Gorenstein-Ringe, deren Hilbert-Funktionen nicht makellos sind (vgl. z.B. [S2]). Obwohl nicht klar ist, ob einer dieser Ringe von der Form $\bar{R} = R/(x_0)$ mit einem 1-dimensionalen standard-graduierten Cohen-Macaulay Ring ist, möchten wir uns mit der folgenden bescheideneren Vermutung zufriedengeben.

11.12. Vermutung. Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Level-Schema und genügend uniform (z.B. in uniformer Lage), so ist die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} makellos.

Die Uniformitätsvoraussetzung in dieser Vermutung erscheint uns natürlich, weil jedes Level-Schema mindestens 1-uniform ist, wie der nachfolgende Satz zeigt.

11.13. Satz. *Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Level-Schema, so ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema.*

Beweis: Sei $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ ein Unterschema vom Grad $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} - 1$, und sei $f_{\mathbb{Y}}^* \in (I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}} \setminus \{0\}$ ein minimaler Separator von \mathbb{Y} . Wegen $(I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}+1} = K \cdot x_0 \cdot f_{\mathbb{Y}}^*$ ist

die Leitform $Lf_{\mathbb{Y}}^*$ dann ein Sockelelement von \overline{R} , d.h. es gilt $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ für jedes solche Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$. \square

Man kann die Behauptung von Vermutung 11.12 bereits aus einer schwächeren Bedingung folgern.

11.14. Satz. *Angenommen, jedes $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniforme, 0-dimensionale Level-Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ erfüllt*

$$\Delta H_{\mathbb{X}}(i) \leq \Delta H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} + 1 - i)$$

für $i = 0, \dots, \lfloor \frac{1}{2}(\sigma_{\mathbb{X}} + 1) \rfloor$. Dann gilt Vermutung 11.12, d.h. jedes 0-dimensionale Level-Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ in uniformer Lage hat eine makellose Hilbert-Funktion.

Beweis: Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Level-Schema in uniformer Lage. Da \mathbb{X} auch $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniform ist, brauchen wir nur noch zu zeigen, daß für $i = 0, \dots, \lfloor \frac{1}{2}(\sigma_{\mathbb{X}} + 1) \rfloor$ gilt $H_{\mathbb{X}}(i - 1) \leq H_{\mathbb{X}}(i)$. Dazu wählen wir ein Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = H_{\mathbb{X}}(2i)$. Weil \mathbb{X} in uniformer Lage ist, gilt $H_{\mathbb{Y}}(j) = \min\{H_{\mathbb{X}}(j), \deg \mathbb{Y}\}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. Also ist \mathbb{Y} nach Satz 11.9.c ein $\Delta_{\mathbb{X}}$ -uniformes Level-Schema mit $\sigma_{\mathbb{Y}} = 2i - 1$, und die Voraussetzung liefert die gesuchte Ungleichung. \square

Könnte man die obige Vermutung beweisen, so hätte sie eine interessante Anwendung für die Hilbert-Funktionen von standard-graduierten Gorenstein-Bereichen.

11.15. Satz. *Sei $\text{char}(K) = 0$. Angenommen, jedes 0-dimensionale Level-Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ in uniformer Lage hat eine makellose Hilbert-Funktion. Für jedes $n \geq 1$ und jeden n -dimensionalen, über K standard-graduierten Gorenstein-Bereich S ist dann die n -te Differenzenfunktion $\Delta^n H_S$ der Hilbert-Funktion $H_S(i) = \dim_K S_i$ von S eine unimodale symmetrische Funktion, d.h. es gilt $\Delta^n H_S(i - 1) \leq \Delta^n H_S(i) = \Delta^n H_S(m - i)$ für $0 \leq 2i \leq m = \max\{j \in \mathbb{Z} \mid \Delta^n H_S(j) \neq 0\}$.*

Beweis: Da im Fall $n = 1$ nur der Polynomring $S = K[X]$ die Voraussetzung erfüllt, können wir o.E. $n \geq 2$ annehmen. Sei $e = \text{embdim}(S) - 1$, und sei $V \subseteq \mathbb{P}^e$ die projektive Varietät mit homogenem Koordinatenring S . Wegen $\dim V = n - 1$ können wir V mit einem generisch gewählten linearen Teilraum $L \subseteq \mathbb{P}^e$ der Kodimension $n - 1$ schneiden und erhalten nach dem Satz von der uniformen Lage (vgl. Satz 7.1) ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^{e-n-1}$, welches arithmetisch Gorenstein und in uniformer Lage ist. Hierbei gilt $\Delta H_{\mathbb{X}} = \Delta^n H_S$. Nach Voraussetzung ist $H_{\mathbb{X}}$ makellos, und weil \mathbb{X} arithmetisch Gorenstein ist, haben wir nach Korollar 5.13 auch die Symmetrie von $\Delta H_{\mathbb{X}}$. Zusammengenommen erhalten wir die gesuchte Unimodalität. \square

Im letzten Teil dieses Abschnitts erklären wir noch eine Vermutung von T. Hibi (vgl. [Hi2], 1.4) und leiten damit gleichzeitig zum nächsten Abschnitt über. Ein Spezialfall dieser Vermutung lautet in unserer Situation folgendermaßen.

11.16. Vermutung. (T.Hibi) Sei $\text{char}(K) = 0$, und sei $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ eine integrale Kurve, deren homogener Koordinatenring ein Cohen-Macaulay Ring ist. Ferner sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein generischer Hyperebenenschnitt von C , d.h. es sei $\mathbb{X} = C \cap H \subseteq H \cong \mathbb{P}^d$ mit

einer generisch gewählten Hyperebene $H \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$. Dann ist die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} makellos.

Ausgehend von unserem Beispiel 8.1 gelang es G. Niesi und L. Robbiano in [NR], 2.3 jedoch, diese Vermutung wie folgt zu widerlegen.

11.17. Beispiel. Sei $\text{char}(K) = 0$. Wir betrachten die Kurve

$$C = \mathcal{Z}(X_1X_2 - X_3X_4, X_1^3 - X_2X_4^2, X_1^2X_3 - X_2^2X_4, X_2^3 - X_1X_3^2, X_1^2X_3^3 + X_1X_4^4 \\ + X_0X_4^4 + X_4^5, X_2X_3^4 + X_1^2X_4^3 + X_1X_4^4, X_3^5 + X_0X_1^2X_4^2 + X_1^2X_4^3 + X_2X_4^4) \subseteq \mathbb{P}^4.$$

Wie man z.B. mit Hilfe von CoCoA (vgl. [CNR]) nachweisen kann, ist C eine integrale Kurve, deren homogener Koordinatenring S ein Cohen-Macaulay Ring ist. Ferner gilt $H_S : 1 \ 5 \ 14 \ 27 \ 44 \ 62 \ 80 \ \dots$, und somit $\Delta H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 5 \ 4 \ 4 \ 1$ für jeden generischen Hyperebenenschnitt $\mathbb{X} = C \cap H$ von C . Also ist $H_{\mathbb{X}}$ nicht makellos und die Vermutung 11.16 ist falsch.

Wenn man in der Vermutung 11.16 zusätzlich voraussetzt, daß die Kurve C arithmetisch Gorenstein sein soll, so stellt sie wegen Satz 11.15 offenbar eine Folgerung aus unserer Vermutung 11.12 dar. Wir schließen mit einem positiven Ergebnis in dieser Richtung. In [RRR] haben L. Reid, L.G. Roberts und M. Roitman nämlich gezeigt, daß die Vermutung 11.16 richtig ist, wenn man zusätzlich voraussetzt, daß die Kurve C ein vollständiger Durchschnitt in \mathbb{P}^{d+1} ist. Allgemeiner beweisen sie den folgenden Satz.

11.18. Satz. *Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionaler vollständiger Durchschnitt, so ist die Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{X}}$ von \mathbb{X} unimodal und symmetrisch.*

12. Hyperebenenschnitte von Kurven

In diesem Abschnitt sei $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ eine integrale Kurve, und $\mathbb{X} = C \cap H \subseteq H \cong \mathbb{P}^d$ sei ein generischer Hyperebenenschnitt von C . Der Satz von der uniformen Lage (vgl. Satz 7.1) besagt, daß $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Schema in uniformer Lage darstellt, wenn $\text{char}(K) = 0$ ist. Der Beweis dieses Satzes verwendet topologische Argumente (vgl. [ACGH], S. 111) und kann ohne Einschränkungen nicht auf den Fall $\text{char}(K) > 0$ verallgemeinert werden (vgl. [R]). Wir vermuten aber, daß \mathbb{X} stets ein Cayley-Bacharach Schema ist und wollen dies nun in einer möglichst allgemeinen Situation beweisen. Das zugrunde liegende Material stammt im reduzierten Fall aus [K1], §5 und im nicht notwendig reduzierten Fall aus [K3], §2.

Der homogene Koordinatenring von $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ sei $S = K[Y_0, \dots, Y_{d+1}]/I_C$, und $\ell \in S_1$ sei das Bild der Gleichung von H in S . Dann ist der homogene Koordinatenring von \mathbb{X} gegeben durch $R = (S/\ell S)/H_n^0(S/\ell S)$, wobei n das Bild von (Y_0, \dots, Y_{d+1}) in S ist. Der graduierte S -Modul

$$M = H_n^1(S) \cong H_*^1(\mathbb{P}^{d+1}, \mathcal{J}_C)$$

heißt der *Hartshorne-Rao Modul* von C , und der endlich erzeugte graduierte S -Modul

$$\omega_S = \underline{\text{Hom}}_K(H_n^2(S), K) \cong \underline{\text{Ext}}_{K[Y_0, \dots, Y_{d+1}]}^d(S, K[Y_0, \dots, Y_{d+1}])(-d-2)$$

heißt der *kanonische Modul* von S . In Analogie zur Invariante $\sigma_{\mathbb{X}}$ definieren wir auch die Zahl

$$\begin{aligned} \sigma_C &= \max\{i \in \mathbb{Z} \mid H^1(C, \mathcal{O}_C(i)) \neq 0\} = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid H_n^2(S)_i \neq 0\} \\ &= -\min\{i \in \mathbb{Z} \mid (\omega_S)_i \neq 0\}. \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen den kanonischen Moduln ω_R und ω_S wird durch den folgenden Satz beschrieben.

12.1. Satz. (Die fundamentale exakte Sequenz)

Es gibt eine exakte Sequenz graduierter R -Moduln

$$0 \longrightarrow (\omega_S/\ell \cdot \omega_S)(1) \longrightarrow \omega_R \longrightarrow (M/\ell \cdot M)^* \longrightarrow 0.$$

Hierbei bezeichnet $(-)^*$ den Funktor $\underline{\text{Hom}}_K(-, K)$.

Beweis: Sei $T = S/\ell \cdot S$. Wegen $R = T/H_n^0(T)$ gilt dann $H_m^1(R) \cong H_n^1(T)$, und folglich $\omega_R \cong \omega_T$ (vgl. [GW]). Wenden wir auf die lange exakte Sequenz lokaler Kohomologiemoduln

$$0 \longrightarrow H_n^0(T) \longrightarrow H_n^1(S)(-1) \xrightarrow{\ell} H_n^1(S) \longrightarrow H_n^1(T) \longrightarrow H_n^2(S)(-1) \xrightarrow{\ell} H_n^2(S) \longrightarrow 0$$

den Funktor $(-)^*$ an, so erhalten wir eine exakte Sequenz graduierter R -Moduln

$$0 \longrightarrow \omega_S \xrightarrow{\ell} \omega_S(1) \longrightarrow \omega_R \longrightarrow M^* \xrightarrow{\ell} M^*(1) \longrightarrow H_n^0(T)^* \longrightarrow 0.$$

Beachten wir nun $(M/\ell \cdot M)^* \cong \ker(M^* \xrightarrow{\ell} M^*(1))$, so brauchen wir letztere Sequenz nur noch aufzuspalten. \square

Nach einigen Vorbereitungen können wir jetzt zum Beweis unserer Vermutung im Fall $\sigma_{\mathbb{X}} = \sigma_C + 1$ schreiten.

12.2. Lemma. a) Für jeden endlich erzeugten graduierten S -Modul N gilt $\{x \in N \mid \ell \cdot x = 0\} \subseteq H_n^0(N)$.

b) Es gilt $\text{Ass}(\omega_S) = \{(0)\}$.

Beweis: Vgl. [K3], 2.2 und 2.3. □

12.3. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein generischer Hyperebenenschnitt einer integren Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$, und es gelte $\sigma_{\mathbb{X}} = \sigma_C + 1$. Dann ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema.

Beweis: Wir wählen ein Element $\Phi \in (\omega_S)_{-\sigma_C} \setminus \{0\}$. Nach Lemma 12.2.b gilt $\text{Ass}(S \cdot \Phi) \subseteq \text{Ass}(\omega_S) = \{(0)\}$, und daher

$$\dim(S/\text{Ann}_S(\Phi)) = \max\{\dim S/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \text{Ass}(S \cdot \Phi)\} = 2.$$

Hieraus folgt $\text{Ann}_S(\Phi) = (0)$. Nun konstruieren wir das folgende kommutative Diagramm homogener R -linearer Abbildungen mit exakten Zeilen und Spalten.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S(\sigma_C) & \xrightarrow{\Phi} & \omega_S & \longrightarrow & \omega_S/S \cdot \Phi & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \mu_\ell & & \downarrow \mu'_\ell & & \downarrow \mu''_\ell & & \\ 0 & \longrightarrow & S(\sigma_C + 1) & \xrightarrow{\Phi} & \omega_S(1) & \longrightarrow & (\omega_S/S \cdot \Phi)(1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & (S/\ell \cdot S)(\sigma_{\mathbb{X}}) & \xrightarrow{\mu_\varphi} & (\omega_S/\ell \cdot \omega_S)(1) & \longrightarrow & \omega_S/(S \cdot \Phi + \ell \omega_S)(1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Sei φ das Bild von Φ in $(\omega_S/\ell \cdot \omega_S)(1)$. Wegen Lemma 12.2.a gilt $\ker \mu''_\ell = \{x \in \omega_S/S \cdot \Phi \mid \ell \cdot x = 0\} \subseteq H_n^0(\omega_S/S \cdot \Phi)$. Wenden wir das Schlangenlemma auf das obige Diagramm an und beachten wir, daß μ'_ℓ injektiv ist, so folgt $\ker \mu_\ell \subseteq H_n^0(S/\ell \cdot S)$. Betrachten wir φ also via der fundamentalen exakten Sequenz 12.1 als Element von $(\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}}$, so gilt $\text{Ann}_R(\varphi) = (0)$. Nach Satz 5.8 ist \mathbb{X} damit ein Cayley-Bacharach Schema. □

Ist die Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ zusätzlich arithmetisch Cohen-Macaulay, so vereinfacht sich die fundamentale exakte Sequenz 12.1 zu einem Isomorphismus $\omega_R \cong (\omega_S/\ell \cdot \omega_S)(1)$, und Satz 12.3 spezialisiert sich zu [K1], 5.1. Wegen Korollar 5.9 hat der vorstehende Satz Auswirkungen auf das Wachstum der Hilbert-Funktionen von generischen Hyperebenenschnitten von Kurven und von standard-graduierten Cohen-Macaulay Bereichen.

12.4. Korollar. a) Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein generischer Hyperebenenschnitt einer integren Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$, und gilt $\sigma_{\mathbb{X}} = \sigma_C + 1$, so erfüllt die Castelnuovo-Funktion von \mathbb{X} die Ungleichungen

$$\Delta H_{\mathbb{X}}(0) + \cdots + \Delta H_{\mathbb{X}}(i) \leq \Delta H_{\mathbb{X}}(j - i) + \cdots + \Delta H_{\mathbb{X}}(j)$$

für alle $0 \leq i \leq j \leq \sigma_{\mathbb{X}}+1$. Insbesondere gelten diese Ungleichungen für die Castelnuovo-Funktionen generischer Hyperebenenschnitte integrier Kurven, die arithmetisch Cohen-Macaulay sind.

b) Ist k ein Körper mit unendlich vielen Elementen und $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ ein standard-graduierter Cohen-Macaulay Bereich mit $R_0 = k$, so erfüllt der h -Vektor (h_0, \dots, h_m) mit $h_i = \Delta^{\dim R} H_R(i)$ und $m = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid \Delta^{\dim R} H_R(i) \neq 0\}$ die Ungleichungen

$$h_0 + \dots + h_i \leq h_{j-i} + \dots + h_j$$

für alle $0 \leq i \leq j \leq m$.

Beweis: Teil a) folgt aus Korollar 5.9 bzw. [K1], 3.7 und Teil b) ist [K1], 5.3. \square

Die Ungleichungen 12.4.b verallgemeinern diejenigen aus [S3], 2.1, allerdings unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß R standard-graduiert ist. Wir veranschaulichen nun Satz 12.3 und Korollar 12.4 an einigen Beispielen.

12.5. Beispiel. Sei $\text{char}(K) = p > 0$, sei $q = p^e$ mit $e \geq 1$, und sei $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ die durch

$$C = \mathcal{Z}(Y_0^q - Y_1 Y_{d+1}^{q-1}, Y_1^q - Y_2 Y_{d+1}^{q-1}, \dots, Y_{d-1}^q - Y_d Y_{d+1}^{q-1})$$

definierte Varietät. Dann ist C eine integrale Kurve, die den vollständigen Durchschnitt von d Hyperflächen darstellt. Jeder generische Hyperebenenschnitt $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ von C ist isomorph zur Menge der \mathbb{F}_q -rationalen Punkte eines d -dimensionalen affinen Raumes über \mathbb{F}_q (vgl. [R], 1.2). Nach Satz 12.3 ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema mit $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$ (insbesondere kohomologisch uniform), und seine Castelnuovo-Funktion erfüllt die Ungleichungen von Korollar 12.4.a. Jedoch ist \mathbb{X} offensichtlich nicht in uniformer Lage.

12.6. Beispiel. Sei $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ eine integrale Kurve, deren homogener Koordinatenring ein Buchsbaum-Ring ist, und sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein generischer Hyperebenenschnitt von C . Bekanntlich wird der Hartshorne-Rao Modul M von C von seinen homogenen Elementen vom Grad $\leq \sigma_C + 2$ erzeugt. Wegen $\mathbf{n} \cdot M = 0$ bedeutet dies $M_i = 0$ für alle $i > \sigma_C + 2$. Angenommen, es gilt auch $M_{\sigma_C+2} = 0$. Dann haben wir $(M/\ell \cdot M)_{-\sigma_C-2}^* = 0$ in der fundamentalen exakten Sequenz 12.1, und folglich

$$-\sigma_{\mathbb{X}} = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid (\omega_R)_i \neq 0\} = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid (\omega_S/\ell \cdot \omega_S)(1)_i \neq 0\} = -\sigma_C - 1.$$

Also können wir Satz 12.3 anwenden und erhalten, daß \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema ist und $H_{\mathbb{X}}$ die Ungleichungen 12.4.a erfüllt.

Das nun folgende Beispiel zeigt, daß nicht jeder Hyperebenenschnitt einer integralen Kurve ein Cayley-Bacharach Schema zu sein braucht, selbst wenn diese Kurve arithmetisch Cohen-Macaulay ist. Ist eine integrale Kurve aber sogar arithmetisch Gorenstein, so sind selbstverständlich alle Hyperebenenschnitte wieder arithmetisch Gorenstein und insbesondere Cayley-Bacharach Schemata.

12.7. Beispiel. Sei $\text{char}(K) = 0$, und sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_7\} \subseteq \mathbb{P}^2$ das reduzierte 0-dimensionale Unterschema mit $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (1:0:1)$, $P_3 = (1:0:2)$, $P_4 = (1:1:0)$, $P_5 = (1:1:1)$, $P_6 = (1:1:2)$ und $P_7 = (1:2:0)$. Dann kann man leicht nachrechnen, daß \mathbb{X} kein Cayley-Bacharach Schema ist, denn es gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 6 \ 7 \ 7 \ \dots$, und für $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \setminus \{P_7\}$ ist $H_{\mathbb{Y}} : 1 \ 3 \ 5 \ 6 \ 6 \ \dots$ mit $H_{\mathbb{Y}}(2) = 5 < 6 = \min\{H_{\mathbb{X}}(2), \deg \mathbb{Y}\}$.

Andererseits wurde in [K1], 5.5 gezeigt, daß es eine integrale Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^3$ gibt, die arithmetisch Cohen-Macaulay ist und \mathbb{X} als Hyperebenenschnitt besitzt.

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wollen wir noch einige Ergebnisse aus [K10] anführen, bei denen es um die Frage geht, welche Eigenschaften einer integren Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ aus einem ihrer generischen Hyperebenenschnitte $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ablesbar sind. Genauer wurde in [K10] der folgende Satz von R. Strano (vgl. [Str], Thm. 6) analysiert und für den Fall positiver Grundkörpercharakteristik verallgemeinert.

12.8. Satz. *Sei $\text{char}(K) = 0$, und sei $C \subseteq \mathbb{P}^3$ eine integrale Kurve, die nicht auf einer Quadrikenfläche liegt, und deren generischer Hyperebenenschnitt $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ ein vollständiger Durchschnitt ist. Dann ist C selbst ein vollständiger Durchschnitt.*

Den Kern unserer Version des Beweises dieses Satzes bilden mehrere Teilbarkeits-eigenschaften des Hartshorne-Rao Moduls M einer integren, nicht ausgearteten Raumkurve $C \subseteq \mathbb{P}^3$, deren erste wir sogleich beschreiben. Wir erinnern an die bekannte Tatsache, daß M ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum ist (vgl. [K10], 2.1).

12.9. Satz (*Erste Teilbarkeitseigenschaft des Hartshorne-Rao Moduls*)

Sei M der Hartshorne-Rao Modul einer integren, nicht ausgearteten Raumkurve $C \subseteq \mathbb{P}^3$, und sei $\ell \in S_1$ eine generisch gewählte Linearform. Für alle $i \geq 1$, alle $j \in \{1, \dots, i\}$, alle Elemente $m \in M_{j-i}$ mit $\ell^i \cdot m = 0$ und alle Linearformen $\ell' \in S_1$ gilt dann $(\ell')^j \cdot m \in \ell \cdot M$.

Insbesondere liegt also die Restklasse jedes Elements $m \in M_i$ mit $\ell \cdot m = 0$ im Sockel des S -Moduls $M/\ell \cdot M$.

Beweis: Vgl. [K10], 2.2. □

Im Beweis der zweiten Teilbarkeitseigenschaft tritt ein Punkt auf, an dem wir eine (allerdings schwache) Voraussetzung über die Charakteristik des Grundkörpers brauchen. Bei vorgegebenem $i \geq 1$ erzeugen nämlich die Potenzen ℓ^j von Linearformen $\ell \in K[X_1, X_2, X_3]_1$ genau dann für jedes $j \in \{1, \dots, i\}$ den K -Vektorraum $K[X_1, X_2, X_3]_j$, wenn $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K) > i$ gilt (vgl. [K10], 2.5).

12.10. Satz. (*Zweite Teilbarkeitseigenschaft des Hartshorne-Rao Moduls*)

Sei M der Hartshorne-Rao Modul einer integren, nicht ausgearteten Raumkurve $C \subseteq \mathbb{P}^3$, und sei $\ell \in S_1$ eine generisch gewählte Linearform. Ferner sei $i \geq 1$, sei $j \in \{1, \dots, i\}$, sei $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K) > j$, und der kanonische Modul ω_R des generischen Hyperebenenschnitts $\mathbb{X} = C \cap H \subseteq H \cong \mathbb{P}^2$ habe keine minimalen Erzeuger in den Graden $-i+1, \dots, -i+j$. Dann ist jedes Element $m \in M_{i-j}$ mit $\ell^j \cdot m = 0$ von der Form $m = \ell \cdot m'$ mit $m' \in M_{i-j-1}$.

Beweis: Vgl. [K10], 2.6. □

12.11. Korollar. *Gelten die Voraussetzungen des Satzes mit $j = i - 1$, so ist die Multiplikationsabbildung $M_{i-1} \xrightarrow{\ell} M_i$ injektiv.*

Beweis: Man braucht Satz 12.10 nur nacheinander mit $j = 1, \dots, i - 1$ anzuwenden und erhält $m = \ell^{i-1} \cdot m'$ mit $m' \in M_0 = \{0\}$. □

Die beiden Teilbarkeitseigenschaften des Hartshorne-Rao Moduls wurden unabhängig auch von C. Huneke und B. Ulrich formuliert, verallgemeinert und als *Sockellemma* bezeichnet (vgl. [HU], 3.11). Sie ermöglichen den folgenden kurzen Beweis des Satzes von Strano.

12.12. Satz. *Sei $C \subseteq \mathbb{P}^3$ eine integrale, nicht ausgeartete Kurve, seien $3 \leq s \leq t$, sei $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K) \geq t$, und ein generischer Hyperebenenchnitt $\mathbb{X} = C \cap H \subseteq H \cong \mathbb{P}^2$ von C sei der vollständige Durchschnitt einer Kurve vom Grad s und einer Kurve vom Grad t . Dann ist C selbst der vollständige Durchschnitt einer Fläche vom Grad s und einer Fläche vom Grad t .*

Beweis: Wegen $\omega_R \cong R(s+t-3)$ hat der kanonische Modul ω_R von \mathbb{X} keinen minimalen Erzeuger vom Grad $\geq -s - t + 4$, so daß die Multiplikationsabbildungen $M_{i-1} \xrightarrow{\ell} M_i$ nach Korollar 12.11 für $i \leq t$ injektiv sind. Daher sind die kanonischen Abbildungen $H^0 \mathcal{J}_C(i) \rightarrow H^0 \mathcal{J}_{\mathbb{X}}(i)$ für $i \leq t$ surjektiv, und wir erhalten aus den Liftungen der Gleichungen der beiden Kurven zwei Gleichungen von Flächen in \mathbb{P}^3 , die einen vollständigen Durchschnitt definieren, der C enthält. Wegen $\deg C = \deg X = st$ ist C dann gleich diesem vollständigen Durchschnitt. □

Die Version 12.8 dieses Satzes erhält man nun durch eine leichte Fallunterscheidung (vgl. [K10], 3.2). Strano's Resultat wurde inzwischen – hauptsächlich mit Hilfe des Sockellemmas – auf eine Reihe von Arten verallgemeinert:

- 1) für höherdimensionale Varietäten, deren generischer Hyperebenenchnitt ein vollständiger Durchschnitt ist, von R. Re (vgl. [Re], Thm. 2),
- 2) für Kurven, deren generischer Hyperebenenchnitt arithmetisch Gorenstein ist, von C. Huneke und B. Ulrich (vgl. [HU], 3.20),
- 3) für Kurven, deren generische Hyperflächenschnitte vollständige Durchschnitte oder arithmetisch Gorenstein sind, von C. Migliore (vgl. [M], 2.4 und 3.5),
- 4) und für Kurven, deren generischer Hyperebenenchnitt ein Level-Schema ist, von J. Migliore und U. Nagel (vgl. [MN], 2.3).

Schließlich erwähnen wir noch die nachstehende Folgerung aus Korollar 5.13, Satz 12.3 und Satz 12.12.

12.13. Korollar. *Sei $C \subseteq \mathbb{P}^3$ eine integrale, nicht ausgeartete Kurve, die nicht in einer Quadrikenfläche enthalten ist, und sei $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K) > \frac{1}{3} \deg C$. Ein generischer Hyperebenenchnitt X von C erfülle $\sigma_{\mathbb{X}} = \sigma_C + 1$ und habe eine symmetrische Hilbert-Funktion. Dann ist die Kurve C ein vollständiger Durchschnitt.*

13. Freie Auflösungen

In diesem Abschnitt sei weiterhin $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema mit homogenem Koordinatenring R und kanonischem Modul ω_R . Betrachtet man $R = A/I_{\mathbb{X}}$ als graduierten Modul über $A = K[X_0, \dots, X_d]$, so kann man die minimale graduiert-freie Auflösung

$$(*) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\beta_d} A(-\alpha_{di}) \xrightarrow{\Phi_d} \bigoplus_{i=1}^{\beta_{d-1}} A(-\alpha_{d-1i}) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\beta_1} A(-\alpha_{1i}) \xrightarrow{\Phi_1} A \rightarrow R \rightarrow 0$$

bilden. Diese Auflösung bricht nach d Schritten ab, weil R ein 1-dimensionaler Cohen-Macaulay Ring ist. Die Zahlen $\beta_1, \dots, \beta_d \in \mathbb{N}$ heißen dabei die *graduierten Betti-Zahlen* von \mathbb{X} , und die Zahlen α_{ij} nennen wir die *Gradverschiebungen* von \mathbb{X} . In jedem graduiert-freien A -Modul dieser Auflösung numerieren wir die Gradverschiebungen so, daß für $i = 1, \dots, d$ gilt $\alpha_{i1} \leq \cdots \leq \alpha_{i\beta_i}$. Die zu Φ_i gehörige Matrix homogener Polynome bezeichnen wir für $i = 1, \dots, d$ mit \mathfrak{A}_i .

Da die Auflösung $(*)$ minimal ist, haben für $i = 1, \dots, d$ alle Einträge von \mathfrak{A}_i einen positiven Grad. Insbesondere gilt $\alpha_{11} < \alpha_{21} < \cdots < \alpha_{d1}$, wobei $\alpha_{11} = \alpha_{\mathbb{X}} = \min\{i \in \mathbb{N} \mid (I_{\mathbb{X}})_i \neq \{0\}\}$ ist. Nun dualisieren wir die Auflösung $(*)$ durch Anwendung des Funktors $\underline{\text{Hom}}_A(-, A)$ und beachten

$$\underline{\text{Ext}}_A^i(R, A) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0, \dots, d-1, \\ \omega_R(d+1) & \text{für } i = d. \end{cases}$$

(vgl. [GW], 2.1.6 und 2.2.9). Folglich erhalten wir eine exakte Sequenz graduierter A -Moduln und homogener A -linearer Abbildungen

$$(**) \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{\check{\Phi}_1} \bigoplus_{i=1}^{\beta_1} A(\alpha_{1i}) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\beta_{d-1}} A(\alpha_{d-1i}) \xrightarrow{\check{\Phi}_d} \bigoplus_{i=1}^{\beta_d} A(\alpha_{di}) \rightarrow \omega_R(d+1) \rightarrow 0,$$

die eine minimale graduiert-freie Auflösung von $\omega_R(d+1)$ darstellt, da in den Matrizen $\mathfrak{A}_i^{\text{transp.}}$ der Abbildungen $\check{\Phi}_i$ für $i = 1, \dots, d$ nur homogene Polynome positiven Grades stehen. Es ergibt sich $\alpha_{1\beta_1} < \cdots < \alpha_{d\beta_d} = \sigma_{\mathbb{X}} + d + 1$.

Unser Ziel ist es nun, mit Hilfe der Modulstruktur von ω_R zu charakterisieren, wann die Auflösungen $(*)$ bzw. $(**)$ eine besonders einfache Gestalt haben. Dazu wollen wir Bedingungen untersuchen, die besagen, daß an jeder Stelle der Auflösung nur sehr wenige Gradverschiebungen α_{ij} auftreten. Als Anwendung finden wir wieder Ungleichungen für die Hilbert-Funktionen gewisser 0-dimensionaler Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$. Das Material für diese Ausführungen stammt aus [K2], §5.

13.1. Definition. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, und sei $n \geq 1$.

a) Wir sagen, \mathbb{X} habe eine *Auflösung von der Ordnung n* , wenn für $i = 1, \dots, d$ gilt $\alpha_{i\beta_i} \leq \alpha_{\mathbb{X}} + i + n - 2$. Im Fall $n = 1$ sagen wir insbesondere, \mathbb{X} habe eine *lineare Auflösung*.

b) Wir sagen, die Auflösung von \mathbb{X} sei *fast von der Ordnung n* , wenn für $i = 1, \dots, d - 1$ gilt $\alpha_{i\beta_i} \leq \alpha_{\mathbb{X}} + i + n - 2$. Im Fall $n = 1$ sagen wir dabei, \mathbb{X} habe eine *fast lineare Auflösung*.

Der nachfolgende Satz charakterisiert diese Bedingungen jeweils durch eine einzige Ungleichung.

13.2. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, und sei $n \geq 1$.*

a) *Genau dann hat \mathbb{X} eine Auflösung von der Ordnung n , wenn $\sigma_{\mathbb{X}} \leq \alpha_{\mathbb{X}} + n - 3$ gilt.*

b) *Genau dann ist die Auflösung von \mathbb{X} fast von der Ordnung n , wenn $\alpha_{d-1\beta_{d-1}} \leq \alpha_{\mathbb{X}} + n + d - 3$ gilt.*

Beweis: Wir brauchen offenbar jeweils nur die Richtung “ \Leftarrow ” zu beweisen. Aus $\alpha_{d\beta_d} = \sigma_{\mathbb{X}} + d + 1 \leq \alpha_{\mathbb{X}} + d + n - 2$ und $\alpha_{d\beta_d} \geq \alpha_{d-1\beta_{d-1}} + 1 \geq \cdots \geq \alpha_{1\beta_1} + d - 1$ erhalten wir Behauptung a), und Behauptung b) folgt aus $\alpha_{1\beta_1} < \cdots < \alpha_{d-1\beta_{d-1}} \leq \alpha_{\mathbb{X}} + n + d - 3$. \square

Im Fall $n = 1$ ergibt sich hieraus ein Resultat von P. Schenzel (vgl. [Sch], Thm. A).

13.3. Korollar. *Für ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

a) *\mathbb{X} hat eine lineare Auflösung.*

b) *Es gilt $\sigma_{\mathbb{X}} = \alpha_{\mathbb{X}} - 2$.*

c) *Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $H_{\mathbb{X}}(i) = \min\left\{\binom{i+d}{d}, \binom{\alpha_{\mathbb{X}}+d-1}{d}\right\}$.*

Insbesondere gilt in diesem Fall $\deg \mathbb{X} = \binom{\alpha_{\mathbb{X}}+d-1}{d} = \binom{\sigma_{\mathbb{X}}+d+1}{d}$.

Beweis: Zum Beweis der Äquivalenz von a) und b) brauchen wir auf Grund des Satzes nur $\sigma_{\mathbb{X}} \geq \alpha_{\mathbb{X}} - 2$ zu beweisen. Dies folgt aus

$$\sigma_{\mathbb{X}} = \alpha_{d\beta_d} - d - 1 \geq \alpha_{d1} - d - 1 \geq \alpha_{d-11} - d \geq \cdots \geq \alpha_{11} - 2 = \alpha_{\mathbb{X}} - 2.$$

Da Bedingung c) offensichtlich b) impliziert, müssen wir noch zeigen, daß sie aus a) und b) folgt. Aus der Präsentation

$$A(-\alpha_{\mathbb{X}})^{\beta_1} \longrightarrow A \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

erhalten wir $H_{\mathbb{X}}(i) = \binom{i+d}{d}$ für $0 \leq i \leq \alpha_{\mathbb{X}} - 1$. Dies liefert zusammen mit $\deg \mathbb{X} = H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} + 1) = H_{\mathbb{X}}(\alpha_{\mathbb{X}} - 1) = \binom{\alpha_{\mathbb{X}}+d-1}{d}$ die Behauptung. \square

Für 0-dimensionale Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit linearer Auflösung ist durch dieses Korollar eine zufriedenstellende Beschreibung gefunden. Unser nächster Satz charakterisiert nun die Schemata \mathbb{X} , die eine fast lineare Auflösung haben, an Hand der Struktur ihres kanonischen Moduls ω_R .

13.4. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, und sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{\beta_d}\}$ mit $\varphi_i \in (\omega_R)_{-\alpha_{di}+d+1}$ für $i = 1, \dots, \beta_d$ ein minimales Erzeugendensystem des kanonischen Moduls ω_R von \mathbb{X} . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

a) *\mathbb{X} hat eine fast lineare Auflösung.*

b) *Sind für $i = 1, \dots, \beta_d$ Elemente $r_i \in R_{\alpha_{di}-\alpha_{\mathbb{X}}-d+1}$ gegeben mit $r_1\varphi_1 + \cdots + r_{\beta_d}\varphi_{\beta_d} = 0$, so folgt $r_1 = \cdots = r_{\beta_d} = 0$.*

Insbesondere sind in diesem Fall für $i = 0, \dots, \sigma_{\mathbb{X}} - \alpha_{\mathbb{X}} + 2$ die Multiplikationsabbildungen $R_i \otimes (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} \longrightarrow (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+i}$ injektiv.

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß Bedingung b) aus a) folgt. Der letzte Teil der Auflösung (**) hat in der vorliegenden Situation die Gestalt

$$\bigoplus_{i=1}^{\beta_{d-1}} A(\alpha_{\mathbb{X}} - 3) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\beta_d} A(\alpha_{di} - d - 1) \xrightarrow{\epsilon} \omega_R \longrightarrow 0.$$

Für $\mathcal{K} = \ker \epsilon \subseteq \bigoplus_{i=1}^{\beta_{d-1}} A(\alpha_{\mathbb{X}} - 3)$ gilt $\mathcal{K}_{-\alpha_{\mathbb{X}}+2} = 0$, und dies bedeutet nichts anderes als Bedingung b) aussagt. Zum Beweis der umgekehrten Richtung betrachten wir wiederum die aus (**) abgeleitete Präsentation

$$\bigoplus_{i=1}^{\beta_{d-1}} A(\alpha_{d-1i} - d - 1) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\beta_d} A(\alpha_{di} - d - 1) \xrightarrow{\epsilon} \omega_R \longrightarrow 0$$

von ω_R und setzen $\mathcal{K} = \ker \epsilon$. Die Voraussetzung liefert $\mathcal{K}_{-\alpha_{\mathbb{X}}+2} = 0$. Also gilt $-\alpha_{d-1i} + d + 1 > -\alpha_{\mathbb{X}} + 2$ für $i = 1, \dots, \beta_{d-1}$, und insbesondere ist $\alpha_{d-1\beta_{d-1}} \leq \alpha_{\mathbb{X}} + d - 2$. Nun folgt die Behauptung aus Satz 13.2.b. Die Zusatzbehauptung ist eine einfache Konsequenz von Bedingung b). \square

Der A -Modul $\mathcal{K} = \ker \epsilon$, der in diesem Beweis auftritt, ist der erste Syzygienmodul des kanonischen Moduls, den wir im nächsten Abschnitt im reduzierten Fall genauer analysieren werden. Eine analoge Charakterisierung mit Hilfe der Modulstruktur von ω_R hat man auch für Auflösungen, die fast von höherer Ordnung sind (vgl. [K2], 5.4). In allen Fällen ergeben sich wieder Ungleichungen, die das Wachstum der Hilbert-Funktion von \mathbb{X} kontrollieren (vgl. [K2], 5.5), und die im Fall fast linearer Auflösungen folgendermaßen lauten.

13.5. Korollar. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema mit fast linearer Auflösung. Dann gilt*

$$\Delta_{\mathbb{X}} \cdot H_{\mathbb{X}}(i) + H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - i) \leq \deg \mathbb{X}$$

für $i = 1, \dots, \sigma_{\mathbb{X}} - \alpha_{\mathbb{X}} + 2$.

Beweis: Aus der Injektivität der Abbildungen $R_i \otimes (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} \longrightarrow (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+i}$ für $i = 1, \dots, \sigma_{\mathbb{X}} - \alpha_{\mathbb{X}} + 2$ folgt $\deg \mathbb{X} - H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - i) = \dim_K (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+i} \geq H_{\mathbb{X}}(i) \cdot \Delta_{\mathbb{X}}$, also die Behauptung. \square

Wir betrachten noch einmal das reduzierte 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ aus den Beispielen 6.12 und 7.5.

13.6. Beispiel. Sei $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K) > 7$, und sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ das reduzierte 0-dimensionale Unterschema aus Beispiel 6.12. Dann ist die minimale graduiert-freie Auflösung von R gegeben durch

$$0 \longrightarrow A^2(-5) \oplus A(-6) \longrightarrow A^4(-4) \longrightarrow A \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Also hat \mathbb{X} eine fast lineare Auflösung, und die Multiplikationsabbildung $R_1 \otimes (\omega_R)_{-3} \longrightarrow (\omega_R)_{-2}$ ist nach Satz 13.4 injektiv. Die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}}$ von \mathbb{X} erfüllt auch die Ungleichung von Korollar 13.5, denn es gilt

$$\Delta_{\mathbb{X}} \cdot H_{\mathbb{X}}(1) + H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}} - 1) = 9 \leq 11 = \deg \mathbb{X}.$$

Fassen wir alle Informationen, die wir über dieses Schema gewonnen haben, zusammen, so erhalten wir ein klares Bild von der Modulstruktur des kanonischen Moduls ω_R in den nichtpositiven Graden:

1) Für $i = 1, 2, 3$ ist die Multiplikationsabbildung $R_i \otimes (\omega_R)_{-3} \longrightarrow (\omega_R)_{-3+i}$ injektiv.

2) Für $i = 1, 2$ ist die Multiplikationsabbildung $R_1 \otimes (\omega_R)_{-i} \longrightarrow (\omega_R)_{-i+1}$ biinjektiv, aber nicht injektiv.

3) Die Multiplikationsabbildung $R_2 \otimes (\omega_R)_{-2} \longrightarrow (\omega_R)_0$ ist nicht ausgeartet, aber weder biinjektiv noch injektiv.

Zum Schluß betrachten wir noch einen Fall von 0-dimensionalen Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$, deren Auflösung fast von höherer Ordnung ist. Da die Auflösung von \mathbb{X} stets fast von der Ordnung $\sigma_{\mathbb{X}} - \alpha_{\mathbb{X}} + 3$ ist, stellt die nächst niedrigere Ordnung den letzten nichttrivialen Fall dar.

13.7. Satz. *Für ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

- a) \mathbb{X} hat eine Auflösung, die fast von der Ordnung $\sigma_{\mathbb{X}} - \alpha_{\mathbb{X}} + 2$ ist.
- b) Es gilt $\alpha_{d-1} \beta_{d-1} \leq \sigma_{\mathbb{X}} + d - 1$.
- c) Die Multiplikationsabbildung $R_1 \otimes (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}} \longrightarrow (\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ ist injektiv.

Beweis: Die Äquivalenz der Bedingungen a) und b) folgt aus Satz 13.2.b. Übersetzt man Bedingung b) wie im Beweis von Satz 13.4 in eine Eigenschaft des Syzygienmoduls von ω_R , so besagt sie, daß die Elemente von $(\omega_R)_{-\sigma_{\mathbb{X}}}$ keine nichttrivialen linearen Syzygien besitzen. Dies ist offenbar äquivalent mit Bedingung c). \square

Noch einmal erhalten wir Folgerungen für die Hilbert-Funktionen solcher 0-dimensionaler Schemata.

13.8. Korollar. a) *Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein nicht ausgeartetes 0-dimensionales Unterschema, dessen Auflösung fast von der Ordnung $\sigma_{\mathbb{X}} - \alpha_{\mathbb{X}} + 2$ ist, so gilt $\Delta H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}}) \geq d \cdot \Delta_{\mathbb{X}}$.*

b) *Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ ein nicht ausgeartetes 0-dimensionales Unterschema, dessen homogenes Verschwindungsideal $I_{\mathbb{X}}$ von homogenen Elementen vom Grad $\leq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ erzeugt wird, so gilt $\Delta H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}}) \geq 2 \cdot \Delta_{\mathbb{X}}$.*

Beweis: Behauptung a) folgt aus [K2], 5.5, und Behauptung b) ist eine Konsequenz von a), wenn man beachtet, daß für Unterschemata von \mathbb{P}^2 die freie Auflösung besonders kurz ist. \square

14. Der Syzygienmodul des kanonischen Ideals

Wenn wir von einem nicht ausgearteten, reduzierten, 0-dimensionalen Schema $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d$ ausgehen, das $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$ erfüllt und kohomologisch uniform ist, so haben wir auf Grund der Korollare 3.10 und 3.11 explizite Basen der beiden nichttrivialen homogenen Komponenten \mathfrak{I}_2 sowie \mathfrak{I}_3 des kanonischen Ideals $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{R/K[x_0]} \subseteq R$, deren erstere nach Satz 8.13 sogar ein minimales Erzeugendensystem des R -Moduls \mathfrak{I} darstellt. Diese Situation wollen wir im folgenden stets voraussetzen, und ebenso die Notationen, die in den Abschnitten 1, 3 und 8 eingeführt wurden. Unser Ziel ist, ein explizites homogenes Erzeugendensystem des ersten Syzygienmoduls des R -Moduls \mathfrak{I} zu finden. Als Anwendung geben wir im Fall $s = d + 3$ ein Kriterium dafür an, wann dieser Syzygienmodul von seinen homogenen Elementen kleinsten Grades erzeugt wird und vergleichen dieses mit den analogen Resultaten von M.P. Cavaliere, M.E. Rossi und G. Valla für den Syzygienmodul des A -Moduls \mathfrak{I} (vgl. [CRV2]). Außerdem beschreiben wir einen effektiven Weg, wie man den Syzygienmodul von \mathfrak{I} mit einem Computer berechnen kann. Die Ausführungen dieses Abschnitts beruhen auf [K4], §4.

Die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} ist gegeben durch $H_{\mathbb{X}} : 1 \ d+1 \ s \ s \ \dots$, und die Hilbert-Funktion von \mathfrak{I} ist $H_{\mathfrak{I}} : 0 \ 0 \ s-d-1 \ s-1 \ s \ s \ \dots$. Gemäß Korollar 3.10 ist $\{\pi_1, \dots, \pi_{\Delta}\}$ eine K -Basis von \mathfrak{I}_2 , wobei $\Delta = s - d - 1$ gilt. Da \mathbb{X} kohomologisch uniform ist, folgt aus Satz 8.13, daß die Elemente $\{\pi_1, \dots, \pi_{\Delta}\}$ sogar ein minimales Erzeugendensystem des R -Moduls \mathfrak{I} bilden. Nun wählen wir ein generisches Element $\varphi = c_1\pi_1 + \dots + c_{\Delta}\pi_{\Delta} \in \mathfrak{I}_2$ mit $c_1, \dots, c_{\Delta} \in K$. Dann gilt $\varphi = c_1f_1 + \dots + c_s f_s$ mit $c_{\Delta+j} = c_1\beta_{j1} + \dots + c_{\Delta}\beta_{j\Delta}$ für $j = 1, \dots, s - \Delta$. Hierbei können wir o.E. annehmen, daß $c_1 \neq 0, \dots, c_s \neq 0$ gilt. Nach einem generischen Koordinatenwechsel haben wir nach Satz 9.9 auch

$$\mathfrak{I}_3 = R_1 \cdot \varphi \oplus K \cdot x_0\pi_2 \oplus \dots \oplus K \cdot x_0\pi_{\Delta}.$$

Also existieren eindeutige Elemente $\ell_{ij} \in R_1$ und $\lambda_{ij}^{(2)}, \dots, \lambda_{ij}^{(\Delta)} \in K$, so daß für $i = 1, \dots, d$ und $j = 2, \dots, \Delta$ gilt

$$x_i\pi_j = \ell_{ij}\varphi + \lambda_{ij}^{(2)}x_0\pi_2 + \dots + \lambda_{ij}^{(\Delta)}x_0\pi_{\Delta}.$$

Da $\{\varphi, \pi_2, \dots, \pi_{\Delta}\}$ ebenfalls ein minimales Erzeugendensystem des R -Moduls \mathfrak{I} darstellt, können wir diese Gleichungen benützen, um den *ersten Syzygienmodul*

$$\text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_{\Delta}) = \{(r_1, \dots, r_{\Delta}) \in R(-2)^{\Delta} \mid r_1\varphi + r_2\pi_2 + \dots + r_{\Delta}\pi_{\Delta} = 0\}$$

von \mathfrak{I} explizit zu beschreiben. Abkürzend setzen wir $S_R = \text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_{\Delta})$.

14.1. Bemerkungen. a) Aus der exakten Sequenz graduerter R -Moduln

$$0 \longrightarrow \text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_{\Delta}) \longrightarrow R(-2)^{\Delta} \xrightarrow{\epsilon} \mathfrak{I} \longrightarrow 0$$

mit $\epsilon(e_1) = \varphi$ und $\epsilon(e_i) = \pi_i$ für $i = 2, \dots, \Delta$ erhalten wir die Hilbert-Funktion H_{S_R} des Syzygienmoduls $\text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_{\Delta})$. Es gilt

$$H_{S_R} : 0 \quad 0 \quad 0 \quad (\Delta-1)d \quad (\Delta-1)s \quad (\Delta-1)s \quad \dots$$

b) Die Elemente

$$\sigma_{ij} = (\ell_{ij}, \lambda_{ij}^{(2)} x_0, \dots, \lambda_{ij}^{(j-1)} x_0, \lambda_{ij}^{(j)} x_0 - x_i, \lambda_{ij}^{(j+1)} x_0, \dots, \lambda_{ij}^{(\Delta)} x_0) \in R(-2)^\Delta$$

mit $1 \leq i \leq d$ und $2 \leq j \leq \Delta$ bilden eine K -Basis von $(S_R)_3$, denn sie sind offenbar K -linear unabhängig, und es gilt $H_{S_R}(3) = (\Delta-1)d$.

c) Wir betrachten auch den Syzygienmodul

$$S_A = \text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta) = \{(F_1, \dots, F_\Delta) \in A(-2)^\Delta \mid F_1\varphi + F_2\pi_2 + \dots + F_\Delta\pi_\Delta = 0\}.$$

Tensorieren wir die exakte Sequenz graduerter A -Moduln

$$0 \longrightarrow \text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta) \longrightarrow A(-2)^\Delta \longrightarrow \mathfrak{J} \longrightarrow 0$$

mit R , so liefert dies eine exakte Sequenz graduerter R -Moduln

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_A^1(\mathfrak{J}, R) \longrightarrow \text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta) \otimes_A R \longrightarrow \text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta) \longrightarrow 0.$$

Insbesondere gilt $H_{S_A}(3) = (\Delta-1)d = H_{S_R}(3)$, so daß die Urbilder

$$\Sigma_{ij} = (L_{ij}, \lambda_{ij}^{(2)} X_0, \dots, \lambda_{ij}^{(j)} X_0 - X_i, \dots, \lambda_{ij}^{(\Delta)} X_0) \in A(-2)^\Delta$$

mit $L_{ij} \in A_1$ für $1 \leq i \leq d$ und $2 \leq j \leq \Delta$ der Elemente $\sigma_{ij} \in R(-2)^\Delta$ eine K -Basis von $(S_A)_3$ bilden.

d) Aus der kurzen exakten Sequenz $0 \longrightarrow I_{\mathbb{X}} \longrightarrow A \longrightarrow R \longrightarrow 0$ erhalten wir eine lange exakte Sequenz graduerter A -Moduln

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_A^1(\mathfrak{J}, R) \longrightarrow I_{\mathbb{X}} \otimes_A \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{J} \xrightarrow{id} \mathfrak{J} \longrightarrow 0,$$

mit deren Hilfe wir $\text{Tor}_A^1(\mathfrak{J}, R) \cong I_{\mathbb{X}} \otimes_A R \otimes_R \mathfrak{J} \cong I_{\mathbb{X}}/I_{\mathbb{X}}^2 \otimes_R \mathfrak{J}$ berechnen. Folglich liefert die exakte Sequenz aus c) im Grad vier eine kurze exakte Sequenz endlich-dimensionaler K -Vektorräume

$$0 \longrightarrow (I_{\mathbb{X}})_2 \otimes \mathfrak{J}_2 \xrightarrow{\iota} \text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta)_4 \longrightarrow \text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta)_4 \longrightarrow 0,$$

wobei ι gegeben ist durch $\iota(F_1 \otimes \varphi + F_2 \otimes \pi_2 + \dots + F_\Delta \otimes \pi_\Delta) = (F_1, \dots, F_\Delta)$ für $F_1, \dots, F_\Delta \in (I_{\mathbb{X}})_2$.

Unser nächstes Ziel ist es herauszufinden, wie groß der Teil von $\text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta)_4$ ist, der von den Elementen Σ_{ij} mit $1 \leq i \leq d$ und $2 \leq j \leq \Delta$ erzeugt wird.

14.2. Satz. a) Die Menge $\{\Sigma_{ij} \mid 1 \leq i \leq d, 2 \leq j \leq \Delta\}$ erzeugt einen K -Untervektorraum von $\text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta)_4$, der mindestens $(\Delta-1)(\frac{1}{2}d^2 + \frac{3}{2}d)$ -dimensional ist.

b) Der A -Modul $\text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta)$ wird erzeugt von den Elementen

$$\{\Sigma_{ij} \mid 1 \leq i \leq d, 2 \leq j \leq \Delta\} \cup \{(F, 0, \dots, 0) \mid F \in (I_{\mathbb{X}})_2\} \cup \{\Theta_j \mid 2 \leq j \leq \Delta\},$$

wobei $\Theta_j = (Q_j, 0, \dots, 0, -X_0^2, 0, \dots, 0) \in A(-2)^\Delta$ ist mit einem Urbild $Q_j \in A_2$ des eindeutig bestimmten Elements $q_j \in R_2$, für das $x_0^2\pi_j = q_j\varphi$ gilt.

Beweis: Zuerst beweisen wir Behauptung a). Dazu sei \leq_σ die anti-lexikographische Termordnung auf A , bei der $X_0 <_\sigma X_1 <_\sigma \dots <_\sigma X_d$ gilt. Dann definieren wir auf $A(-2)^\Delta$ eine Modultermordnung \leq_τ wie folgt. Sind Monome $t_1, t_2 \in A$ und Zahlen $i, j \in \{1, \dots, \Delta\}$ gegeben, so setzen wir $t_1 e_i \leq_\tau t_2 e_j$ genau dann, wenn eine von vier Bedingungen erfüllt ist:

- 1) $i = j = 1$ und $t_1 \leq_\sigma t_2$,
- 2) $i = 1$ und $j > 1$,
- 3) $i > 1, j > 1$ und $t_1 <_\sigma t_2$,
- 4) $1 < i \leq j$ und $t_1 = t_2$.

Wie man leicht nachprüft, stellt \leq_τ in der Tat eine Modultermordnung dar (vgl. [E], S. 324 oder [K9], §3). Die Leiterterme der Elemente Σ_{ij} sind für $1 \leq i \leq d$ und $2 \leq j \leq \Delta$ gegeben durch $\text{Lt}_\tau(\Sigma_{ij}) = (0, \dots, 0, -X_i, 0, \dots, 0)$. Bekanntlich gilt für den von diesen Elementen erzeugten A -Untermodul $U = \langle \{\Sigma_{ij} \mid 1 \leq i \leq d, 2 \leq j \leq \Delta\} \rangle$ von $A(-2)^\Delta$ dann

$$\dim_K(U_4) = \dim_K(\text{Lt}_\tau(U))_4 \geq \dim_K(\langle \{\text{Lt}_\tau(\Sigma_{ij}) \mid 1 \leq i \leq d, 2 \leq j \leq \Delta\} \rangle_4)$$

(vgl. z.B. [E], 15.26). Die letzte Zahl ist offenbar gerade $(\Delta - 1)(\frac{1}{2}d^2 + \frac{3}{2}d)$.

Zum Beweis von Behauptung b) subtrahieren wir geeignete Vielfache der Syzygien Σ_{ij} von einer gegebenen Syzygie aus $\text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta)_4$ und sehen, daß sie auf die Form $(F, \gamma_2 X_0^2, \dots, \gamma_\Delta X_0^2)$ mit $F \in A_2$ und $\gamma_2, \dots, \gamma_\Delta \in K$ gebracht werden kann. Alsdann addieren wir $\sum_{j=2}^\Delta \gamma_j \Theta_j$ und erhalten eine Syzygie der Form $(G, 0, \dots, 0)$ mit $G \in A_2$. Wegen $\text{Ann}_R(\varphi) = (0)$ muß dabei $G \in (I_{\mathbb{X}})_2$ gelten. Also erzeugen die angegebenen Elemente den K -Vektorraum $\text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta)_4$. Zusammen mit Bemerkung 14.1.c liefert dies die Behauptung, wenn wir beachten, daß der A -Modul $\text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta)$ wegen $\sigma_{\mathbb{X}} = 1 = \alpha_{\mathbb{X}} - 1$ und Satz 13.2.a von seinen homogenen Elementen vom Grad drei und vier erzeugt wird. \square

Wenden wir den Epimorphismus aus der exakten Sequenz von Bemerkung 14.1.c auf Teil b) dieses Satzes an, so finden wir das gesuchte explizite homogene Erzeugendensystem von $\text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta)$. Für $j = 2, \dots, \Delta$ sei $\theta_j = (q_j, 0, \dots, 0, -x_0^2, 0, \dots, 0)$ das Bild der Syzygie Θ_j in $R(-2)^\Delta$ (vgl. Satz 14.2.b), also die der Relation $x_0^2 \pi_j = q_j \varphi$ entsprechende Syzygie.

14.3. Korollar. *Der graduierte R -Modul $\text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta)$ wird von den homogenen Elementen $\{\sigma_{ij} \mid 1 \leq i \leq d, 2 \leq j \leq \Delta\}$ vom Grad drei und den homogenen Elementen $\{\theta_j \mid 2 \leq j \leq \Delta\}$ vom Grad vier erzeugt.*

Offenbar sind die Elemente σ_{ij} hierbei minimale Erzeuger von $\text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta)$, während unklar ist, wie viele der Elemente $\theta_2, \dots, \theta_\Delta$ wirklich benötigt werden. Im Fall $\Delta = 2$, d.h. im Fall von $s = d + 3$ Punkten in \mathbb{P}^d kommen wir in Wirklichkeit ohne die Elemente $\theta_2, \dots, \theta_\Delta$ aus.

14.4. Satz. *Sei $d \geq 3$ und $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein nicht ausgeartetes, reduziertes, 0-dimensionales Unterschema vom Grad $d + 3$, das kohomologisch uniform ist und $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$ erfüllt. Dann wird der R -Modul $\text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2)$ von seinen homogenen Elementen vom Grad drei erzeugt.*

Beweis: Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir $x_i\pi_2 = \ell_i\varphi + \lambda_ix_0\pi_2$ mit $\ell_i \in R_1$ und $\lambda_i \in K$ für $i = 1, \dots, d$. Ferner setzen wir $\sigma_i = (\ell_i, \lambda_ix_0 - x_i)$ und bezeichnen mit $q \in R_2$ das eindeutig bestimmte Element mit $x_0^2\pi_2 = q\varphi$. Nach Korollar 14.3 müssen wir zeigen, daß $(q, -x_0^2) \in \sum_{i=1}^d R_1 \cdot \sigma_i$ gilt. Wegen $\text{Ann}_R(\varphi) = (0)$ bedeutet dies, daß wir beweisen müssen, daß x_0^2 ein Element des Ideals $J = (\lambda_1x_0 - x_1, \dots, \lambda_dx_0 - x_d)$ von R ist.

Als ersten Schritt weisen wir nach, daß nicht alle Elemente $\ell_1, \dots, \ell_d \in R_1$ gleich null sein können. Andernfalls gilt $(\lambda_ix_0 - x_i)\pi_2 = 0$ für $i = 1, \dots, d$, und aus der Gleichung $\pi_2 = f_2 + \beta_{12}f_3 + \dots + \beta_{d+12}f_{d+3}$ ersehen wir, daß J gleich dem Ideal \mathfrak{p}_2 von P_2 in R ist. Da \mathbb{X} nicht kohomologisch zerfällt, folgern wir aus Lemma 8.7, daß eines der Elemente β_{j2} mit $1 \leq j \leq d+1$ ungleich null sein muß. Da nicht alle Linearformen aus \mathfrak{p}_2 am Punkt P_{j+2} verschwinden, gibt es ein $k \in \{1, \dots, d+1\}$ mit $(\lambda_kx_0 - x_k)(P_{j+2}) \neq 0$. Nun liefert $(\lambda_kx_0 - x_k)\pi_2(P_{j+2}) = (\lambda_kx_0 - x_k)(P_{j+2})\beta_{j2} = 0$ aber einen Widerspruch.

Sei $Q = (1:\lambda_1:\dots:\lambda_d) \in \mathbb{P}^d$. Im nächsten Schritt zeigen wir, daß Q kein Punkt von \mathbb{X} sein kann. Angenommen, es wäre $Q = P_1$. Sei $\mathfrak{p}_1 \subseteq R$ das Ideal von P_1 in R . Aus den drei Gleichungen $\ell_i\varphi + (\lambda_ix_0 - x_i)\pi_2 = 0$ und $\lambda_ix_0 - x_i \in J = \mathfrak{p}_1$ sowie $\pi_2 = f_2 + \beta_{12}f_3 + \dots + \beta_{d+12}f_{d+3}$ erhalten wir, daß im Ring R/\mathfrak{p}_1^2 gilt $\ell_i\varphi + \mathfrak{p}_1^2 = 0$. Weil nun die Restklasse von $\varphi \notin \mathfrak{p}_1$ in diesem Ring ein Nichtnullteiler ist, erhalten wir $\ell_i \in \mathfrak{p}_1^2$. Dies kann aber nur für $\ell_i = 0$ der Fall sein, denn ℓ_i hat Grad eins und \mathfrak{p}_1^2 wird von homogenen Elementen vom Grad zwei erzeugt. Doch wie wir im ersten Schritt gesehen haben, kann nicht für alle $i = 1, \dots, d$ gelten, daß $\ell_i = 0$ ist.

Angenommen, es gilt nun $Q \in \{P_2, \dots, P_s\}$. Dann zeigt die Gleichung $\ell_i\varphi + (\lambda_ix_0 - x_i)\pi_2 = 0$, daß ℓ_i an den Punkten P_1 und Q verschwindet, d.h. daß es Elemente $c_{ij} \in K$ gibt mit $\ell_i = \sum_{j=1}^d c_{ij}(\lambda_jx_0 - x_j)$ für $i = 1, \dots, d$. Indem wir nun zum Restklassenring R/J^2 übergehen und wie eben argumentieren, sehen wir, daß $\pi_2(Q) \neq 0$ sein muß, d.h. daß Q entweder gleich P_2 ist oder gleich einem der Punkte P_j mit $3 \leq j \leq d+3$ und $\beta_{j-22} \neq 0$. Wenn wir die Darstellung von ℓ_i als Element von J ausnützen, erhalten wir Gleichungen $\sum_{j=1}^d c_{ij}\ell_j\varphi + \ell_i\pi_2 = 0$. Wiederum können die Bedingungen $\ell_i \in \mathfrak{p}_1$, $\pi_2 \in \mathfrak{p}_1$ und $\varphi \notin \mathfrak{p}_1$ nur gleichzeitig gelten, wenn $\sum_{j=1}^d c_{ij}\ell_j = 0$ und $\ell_i\pi_2 = 0$ ist. Aus $\ell_i\varphi + (\lambda_ix_0 - x_i)\pi_2 = 0$ folgt jetzt $\ell_i(P_\nu) = 0$ für alle $\nu \in \{1, \dots, d+3\}$ mit $\pi_2(P_\nu) = 0$, während $\ell_i\pi_2 = 0$ bedeutet, daß $\ell_i(P_\nu) = 0$ für alle $\nu \in \{1, \dots, d+3\}$ mit $\pi_2(P_\nu) \neq 0$ gilt. Also erhalten wir $\ell_i = 0$ für $i = 1, \dots, d$, was wiederum dem ersten Schritt widerspricht.

Insgesamt haben wir somit gezeigt, daß $Q \notin \mathbb{X}$ gilt. Wir bilden das Schema $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \cup \{Q\}$ und betrachten seine Hilbert-Funktion. Wir behaupten, diese Hilbert-Funktion sei $H_{\mathbb{Y}} : 1 \ d+1 \ d+4 \ d+4 \ \dots$. Die einzige andere Möglichkeit ist $H_{\mathbb{Y}} : 1 \ d+1 \ d+3 \ d+4 \ d+4 \ \dots$. In diesem Fall ist die erste nichttriviale homogene Komponente des kanonischen Ideals $\mathfrak{I}_{\mathbb{Y}}$ von \mathbb{Y} diejenige vom Grad drei, und es gilt $H_{\mathfrak{I}_{\mathbb{Y}}}(3) = 1$ sowie $H_{\mathfrak{I}_{\mathbb{Y}}}(4) = 3$. Folglich hat jedes Element von $(\mathfrak{I}_{\mathbb{Y}})_3 \setminus \{0\}$ einen nichttrivialen Annihilator, d.h. \mathbb{Y} ist kein Cayley-Bacharach Schema. Also gibt es ein $i \in \{1, \dots, s\}$ mit $H_{\mathbb{Y} \setminus \{P_i\}} : 1 \ d+1 \ d+2 \ d+3 \ d+3 \ \dots$ und $H_{\mathbb{X} \setminus \{P_i\}} : 1 \ d+1 \ d+2 \ d+2 \ \dots$. Nach [GMR], 5.2 liegen dann Q und drei weitere Punkte von \mathbb{X} auf einer Geraden in \mathbb{P}^d . Da die restlichen d Punkte von \mathbb{X} höchstens einen linearen Raum der Dimension $d-1$ aufspannen, zerfällt

\mathbb{X} linear, und wir haben einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Alsdann muß $H_{\mathbb{Y}} : 1 \ d+1 \ d+4 \ d+4 \ \dots$ gelten. Aus der exakten Sequenz graduierter A -Moduln

$$0 \longrightarrow A/(I_{\mathbb{X}} \cap I_Q) \longrightarrow A/I_{\mathbb{X}} \oplus A/I_Q \longrightarrow A/(I_{\mathbb{X}} + I_Q) \longrightarrow 0$$

und den Isomorphismen $A/(I_{\mathbb{X}} \cap I_Q) \cong A/I_{\mathbb{Y}}$ sowie $A/(I_{\mathbb{X}} + I_Q) \cong R/J$ erhalten wir die Formel $H_{R/J}(i) = H_{\mathbb{X}}(i) + H_{\{Q\}}(i) - H_{\mathbb{Y}}(i)$ für $i \in \mathbb{Z}$. Insbesondere gilt $H_{R/J}(2) = 0$, also $x_0^2 \in J$, was zu zeigen war. \square

Wir versuchen nun, diesen Satz mit dem analogen Resultat für den A -Modul $\text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2)$ zu vergleichen. Aus den Ergebnissen von [CRV2] erhält man in unserer Notation den folgenden Satz.

14.5. Satz. *Sei $d \geq 3$, und sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein nicht ausgeartetes, reduziertes, 0-dimensionales Unterschema vom Grad $d + 3$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

a) \mathbb{X} ist kohomologisch uniform, erfüllt $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$, und $\text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2)$ wird von $(\Delta - 1)d$ homogenen Elementen vom Grad drei sowie von $d - 1$ homogenen Elementen vom Grad vier erzeugt.

b) Keine $d + 2$ Punkte von \mathbb{X} liegen auf einer Hyperebene, und keine d Punkte von \mathbb{X} liegen auf einem $(d - 2)$ -dimensionalen linearen Teilraum von \mathbb{P}^d .

Beweis: Der Schluß von Bedingung a) auf Bedingung b) folgt aus Satz 8.13 und aus [CRV2], 4.3. Umgekehrt zeigt [CRV2], 1.3, daß \mathbb{X} die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}} : 1 \ d+1 \ d+3 \ d+3 \ \dots$ hat und daher $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$ erfüllt. Ferner ergibt sich aus [CRV2], 4.1 und Satz 8.13, daß \mathbb{X} kohomologisch uniform ist. Schließlich liefert [CRV2], 4.3 den Rest der Behauptung. \square

Es ist eine elementare Übungsaufgabe, die wir dem interessierten Leser überlassen, direkt nachzuweisen, daß aus Bedingung 14.5.b folgt, daß \mathbb{X} nicht linear zerfällt. Unser nächstes Beispiel belegt, daß Bedingung 14.5.b eine echt stärkere Forderung als die kohomologische Uniformität darstellt.

14.6. Beispiel. Ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_6\} \subseteq \mathbb{P}^3$ bestehe aus drei Punkten P_1, P_2, P_3 auf einer Geraden und drei weiteren, generisch gewählten Punkten P_4, P_5, P_6 . Dann gilt $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 4 \ 6 \ 6 \ \dots$, und \mathbb{X} ist ein Cayley-Bacharach Schema, da je fünf Punkte \mathbb{Y} von \mathbb{X} den Raum \mathbb{P}^3 aufspannen und folglich die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{Y}} : 1 \ 4 \ 5 \ 5 \ \dots$ besitzen. Aus demselben Grund, und weil die Punkte P_4, P_5, P_6 nicht auf einer Geraden liegen, ist \mathbb{X} sogar kohomologisch uniform. Nach Satz 14.4 wird $\text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2)$ dann von drei homogenen Elementen vom Grad drei erzeugt.

Andererseits erfüllt \mathbb{X} die Bedingung 14.5.b nicht, und in der Tat prüft man leicht nach, daß der A -Modul $\text{Syz}_A^1(\varphi, \pi_2)$ außer seinen drei homogenen Erzeugern vom Grad drei noch $3 > d - 1$ weitere homogene Erzeuger vom Grad vier benötigt.

Den Abschluß unserer Untersuchung des Syzygienmoduls $\text{Syz}_R^1(\varphi, \pi_2, \dots, \pi_\Delta)$ bildet ein Verfahren, das zeigt, wie man seine Erzeuger σ_{ij} und θ_j effektiv berechnen kann, wenn man die Koordinaten der Punkte, die Separatoren $f_1, \dots, f_s \in R_2$ und die Konstanten β_{ij} kennt. Dazu bemerken wir noch, daß man die Separatoren und die Konstanten β_{ij} leicht als Nebenprodukt des Buchberger-Möller Algorithmus bestimmen kann (vgl. [MR], §1.2).

14.7. Bemerkung. Die Punkte von \mathbb{X} seien gegeben durch $P_i = (1:p_{i1}:\dots:p_{id})$ mit $p_{i1}, \dots, p_{id} \in K$ für $i = 1, \dots, s$. Wir schreiben $x_0\ell_{ij} = \ell_{ij}^{(1)}f_1 + \dots + \ell_{ij}^{(s)}f_s$ mit $\ell_{ij}^{(1)}, \dots, \ell_{ij}^{(s)} \in K$ für $1 \leq i \leq d$ und $2 \leq j \leq \Delta$. Dann drücken wir beide Seiten der Gleichung $x_i\pi_j = \ell_{ij}\varphi + \lambda_{ij}^{(2)}x_0\pi_2 + \dots + \lambda_{ij}^{(\Delta)}x_0\pi_\Delta$ in der K -Basis $\{x_0f_1, \dots, x_0f_s\}$ von R_3 aus (vgl. Lemma 1.10.c) und erhalten

$$\begin{aligned} x_i\pi_j &= x_0^{-1}(p_{1i}f_1 + \dots + p_{si}f_s)(f_j + \beta_{1j}f_{\Delta+1} + \dots + \beta_{s-\Delta j}f_s) \\ &= p_{ji}x_0f_j + p_{\Delta+1 i}\beta_{1j}x_0f_{\Delta+1} + \dots + p_{si}\beta_{s-\Delta j}x_0f_s \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \ell_{ij}\varphi + \lambda_{ij}^{(2)}x_0\pi_2 + \dots + \lambda_{ij}^{(\Delta)}x_0\pi_\Delta &= \ell_{ij}^{(1)}c_1x_0f_1 + \dots + \ell_{ij}^{(s)}c_sx_0f_s \\ &\quad + (\lambda_{ij}^{(2)}x_0f_2 + \lambda_{ij}^{(2)}\beta_{12}x_0f_{\Delta+1} + \dots + \lambda_{ij}^{(2)}\beta_{s-\Delta 2}x_0f_s) + \dots \\ &\quad + (\lambda_{ij}^{(\Delta)}x_0f_\Delta + \lambda_{ij}^{(\Delta)}\beta_{1\Delta}x_0f_{\Delta+1} + \dots + \lambda_{ij}^{(\Delta)}\beta_{s-\Delta \Delta}x_0f_s) \\ &= \ell_{ij}^{(1)}c_1x_0f_1 + (\ell_{ij}^{(2)}c_2 + \lambda_{ij}^{(2)})x_0f_2 + \dots + (\ell_{ij}^{(\Delta)}c_\Delta + \lambda_{ij}^{(\Delta)})x_0f_\Delta \\ &\quad + (\ell_{ij}^{(\Delta+1)}c_{\Delta+1} + \lambda_{ij}^{(2)}\beta_{12} + \dots + \lambda_{ij}^{(\Delta)}\beta_{1\Delta})x_0f_{\Delta+1} + \dots \\ &\quad + (\ell_{ij}^{(s)}c_s + \lambda_{ij}^{(2)}\beta_{s-\Delta 2} + \dots + \lambda_{ij}^{(\Delta)}\beta_{s-\Delta \Delta})x_0f_s \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert jetzt $\ell_{ij}^{(1)} = 0$, $\lambda_{ij}^{(k)} = -\ell_{ij}^{(k)}c_j$ für $k \in \{2, \dots, \Delta\} \setminus \{j\}$ und $\lambda_{ij}^{(j)} = p_{ji} - \ell_{ij}^{(j)}c_j$. Setzt man dies in die verbleibenden Gleichungen ein, so ergibt sich

$$(*) \quad (p_{\Delta+k i} - p_{ji})\beta_{kj} = \ell_{ij}^{(\Delta+k)}c_{\Delta+k} - \ell_{ij}^{(2)}c_2\beta_{k2} - \dots - \ell_{ij}^{(\Delta)}c_\Delta\beta_{k\Delta}$$

für $k = 1, \dots, s-\Delta$. Also sind die Elemente $\lambda_{ij}^{(2)}, \dots, \lambda_{ij}^{(\Delta)}$ durch die Konstanten $\ell_{ij}^{(2)}, \dots, \ell_{ij}^{(s)}$ eindeutig bestimmt und wir müssen letztere berechnen. Die Bedingung $\ell_{ij}^{(1)} = 0$ bedeutet, daß die Hyperebene $\mathcal{Z}(\ell_{ij})$ den Punkt P_1 enthält, und daß es Konstanten $m_1, \dots, m_d \in K$ gibt, so daß

$$\ell_{ij} = m_1(x_1 - p_{11}x_0) + \dots + m_d(x_d - p_{1d}x_0)$$

gilt. Darum erhalten wir $\ell_{ij}^{(k)} = m_1(p_{k1} - p_{11}) + \dots + m_d(p_{kd} - p_{1d})$ für $k = 2, \dots, s$. Nun liefern die Gleichungen (*) ein System von $s-\Delta = d+1$ linearen Gleichungen (**)

für m_1, \dots, m_d . Die Gleichungen dieses Systems sind jedoch nicht unabhängig, denn ihre Summe ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{s-\Delta} p_{\Delta+k} i \beta_{kj} + p_{ji} &= \sum_{k=1}^{s-\Delta} \ell_{ij}^{(\Delta+k)} c_{\Delta+k} + \ell_{ij}^{(2)} c_2 + \dots + \ell_{ij}^{(\Delta)} c_{\Delta} \\ &= \sum_{k=1}^s (x_i \pi_j)(P_k) + \sum_{k=1}^s \ell_{ij}^{(k)} c_k = 0 \end{aligned}$$

wegen $x_i \pi_j, \ell_{ij} \varphi \in \mathfrak{I}_3$ und Korollar 3.11. Insgesamt schließen wir aus Satz 9.9, daß das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (**) \quad (p_{\Delta+k} i - p_{ji}) \beta_{jk} &= [m_1(p_{\Delta+k} 1 - p_{11}) + \dots + m_d(p_{\Delta+k} d - p_{1d})] c_{\Delta+k} \\ &\quad - [m_1(p_{21} - p_{11}) + \dots + m_d(p_{2d} - p_{1d})] c_2 \beta_{k2} - \dots \\ &\quad - [m_1(p_{\Delta 1} - p_{11}) + \dots + m_d(p_{\Delta d} - p_{1d})] c_{\Delta} \beta_{k\Delta} \\ &= (p_{\Delta+k} 1 c_{\Delta+k} - p_{11} c_1 \beta_{k1} - \dots - p_{\Delta 1} c_{\Delta} \beta_{k\Delta}) m_1 + \dots \\ &\quad + (p_{\Delta+k} d c_{\Delta+k} - p_{1d} c_1 \beta_{k1} - \dots - p_{\Delta d} c_{\Delta} \beta_{k\Delta}) m_d \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, s-\Delta$ die Konstanten $m_1, \dots, m_d \in K$, und dadurch auch die Elemente $\ell_{ij} \in R_1$ sowie $\lambda_{ij}^{(2)}, \dots, \lambda_{ij}^{(\Delta)} \in K$ eindeutig bestimmt. Wir brauchen demnach nur das lineare Gleichungssystem (***) zu lösen, um die Syzygien σ_{ij} zu berechnen.

Wenn wir außerdem für $j = 2, \dots, \Delta$ die Elemente $q_j \in R_2$ bestimmen wollen, für die $x_0^2 \pi_j = q_j \varphi$ gilt, so schreiben wir $q_j = \gamma_{j1} f_1 + \dots + \gamma_{js} f_s$ mit $\gamma_{j1}, \dots, \gamma_{js} \in K$ und führen in der Gleichung

$$x_0^2 \pi_j = x_0^2 (f_j + \beta_{1j} f_{\Delta+1} + \dots + \beta_{d+1j} f_s) = q_j \varphi = x_0^2 (\gamma_{j1} c_1 f_1 + \dots + \gamma_{js} c_s f_s)$$

einen Koeffizientenvergleich durch. Es ergibt sich $\gamma_{jk} = \frac{1}{c_j} \delta_{jk}$ für $k = 1, \dots, \Delta$ und $\gamma_{jk} = \frac{1}{c_k} \beta_{k-\Delta j}$ für $k = \Delta+1, \dots, s$. Damit sind auch die Syzygien $\theta_j = (q_j, -x_0^2)$ für $j = 2, \dots, \Delta$ mit Hilfe der Separatoren f_1, \dots, f_s und der Konstanten β_{ij} ausgedrückt.

15. Maximale Cayley-Bacharach Schemata

Will man 0-dimensionale Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit bestimmten Eigenschaften konstruieren, so bietet sich als einfache Methode an, mit einem bekannten 0-dimensionalen Schema zu starten und induktiv Punkte hinzuzufügen. Selbstverständlich stellt sich stets die Frage, ob die gesuchten Eigenschaften bei diesem Prozeß erhalten bleiben oder herbeigeführt werden können. Im Falle der Cayley-Bacharach Eigenschaft vom maximalen Grad stoßen wir dabei auf den folgenden Begriff.

15.1. Definition. Ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ heißt ein *maximales Cayley-Bacharach Schema*, wenn \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema ist und wenn kein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit $\mathbb{Y} \supseteq \mathbb{X}$ und $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} + 1$ ein Cayley-Bacharach Schema ist.

Dieser Begriff wurde in der Arbeit [K8], auf die sich der vorliegende Abschnitt stützt, näher untersucht. Bereits im zweiten Kapitel haben wir ja gesehen, daß es verschiedenartige Klassen von Cayley-Bacharach Schemata gibt: reduzierte Schemata aus generisch gewählten Punkten, vollständige Durchschnitte, generische Hyperebenen-schnitte von Kurven, etc. Wie sich herausstellt, erlaubt es uns die Maximalität bzgl. der Cayley-Bacharach Eigenschaft, z.B. zwischen den erstgenannten beiden Klassen zu unterscheiden. Generische Punktmengen sind nämlich nie maximale Cayley-Bacharach Schemata, während vollständige Durchschnitte dies bis auf wenige Ausnahmen fast immer sind. Nachfolgend rekapitulieren wir einige wichtige Ergebnisse über maximale Cayley-Bacharach Schemata.

Die erste Erkenntnis ist, daß die Allgemeinheit, in der Definition 15.1 formuliert wurde, durchaus angebracht erscheint. Es gibt nämlich Beispiele 0-dimensionaler Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$, für die kein Schema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}^d$ der Form $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \cup \{P\}$ ein Cayley-Bacharach Schema darstellt, obwohl \mathbb{X} kein maximales Cayley-Bacharach Schema im Sinne von Definition 15.1 ist.

15.2. Beispiel. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ das 0-dimensionale Unterschema, das am Punkt $P = (1:0:0)$ konzentriert ist und $\mathcal{O}_{\mathbb{X},P} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,P}/\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^2,P}^2$ erfüllt. Dann ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema, weil jedes Unterschema $\mathbb{X}' \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{X}' = \deg \mathbb{X} - 1 = 2$ die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}'} : 1 \ 2 \ 2 \ \cdots$ hat. Außerdem ist \mathbb{X} kein maximales Cayley-Bacharach Schema, denn es gilt $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y} = \mathcal{Z}(X_1^2, X_2^2)$, wobei \mathbb{Y} den Grad vier hat und als vollständiger Durchschnitt ein Cayley-Bacharach Schema ist.

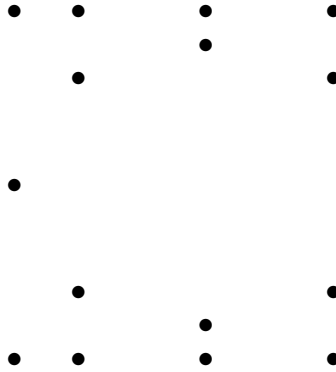
Jedoch gibt es kein 0-dimensionales Schema $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{P}^2$ der Form $\mathbb{Y}' = \mathbb{X} \cup \{Q\}$ mit einem reduzierten Punkt $Q \neq P$, das ein Cayley-Bacharach Schema ist, denn für jedes solche \mathbb{Y}' definiert die Gerade durch P und Q ein Unterschema $\mathbb{X}' \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad zwei, für das $\mathbb{X}' \cup \{Q\} \subseteq \mathbb{Y}'$ die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}' \cup \{Q\}} : 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ \cdots$ hat.

Unser nächstes Beispiel zeigt, daß wir in Definition 15.1 selbst dann nichtreduzierte Schemata \mathbb{Y} erlauben müssen, wenn wir mit einem reduzierten Schema \mathbb{X} beginnen.

15.3. Beispiel. Sei $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K) > 11$, und sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_{15}\} \subseteq \mathbb{P}^2$ das reduzierte 0-dimensionale Unterschema mit $P_1 = (1:-5:6)$, $P_2 = (1:-3:6)$, $P_3 =$

$(1:0:6)$, $P_4 = (1:3:6)$, $P_5 = (1:-3:4)$, $P_6 = (1:0:5)$, $P_7 = (1:3:4)$, $P_8 = (1:-3:-4)$,
 $P_9 = (1:0:-5)$, $P_{10} = (1:3:-4)$, $P_{11} = (1:-5:-6)$, $P_{12} = (1:-3:-6)$, $P_{13} = (1:0:-6)$,
 $P_{14} = (1:3:-6)$ und $P_{15} = (1:-5:0)$.

Skizze in $D_+(X_0)$:



Dann ist \mathbb{X} ein Unterschema des 0-dimensionalen vollständigen Durchschnitts $\mathbb{Y} = \mathcal{Z}(F, G)$ mit $F = (X_2 - 6X_0)(X_2 + 6X_0)(X_1^2 + X_2^2 - 25X_0^2)$ und $G = X_1(X_1 - 3X_0)(X_1 + 3X_0)(X_1 + 5X_0)$. Das Schema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}^2$ ist nach Korollar 5.13 ein Cayley-Bacharach Schema mit $\Delta_{\mathbb{Y}} = 1$, und nach Satz 5.17 ist dann \mathbb{X} ebenfalls ein Cayley-Bacharach Schema. Also ist \mathbb{X} kein maximales Cayley-Bacharach Schema.

Die Castelnuovo-Funktion von \mathbb{X} ist $\Delta H_{\mathbb{X}} : 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2$. Das homogene Verschwindungsideal $I_{\mathbb{X}}$ von \mathbb{X} wird erzeugt von F, G und einem homogenen Polynom vom Grad $6 = \sigma_{\mathbb{X}} + 2$. Unser nächster Satz zeigt dann, daß jedes Cayley-Bacharach Schema $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{P}^2$ mit $\mathbb{Y}' \supseteq \mathbb{X}$ und $\deg \mathbb{Y}' = \deg \mathbb{X} + 1 = 16$ die Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{Y}'} : 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1$ haben muß. Daher ergibt sich $\mathbb{Y}' = \mathbb{Y}$. Das Schema \mathbb{Y} ist aber nicht reduziert. Es hat denselben Träger wie \mathbb{X} , nur gilt $\dim_K \mathcal{O}_{\mathbb{Y}, P_{15}} = 2$. Somit ist kein Schema der Form $\mathbb{X} \cup \{Q\}$ mit $Q \notin \text{Supp}(\mathbb{X})$ ein Cayley-Bacharach Schema.

Ein ähnliches Beispiel kann man übrigens auch mit der in der Einleitung erwähnten Methode aus der Arbeit [NR] konstruieren (vgl. [K8], 2.3). Interessanterweise hängt die Frage nach der Maximalität eines Cayley-Bacharach Schemas \mathbb{X} mit den Graden der homogenen minimalen Erzeuger seines homogenen Verschwindungsideals $I_{\mathbb{X}}$ zusammen. Der Einfachheit halber notieren wir die Castelnuovo-Funktion von \mathbb{X} im folgenden in der Form $\Delta H_{\mathbb{X}} : 1 \ h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_{\sigma_{\mathbb{X}}} \ h_{\sigma_{\mathbb{X}}+1}$ mit $h_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} = \Delta_{\mathbb{X}}$.

15.4. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, und sei $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Cayley-Bacharach Schema vom Grad $\deg \mathbb{Y} = \deg \mathbb{X} + 1$, das \mathbb{X} enthält. Dann gibt es zwei Möglichkeiten.*

a) *Es gilt $\sigma_{\mathbb{Y}} = \sigma_{\mathbb{X}}$, die Castelnuovo-Funktion von \mathbb{Y} ist gegeben durch $\Delta H_{\mathbb{Y}} : 1 \ h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_{\sigma_{\mathbb{X}}} \ \Delta_{\mathbb{X}} + 1$, und $I_{\mathbb{X}}$ hat einen homogenen minimalen Erzeuger vom Grad $\sigma_{\mathbb{X}} + 1$.*

b) *Es gilt $\sigma_{\mathbb{Y}} = \sigma_{\mathbb{X}} + 1$, die Castelnuovo-Funktion von \mathbb{Y} ist gegeben durch $\Delta H_{\mathbb{Y}} : 1 \ h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_{\sigma_{\mathbb{X}}} \ \Delta_{\mathbb{X}} \ 1$, und $I_{\mathbb{X}}$ hat einen homogenen minimalen Erzeuger vom Grad $\sigma_{\mathbb{X}} + 2$.*

Beweis: Vgl. [K8], 2.4. □

Zu diesem Satz bemerken wir noch, daß alle homogenen minimalen Erzeuger von $I_{\mathbb{X}}$ einen Grad $\leq \sigma_{\mathbb{X}} + 2$ haben (vgl. Abschnitt 13). Wir erhalten bereits ein einfaches Kriterium für die Maximalität eines Cayley-Bacharach Schemas.

15.5. Korollar. *Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Cayley-Bacharach Schema, und wird $I_{\mathbb{X}}$ von homogenen Elementen vom Grad $\leq \sigma_{\mathbb{X}}$ erzeugt, so ist \mathbb{X} ein maximales Cayley-Bacharach Schema.*

Nun wollen wir auch einen Satz anführen, der es uns erlaubt, in vielen Fällen von einem Cayley-Bacharach Schema zu zeigen, daß es nicht maximal ist. Für ein homogenes Ideal I und für $i \geq 0$ schreiben wir dabei $\langle I_{\leq i} \rangle$ für das Ideal, das von den homogenen Elementen vom Grad $\leq i$ von I erzeugt wird.

15.6. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Cayley-Bacharach Schema, und es sei $J = \langle (I_{\mathbb{X}})_{\leq \sigma_{\mathbb{X}}} \rangle$.*

a) *Ist J ein saturiertes Ideal, und ist $\sigma_{\mathbb{X}} + 1$ der größte Grad eines homogenen minimalen Erzeugers von $I_{\mathbb{X}}$, so ist \mathbb{X} kein maximales Cayley-Bacharach Schema.*

b) *Ist J ein Radikalideal, und besitzt $I_{\mathbb{X}}$ einen minimalen Erzeuger vom Grad $\sigma_{\mathbb{X}} + 1$, so ist \mathbb{X} kein maximales Cayley-Bacharach Schema.*

c) *Ist J ein Primideal, und ist \mathbb{X} lokal Gorenstein, so ist \mathbb{X} kein maximales Cayley-Bacharach Schema. Genauer gilt in diesem Fall für jeden generisch gewählten Punkt $P \in \mathcal{Z}(J)$, daß das Schema $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \cup \{P\}$ ein Cayley-Bacharach Schema ist.*

Beweis: Vgl. [K8], 2.6. □

Mit Hilfe dieses Satzes und des vorhergehenden Korollars können wir die weiter oben erwähnten Fälle generischer Punktmengen und vollständiger Durchschnitte bereits bzgl. ihrer Maximalität klassifizieren. Wir sagen dabei, ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ habe eine *generische Hilbert-Funktion*, wenn für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt $H_{\mathbb{X}}(i) = \min\{H_{\mathbb{P}^d}(i), \deg \mathbb{X}\}$.

15.7. Korollar. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Cayley-Bacharach Schema mit generischer Hilbert-Funktion. Dann ist \mathbb{X} kein maximales Cayley-Bacharach Schema, außer in dem Fall, daß $\deg \mathbb{X} = H_{\mathbb{P}^d}(\sigma_{\mathbb{X}} + 1)$ gilt und \mathbb{X} nicht lokal Gorenstein ist. Genauer ist $\mathbb{X} \cup \{P\}$ für jeden generisch gewählten Punkt $P \in \mathbb{P}^d$ ein Cayley-Bacharach Schema.*

Insbesondere ist ein reduziertes 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d$, das aus generisch gewählten Punkten $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}^d$ besteht, kein maximales Cayley-Bacharach Schema.

Beweis: Wegen $\alpha_{\mathbb{X}} > \sigma_{\mathbb{X}}$ genügt es, Satz 15.6.b und 15.6.c mit $J = (0)$ anzuwenden. □

15.8. Korollar. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionaler vollständiger Durchschnitt von d Hyperflächen $H_1, \dots, H_d \subseteq \mathbb{P}^d$ mit $\deg H_1 \leq \dots \leq \deg H_d$.*

a) *Gilt $d = 2$ und $\deg H_1 \geq 3$, oder gilt $d \geq 3$ und $\deg H_1 \geq 2$, so ist \mathbb{X} ein maximales Cayley-Bacharach Schema.*

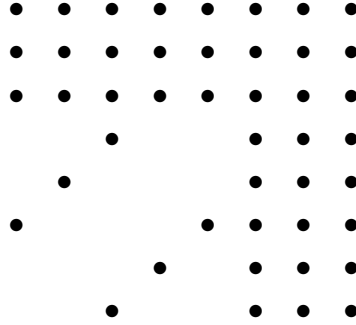
b) *Gilt $d = 2$ und $\deg H_1 = 2$, so ist \mathbb{X} kein maximales Cayley-Bacharach Schema.*

Beweis: Zum Beweis von Teil a) können wir Korollar 15.5 anwenden, denn $I_{\mathbb{X}}$ wird von homogenen Polynomen vom Grad $\leq \deg H_d$ erzeugt, und es gilt $\deg H_d \leq \sigma_{\mathbb{X}} = \deg H_1 + \dots + \deg H_d - d - 1$. In der Situation von b) ist der größte Grad eines minimalen Erzeugers von $I_{\mathbb{X}}$ gegeben durch $\deg H_2 = (\deg H_1 + \deg H_2 - 3) + 1 = \sigma_{\mathbb{X}} + 1$, und das Ideal $J = \langle (I_{\mathbb{X}})_{\leq \sigma_{\mathbb{X}}} \rangle$ ist saturiert, so daß Satz 15.6.a die Behauptung liefert. \square

Auf den ersten Blick mögen die Voraussetzungen in Satz 15.6 über die Beschaffenheit des Ideals $J = \langle (I_{\mathbb{X}})_{\leq \sigma_{\mathbb{X}}} \rangle$ etwas künstlich erscheinen. Sie sind aber keinesfalls unbegründet. Zum Beispiel ist das Ideal J in der Situation von 15.3 nicht reduziert. Unser nächstes Beispiel zeigt, daß das Ideal J im allgemeinen nicht einmal saturiert zu sein braucht, und daß man diese Voraussetzung in Satz 15.6.a nicht weglassen kann.

15.9. Beispiel. Sei $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K) > 7$, und sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_{45}\} \subseteq \mathbb{P}^2$ das reduzierte 0-dimensionale Unterschema mit $P_i = (1:i-1:5)$ für $1 \leq i \leq 8$, mit $P_{8+i} = (1:i-1:6)$ für $1 \leq i \leq 8$, mit $P_{16+i} = (1:i-1:7)$ für $1 \leq i \leq 8$, mit $P_{24+i} = (1:5:i-1)$ für $1 \leq i \leq 5$, mit $P_{29+i} = (1:6:i-1)$ für $1 \leq i \leq 5$, mit $P_{34+i} = (1:7:i-1)$ für $1 \leq i \leq 5$, sowie mit $P_{40} = (1:0:2)$, $P_{41} = (1:1:3)$, $P_{42} = (1:2:0)$, $P_{43} = (1:2:4)$, $P_{44} = (1:3:1)$ und $P_{45} = (1:4:2)$.

Skizze in $D_+(X_0)$:



Dann ist \mathbb{X} offenbar enthalten in dem 0-dimensionalen vollständigen Durchschnitt $\mathbb{Y} = \mathcal{Z}(F, G)$ mit $F = X_1(X_1 - X_0)(X_1 - 2X_0) \cdots (X_1 - 7X_0)$ und $G = X_2(X_2 - X_0)(X_2 - 2X_0) \cdots (X_2 - 7X_0)$. Die Castelnuovo-Funktion von \mathbb{X} ist $\Delta H_{\mathbb{X}} : 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 6 \ 3$, d.h. wir haben $\sigma_{\mathbb{X}} = 8$. Außerdem definiert das Polynom

$$H = (X_1 - 5X_0)(X_1 - 6X_0)(X_1 - 7X_0)(X_2 - 5X_0)(X_2 - 6X_0)(X_2 - 7X_0) \cdot (X_2 - X_1 + 2X_0)(X_2 - X_1 - 2X_0)$$

ersichtlich den dritten minimalen Erzeuger von $I_{\mathbb{X}}$ im Grad $\alpha_{\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{X}} = 8$, und es gilt $I_{\mathbb{X}} = (F, G, H)^{\text{sat}}$. Berechnen wir nun ein homogenes minimales Erzeugendensystem von $I_{\mathbb{X}}$, so finden wir einen weiteren homogenen minimalen Erzeuger im Grad $9 = \sigma_{\mathbb{X}} + 2$. Also ist das Ideal $J = (F, G, H)$ nicht saturiert. Mit Hilfe der im nächsten Abschnitt beschriebenen Liaison-Technik (oder direkt mit Hilfe eines Computers) kann man leicht nachweisen, daß \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema ist. Es ist sogar ein maximales Cayley-Bacharach Schema, denn jedes Cayley-Bacharach Schema $\mathbb{Y} \supseteq \mathbb{X}$ vom Grad 46 würde nach Satz 15.4 die Bedingung $I_{\mathbb{Y}} \supseteq (F, G, H)$ erfüllen, was $I_{\mathbb{X}} = (F, G, H)^{\text{sat}}$ widerspräche.

Ein sehr ähnliches Beispiel wird in [K8], 2.7.b wieder mit Hilfe der Technik aus [NR] konstruiert. Auch die Voraussetzung in Satz 15.6.c, daß \mathbb{X} lokal Gorenstein sein muß, kann nicht weggelassen werden, wie das nachstehende Beispiel zeigt.

15.10. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \neq 2$, und sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ das 0-dimensionale Unterschema vom Grad sechs, dessen Träger aus den vier Punkten $P_1 = (1:5:0)$, $P_2 = (1:4:3)$, $P_3 = (1:3:4)$ sowie $P_4 = (1:0:5)$ besteht, für das $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, P_1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, P_1} / \mathfrak{m}_{\mathbb{P}^2, P_1}^2$ gilt, und in dem die Punkte P_2 , P_3 sowie P_4 reduziert sind. Offensichtlich ist \mathbb{X} nicht lokal Gorenstein. Aus der Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 6 \ 6 \ \dots$ geht hervor, daß \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema ist. Weiter gilt $\sigma_{\mathbb{X}} = 1$ und $J = \langle (I_{\mathbb{X}})_{\leq \sigma_{\mathbb{X}}} \rangle = (0)$.

Doch es gibt keinen reduzierten Punkt $P_5 \in \mathbb{P}^2 \setminus \text{Supp}(\mathbb{X})$, so daß $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \cup \{P_5\}$ ein Cayley-Bacharach Schema ist. Ein derartiges Schema $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \cup \{P_5\}$ hat die Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{Y}} : 1 \ 2 \ 3 \ 1$. Es gibt einen eindeutigen Kegelschnitt, der durch die Punkte P_1, \dots, P_5 geht. Dieser definiert ein Unterschema $\mathbb{X}' \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad fünf mit $\dim_K \mathcal{O}_{\mathbb{X}', P_1} = 2$ sowie ein Unterschema $\mathbb{Y}' = \mathbb{X}' \cup \{P_5\} \subseteq \mathbb{Y}$ mit $\deg \mathbb{Y}' = 6$ und Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{Y}'} : 1 \ 2 \ 2 \ 1$. Also ist \mathbb{Y} kein Cayley-Bacharach Schema, und die Behauptung von Satz 15.6.c ist nicht erfüllt.

In Anbetracht von Korollar 15.5 und Satz 15.6.a könnte man auch auf die Idee kommen, Cayley-Bacharach Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ nach der Invariante

$$m_{\mathbb{X}} = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid (I_{\mathbb{X}} / (X_0, \dots, X_d) I_{\mathbb{X}})_i \neq 0\},$$

also nach dem maximalen Grad eines homogenen minimalen Erzeugers von $I_{\mathbb{X}}$ zu klassifizieren. Korollar 15.5 besagt dann, daß jedes Cayley-Bacharach Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit $m_{\mathbb{X}} \leq \sigma_{\mathbb{X}}$ maximal ist, während Satz 15.6.a für die meisten Cayley-Bacharach Schemata mit $m_{\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ liefert, daß sie nicht maximal sind. Da stets $m_{\mathbb{X}} \leq \sigma_{\mathbb{X}} + 2$ gilt (vgl. Abschnitt 13), bleibt noch der Fall $m_{\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{X}} + 2$. Eine Serie von Beispielen in [K8] zeigt, daß ein Cayley-Bacharach Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit $m_{\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{X}} + 2$ maximal sein kann oder nicht, und zwar unabhängig davon, ob $I_{\mathbb{X}}$ auch noch homogene minimale Erzeuger vom Grad $\sigma_{\mathbb{X}} + 1$ besitzt (vgl. [K8], 2.10, 2.11, 2.12 und 2.13).

Schließlich weisen wir noch darauf hin, daß die Korollare 15.7 und 15.8 die Ansicht nahe legen, daß “spezielle” Cayley-Bacharach Schemata maximal sind und “allgemeine” nicht. Wir fügen noch einige Situationen an, in denen sich dieser Standpunkt bestätigt.

15.11. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Cayley-Bacharach Schema.

a) Ist \mathbb{X} nicht in einer Hyperfläche vom Grad zwei enthalten, und gilt $h_{\sigma_{\mathbb{X}}} = d$ sowie $h_{\sigma_{\mathbb{X}}+1} = 1$, so ist \mathbb{X} ein maximales Cayley-Bacharach Schema.

b) Ist \mathbb{X} arithmetisch Gorenstein und nicht in einer Hyperfläche vom Grad zwei enthalten, so ist \mathbb{X} ein maximales Cayley-Bacharach Schema.

c) Wird \mathbb{X} wie in Satz 5.22 von den 2×2 -Minoren einer Matrix $\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} F_0 & \dots & F_d \\ G_0 & \dots & G_d \end{pmatrix}$ definiert, und gilt $\sum_{\nu \neq i, j} a_{\nu} + (d-1)b \geq d+1$ für alle $1 \leq i < j \leq d+1$, so ist \mathbb{X} ein maximales Cayley-Bacharach Schema.

Beweis: Vgl. [K8], 3.2, 3.3 und 3.6. □

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei Beispielen, die veranschaulichen, wie man den vorstehenden Satz anwenden kann. Weitere Beispiele dieser Art findet der Leser in [K8], §3.

15.12. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \notin \{2, 3\}$, und sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_{13}\} \subseteq \mathbb{P}^2$ das reduzierte 0-dimensionale Unterschema mit $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (1:0:1)$, $P_3 = (1:0:2)$, $P_4 = (1:0:3)$, $P_5 = (1:1:0)$, $P_6 = (1:1:1)$, $P_7 = (1:1:2)$, $P_8 = (1:2:0)$, $P_9 = (1:2:1)$, $P_{10} = (1:2:3)$, $P_{11} = (1:3:0)$, $P_{12} = (1:3:2)$ und $P_{13} = (1:3:3)$. Dann ist die Castelnuovo-Funktion von \mathbb{X} gegeben durch $\Delta H_{\mathbb{X}} : 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 2 \ 1$, und man rechnet leicht nach, daß \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema ist. Gemäß Satz 15.11.a ist \mathbb{X} sogar ein maximales Cayley-Bacharach Schema.

15.13. Beispiel. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ das Unterschema, das von den 2×2 -Minoren der Matrix $\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} X_0^3 & X_1^4 & X_2^5 \\ X_2^3 & X_0^4 & X_1^5 \end{pmatrix}$ definiert wird. Dehomogenisieren wir diese Minoren bzgl. X_0 , so erhalten wir das Ideal $(X_1^{47} - 1, X_2 - X_1^{30})$ in $K[X_1, X_2]$. Wegen $\mathbb{X} \cap \mathcal{Z}(X_0) = \emptyset$ bedeutet dies, daß \mathbb{X} ein 0-dimensionales Schema ist, das die Voraussetzungen von Satz 5.22 erfüllt. Daher besagt dieser Satz, daß \mathbb{X} lokal Gorenstein und ein Cayley-Bacharach Schema ist. Wegen Satz 15.11.c ist \mathbb{X} sogar ein maximales Cayley-Bacharach Schema.

16. Liaison

Eine andere Methode zur Konstruktion 0-dimensionaler Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit vorgegebenen Eigenschaften als die im letzten Abschnitt erklärte beruht auf der Technik der Liaison. Dabei beginnt man mit einem (im allgemeinen wesentlich größeren) 0-dimensionalen Schema $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{P}^d$, das arithmetisch Gorenstein ist, konstruiert ein gewisses Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{V}$ und nimmt für \mathbb{X} dann das sogenannte “zu \mathbb{Y} residuelle” Unterschema von \mathbb{V} . Die gesuchten Eigenschaften von \mathbb{X} will man dadurch herbeiführen, daß man sie mit Hilfe gewisser Eigenschaften von \mathbb{Y} charakterisiert, von denen man hofft, daß man sie leichter erzwingen kann. Die nachfolgenden Ausführungen basieren im reduzierten Fall auf [K1], §4, und im allgemeinen Fall auf [K8], §4. Die algebraischen Grundlagen entnehmen wir der Arbeit [DGO].

Zuerst legen wir die in diesem Abschnitt gültigen Notationen und Vereinbarungen fest. Mit $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{P}^d$ bezeichnen wir stets ein 0-dimensionales Unterschema, das arithmetisch Gorenstein ist, und mit $S = A/I_{\mathbb{V}}$ den homogenen Koordinatenring von \mathbb{V} . Für jedes 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{V}$ sei dann $I_{\mathbb{X}/\mathbb{V}} \subseteq S$ das Ideal von \mathbb{X} in \mathbb{V} (vgl. Lemma 1.6.a) und $\alpha_{\mathbb{X}/\mathbb{V}} = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid (I_{\mathbb{X}/\mathbb{V}})_i \neq 0\}$. In dieser Situation ist das Ideal $\text{Ann}_S(I_{\mathbb{X}/\mathbb{V}}) \subseteq S$ stets saturiert und definiert ein weiteres Unterschema von \mathbb{V} (vgl. [DGO] und Lemma 1.6.a).

16.1. Definition. Das Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{V}$, das durch das Ideal $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}} = \text{Ann}_S(I_{\mathbb{X}/\mathbb{V}})$ definiert wird, heißt *das zu \mathbb{X} in \mathbb{V} residuelle Unterschema* von \mathbb{V} .

Die Invarianten der drei Schemata \mathbb{X} , \mathbb{Y} und \mathbb{V} sind eng miteinander verknüpft, wie die folgenden Resultate aus [DGO] zeigen.

16.2. Satz. *Sei $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, das arithmetisch Gorenstein ist, sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{V}$ ein Unterschema, und sei $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{V}$ das zu \mathbb{X} in \mathbb{V} residuelle Unterschema.*

- a) *Es gilt $I_{\mathbb{X}/\mathbb{V}} = \text{Ann}_S(I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}})$.*
- b) *Es gilt $\deg \mathbb{V} = \deg \mathbb{X} + \deg \mathbb{Y}$.*
- c) *Es gilt $\sigma_{\mathbb{V}} = \sigma_{\mathbb{X}} + \alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}} = \sigma_{\mathbb{Y}} + \alpha_{\mathbb{X}/\mathbb{V}}$.*
- d) *Für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt $\Delta H_{\mathbb{V}}(i) = \Delta H_{\mathbb{X}}(i) + \Delta H_{\mathbb{Y}}(\sigma_{\mathbb{V}} + 1 - i)$.*

Wie der nächste Satz und seine Korollare zeigen, besitzt die Cayley-Bacharach Eigenschaft eine Beschreibung mit Hilfe der Hyperflächen kleinsten Grades, die das residuelle Schema, aber nicht ganz \mathbb{V} enthalten.

16.3. Satz. *(Charakterisierung der Cayley-Bacharach Schemata mit Liaison)*

Sei $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, das arithmetisch Gorenstein ist, sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{V}$ ein Unterschema, und sei $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{V}$ das zu \mathbb{X} in \mathbb{V} residuelle Unterschema. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) *\mathbb{X} ist ein Cayley-Bacharach Schema.*
- b) *Für jedes Unterschema $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{V}$ mit $\mathbb{Y}' \supseteq \mathbb{Y}$ und $\deg \mathbb{Y}' = \deg \mathbb{Y} + 1$ gilt $(I_{\mathbb{Y}'/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}} \subsetneq (I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}}$.*

Beweis: Vgl. [K8], 4.1. □

Im reduzierten Fall vereinfacht sich diese Charakterisierung erheblich.

16.4. Korollar. Sei $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, das arithmetisch Gorenstein ist, sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{V}$ ein Unterschema, und sei $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{V}$ das zu \mathbb{X} in \mathbb{V} residuelle Unterschema. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

a) \mathbb{X} ist ein Cayley-Bacharach Schema.

b) Ein generisch gewähltes Element von $(I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}}$ verschwindet an keinem Punkt von \mathbb{X} .

c) Es gibt ein Element von $(I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}}$, das an keinem Punkt von \mathbb{X} verschwindet.

Beweis: Jedes Schema $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{V}$ mit $\mathbb{Y}' \supseteq \mathbb{Y}$ und $\deg \mathbb{Y}' = \deg \mathbb{Y} + 1$ ist von der Form $\mathbb{Y}' = \mathbb{Y} \cup \{P\}$ mit einem Punkt $P \in \text{Supp}(\mathbb{X})$. Jetzt braucht man nur noch Satz 16.3 anzuwenden (vgl. auch [K1], 4.6). \square

Wir geben noch einen weiteren Fall an, in dem es besonders leicht ist, mit Hilfe von Satz 16.3 nachzuweisen, daß ein gewisses 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein Cayley-Bacharach Schema ist. (Im reduzierten Fall vgl. auch [K1], 4.8).

16.5. Korollar. Sei $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, das arithmetisch Gorenstein ist, sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{V}$ ein Unterschema, und sei $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{V}$ das zu \mathbb{X} in \mathbb{V} residuelle Unterschema. Wird das Ideal $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}$ von seinen homogenen Elementen vom minimalen Grad $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}$ erzeugt, so ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema.

Insbesondere stellt \mathbb{X} stets dann ein Cayley-Bacharach Schema dar, wenn es residuell ist zu einem Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{V}$, das als Schnitt von \mathbb{V} mit einer Hyperfläche gegeben ist.

Beweis: Wäre \mathbb{X} kein Cayley-Bacharach Schema, so gäbe es nach Satz 16.3 ein Unterschema $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{V}$ mit $\mathbb{Y}' \supseteq \mathbb{Y}$ und $\deg \mathbb{Y}' = \deg \mathbb{Y} + 1$ sowie $(I_{\mathbb{Y}'/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}'/\mathbb{V}}} = (I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}}$. Doch dann wäre

$$I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}} = \langle (I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}} \rangle = \langle (I_{\mathbb{Y}'/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}'/\mathbb{V}}} \rangle \subseteq I_{\mathbb{Y}'/\mathbb{V}}$$

ein Widerspruch zu $\mathbb{Y} \subsetneq \mathbb{Y}'$. \square

Es folgen einige Beispiele, die zeigen, wie man Satz 16.3 und seine Korollare anwenden kann.

16.6. Beispiel. Sei $\text{char}(K) \neq 2$, und sei $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{P}^2$ der reduzierte 0-dimensionale vollständige Durchschnitt der beiden Kurven $C_1 = \mathcal{Z}(X_1(X_1 - X_0)(X_1 - 2X_0))$ und $C_2 = \mathcal{Z}(X_2(X_2 - X_0)(X_2 - 2X_0))$, d.h. es gelte $\mathbb{V} = \{P_1, \dots, P_9\} \subseteq \mathbb{P}^2$ mit $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (1:0:1)$, $P_3 = (1:0:2)$, $P_4 = (1:1:0)$, $P_5 = (1:1:1)$, $P_6 = (1:1:2)$, $P_7 = (1:2:0)$, $P_8 = (1:2:1)$ und $P_9 = (1:2:2)$.

Dann ist $\mathbb{V} \setminus \{P_i\}$ nach Korollar 16.4 für jedes $i \in \{1, \dots, 9\}$ ein Cayley-Bacharach Schema, denn eine generisch gewählte Gerade durch P_i enthält keinen Punkt von $\mathbb{V} \setminus \{P_i\}$ (vgl. auch Satz 5.17). Das Schema $\mathbb{V} \setminus \{P_1, P_2\}$ ist kein Cayley-Bacharach Schema, da es nur eine Gerade durch P_1 und P_2 gibt und diese auch den Punkt P_3 enthält. Andererseits ist das Schema $\mathbb{V} \setminus \{P_2, P_4\}$ durchaus ein Cayley-Bacharach Schema, weil die eindeutige Gerade durch P_2 und P_4 keinen weiteren Punkt von \mathbb{V} enthält. Schließlich ist

auch das Schema $\mathbb{V} \setminus \{P_2, P_3, P_5, P_6\}$ ein Cayley-Bacharach Schema, denn das Verschwindungsideal von $\mathbb{Y} = \{P_2, P_3, P_5, P_6\}$ in \mathbb{V} erfüllt $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}} = 2$ und wird von zwei homogenen Elementen vom Grad zwei erzeugt, so daß wir Korollar 16.5 anwenden können.

Manchmal ist es notwendig, für die Liaison 0-dimensionale Schemata $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{P}^d$ zu verwenden, die arithmetisch Gorenstein, aber keine vollständigen Durchschnitte sind. Unser nächstes Beispiel stellt einen solchen Fall dar.

16.7. Beispiel. Sei $Q = \mathcal{Z}(X_0X_3 - X_1X_2) \subseteq \mathbb{P}^3$ die nichtsinguläre Quadrikenfläche, und sei $L \subseteq Q$ eine Gerade vom Typ $(0, 1)$. Wir wählen drei reduzierte Punkte $P_1, P_2, P_3 \in L$. Dann gibt es irreduzible Kurven C_1 vom Typ $(3, 4)$ und C_2 vom Typ $(4, 3)$ durch $\mathbb{Y} = \{P_1, P_2, P_3\}$. Sei $\mathbb{V} \subseteq Q$ der Durchschnitt dieser beiden Kurven. Nach [GRM], 3.2 besitzt die minimale graduiert-freie Auflösung des homogenen Koordinatenrings S von \mathbb{V} die Gestalt

$$0 \longrightarrow A(-9) \longrightarrow A(-7) \oplus A(-5)^4 \longrightarrow A(-4)^4 \oplus A(-2) \longrightarrow A \longrightarrow S \longrightarrow 0.$$

Daher ist \mathbb{V} arithmetisch Gorenstein und hat den Grad $\deg \mathbb{V} = 25$ sowie die Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{V}} : 1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 5 \ 3 \ 1$ sowie $\sigma_{\mathbb{V}} = 5$. Offensichtlich ist \mathbb{V} kein vollständiger Durchschnitt.

Die Castelnuovo-Funktion des zu \mathbb{Y} residuellen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{V}$ ist nach Satz 16.2.d gegeben durch $\Delta H_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 4 \ 2$, und es gilt $\sigma_{\mathbb{X}} = 4$ sowie $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}} = 1$. Die Hyperebenen, die \mathbb{Y} (und damit L) umfassen, schneiden auf der Kurve C_1 (und somit in \mathbb{V}) genau die drei Punkte von \mathbb{Y} aus. Daher ist \mathbb{X} nach Korollar 16.5 ein Cayley-Bacharach Schema.

Aus Satz 16.3 ergibt sich auch eine Charakterisierung maximaler Cayley-Bacharach Schemata mit Liaison (vgl. [K8], 4.2 und 4.6).

16.8. Korollar. *Sei $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, das arithmetisch Gorenstein ist, sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{V}$ ein Unterschema, und sei $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{V}$ das zu \mathbb{X} residuelle Unterschema. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

- a) \mathbb{X} ist ein maximales Cayley-Bacharach Schema.
- b) Für jedes Unterschema $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{Y}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y}' = \deg \mathbb{Y} - 1$ gibt es ein Unterschema $\mathbb{Y}'' \subseteq \mathbb{V}$ mit $\mathbb{Y}'' \supseteq \mathbb{Y}'$ und $\deg \mathbb{Y}'' = \deg \mathbb{Y}$, so daß $(I_{\mathbb{Y}''/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}'/\mathbb{V}}} = (I_{\mathbb{Y}'/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}'/\mathbb{V}}}$ gilt.

Insbesondere ist \mathbb{X} ein maximales Cayley-Bacharach Schema, wenn \mathbb{Y} die Cayley-Bacharach Eigenschaft vom Grad $\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}$ hat.

Für diese Charakterisierung werden in [K8], §4 wiederum eine Reihe von Anwendungsbeispielen gegeben. Im Fall von Beispiel 16.7 ergibt sich etwa zusätzlich, daß \mathbb{X} ein maximales Cayley-Bacharach Schema ist. Wir möchten jetzt noch das Korollar [K1], 4.10 auf die oben beschriebene Situation verallgemeinern, weil sich daraus effiziente Verfahren ableiten lassen, mit denen man prüfen kann, ob ein gegebenes 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein Cayley-Bacharach Schema ist (vgl. [K1], 4.11).

16.9. Satz. Sei $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, das arithmetisch Gorenstein ist, sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{V}$ ein Unterschema, und sei $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{V}$ das zu \mathbb{X} residuelle Unterschema. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) \mathbb{X} ist ein Cayley-Bacharach Schema.
- b) Es gilt $I_{\mathbb{V}} : (I_{\mathbb{Y}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}} = I_{\mathbb{X}}$.
- c) Es gilt $\text{Ann}_S((I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}}) = I_{\mathbb{X}/\mathbb{V}}$.
- d) Es gilt $(I_{\mathbb{V}})_{\sigma_{\mathbb{V}}} : (I_{\mathbb{Y}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}} = (I_{\mathbb{X}})_{\sigma_{\mathbb{X}}}$.
- e) Es gilt $\text{Ann}_S((I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}})_{\sigma_{\mathbb{X}}} = (I_{\mathbb{X}/\mathbb{V}})_{\sigma_{\mathbb{X}}}$.
- f) Die Dimension des K -Vektorraums $(A/(I_{\mathbb{V}} : (I_{\mathbb{Y}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}}))_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ ist $H_{\mathbb{X}}(\sigma_{\mathbb{X}})$.

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß Bedingung b) aus a) folgt. Hierbei brauchen wir nur die Inklusion “ \subseteq ” zu beweisen. Sei $F \in A$ ein homogenes Polynom mit $F \cdot (I_{\mathbb{Y}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}} \subseteq I_{\mathbb{V}}$. Angenommen, es gilt $F \notin I_{\mathbb{X}}$. Nach [K2], 2.2.b existiert dann ein Unterschema $\mathbb{X}' \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{X}' = \deg \mathbb{X} - 1$ und $\mathcal{Z}((F, I_{\mathbb{X}})^{\text{sat.}}) \subseteq \mathbb{X}' \subseteq \mathbb{X}$. Sei $\mathbb{Y}' \subseteq \mathbb{V}$ das zu \mathbb{X}' residuelle Unterschema, das nach Satz 16.2 den Grad $\deg \mathbb{Y}' = \deg \mathbb{Y} + 1$ hat und das \mathbb{Y} umfaßt. Wegen Satz 16.3 genügt es nun zu zeigen, daß $(I_{\mathbb{Y}'/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}'/\mathbb{V}}} = (I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}}$ gilt, um einen Widerspruch zu Voraussetzung a) zu erhalten. Wiederum ist nur die Inklusion “ \supseteq ” nichttrivial. Sei $G \in (I_{\mathbb{Y}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}}$. Auf Grund der Wahl von F gilt $F \cdot G \in I_{\mathbb{V}}$. Wegen $G + I_{\mathbb{V}} \in I_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}} = \text{Ann}_S(I_{\mathbb{X}/\mathbb{V}})$ haben wir auch $G \cdot I_{\mathbb{X}} \subseteq I_{\mathbb{V}}$. Da $I_{\mathbb{V}}$ saturiert ist, muß dann sogar $G \cdot (F, I_{\mathbb{X}})^{\text{sat.}} \subseteq I_{\mathbb{V}}$ gelten. Insbesondere folgt $G \cdot I_{\mathbb{X}'} \subseteq I_{\mathbb{V}}$, also die Behauptung $G \in (I_{\mathbb{Y}'})_{\alpha_{\mathbb{Y}'/\mathbb{V}}}$.

Bedingung c) ergibt sich aus b) durch Übergang zum Ring $S = A/I_{\mathbb{V}}$ und ist zu Bedingung b) äquivalent. Wegen Satz 16.2.c ist Bedingung d) eine triviale Konsequenz von Bedingung b). Ferner ist Bedingung e) nur eine Umformulierung von Bedingung d), die man durch Übergang zu $S = A/I_{\mathbb{V}}$ erhält. Die Bedingungen d) und f) sind äquivalent, weil die Inklusion $(I_{\mathbb{V}})_{\sigma_{\mathbb{V}}} : (I_{\mathbb{Y}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}} \supseteq (I_{\mathbb{X}})_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ stets gilt, so daß die Gleichheit dieser beiden K -Vektorräume bereits aus der Gleichheit ihrer Dimensionen folgt.

Schließlich müssen wir noch zeigen, daß sich Bedingung a) aus d) ergibt. Angenommen, \mathbb{X} ist kein Cayley-Bacharach Schema. Dann gibt es ein Unterschema $\mathbb{X}' \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{X}' = \deg \mathbb{X} - 1$ und ein homogenes Polynom $F \in A_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ mit $(I_{\mathbb{X}'/\mathbb{X}})_{\sigma_{\mathbb{X}}} = K \cdot F + I_{\mathbb{X}}$. Insbesondere ist dann $(F + I_{\mathbb{X}})_{\sigma_{\mathbb{X}+1}}$ ein 1-dimensionaler K -Vektorraum, d.h. für $i = 1, \dots, d$ gilt $X_i \cdot F \in K \cdot X_0 F + I_{\mathbb{X}}$. Nach Voraussetzung gilt $F \notin (I_{\mathbb{V}})_{\sigma_{\mathbb{V}}} : (I_{\mathbb{Y}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}}$, so daß wir ein homogenes Polynom $G \in (I_{\mathbb{Y}})_{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{V}}}$ finden können mit $F \cdot G \notin (I_{\mathbb{V}})_{\sigma_{\mathbb{V}}}$. Für $i = 1, \dots, d$ erhalten wir dabei $X_i \cdot F \cdot G \in K \cdot X_0 F G + G \cdot I_{\mathbb{X}} \subseteq K \cdot X_0 F G + I_{\mathbb{V}}$. Das von $F \cdot G + I_{\mathbb{V}}$ in S erzeugte Hauptideal ist also in jedem Grad $\geq \sigma_{\mathbb{X}} + \alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{V}}$ ein 1-dimensionaler K -Vektorraum und definiert ein Unterschema $\mathbb{V}' \subseteq \mathbb{V}$ vom Grad $\deg \mathbb{V}' = \deg \mathbb{V} - 1$. Wegen $\alpha_{\mathbb{V}'/\mathbb{V}} \leq \sigma_{\mathbb{V}}$ stellt dies einen Widerspruch dazu dar, daß \mathbb{V} arithmetisch Gorenstein, also insbesondere ein Cayley-Bacharach Schema ist. \square

Bedingung f) im vorhergehenden Satz ist so formuliert, daß man sie mit Hilfe der Computeralgebra gut nachprüfen kann (vgl. z.B. [CNR]). In Abschnitt 20 verallgemeinern wir das Verfahren aus [K1], 4.11 auf den nicht notwendig reduzierten Fall.

17. Nulldimensionale Unterschemata der projektiven Ebene

Betrachten wir nur 0-dimensionale Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ der projektiven Ebene, so haben wir gegenüber dem allgemeinen Fall eine Reihe von zusätzlichen Resultaten zur Verfügung. Zum Beispiel können wir \mathbb{X} als ein Unterschema der Kodimension zwei betrachten, das arithmetisch Cohen-Macaulay ist (vgl. Lemma 1.2.b), und haben deshalb den Struktursatz von Hilbert-Burch. Oder wir können verwenden, daß die Kurven, die \mathbb{X} enthalten, gleichzeitig Hyperflächen in \mathbb{P}^2 sind. Auch die Hilbert-Funktion bzw. die Castelnuovo-Funktion von \mathbb{X} haben eine besonders einfache Gestalt (vgl. [D], 2.1).

17.1. Lemma. *Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ ein 0-dimensionales Unterschema, so gilt $\Delta H_{\mathbb{X}}(i) \geq \Delta H_{\mathbb{X}}(i+1)$ für alle $i \geq \alpha_{\mathbb{X}} - 1$.*

Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir wieder $\alpha = \alpha_{\mathbb{X}}$, $\sigma = \sigma_{\mathbb{X}}$, $\Delta = \Delta_{\mathbb{X}}$, etc., sowie $\Delta H_{\mathbb{X}} : h_0 \ h_1 \ \cdots \ h_{\sigma} \ h_{\sigma+1}$ mit $h_0 = 1$ und $h_{\sigma+1} = \Delta$. Wegen Lemma 17.1 liegt es nahe, die Castelnuovo-Funktion eines 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ folgendermaßen zu zerlegen.

17.2. Definition. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ ein 0-dimensionales Unterschema.

a) Sind $n_1, n_2 \geq 0$ mit $\alpha < n_1 < n_2$ und $h_{n_1-1} > h_{n_1} = \cdots = h_{n_2} > h_{n_2+1}$, so nennen wir $[n_1, n_2]$ ein *Flachstück* von $\Delta H_{\mathbb{X}}$.

Im folgenden sei $\nu \geq 0$ die Anzahl der Flachstücke von $\Delta H_{\mathbb{X}}$.

b) Wir setzen $\tau_1 = \sigma + 1$ und $\tau_i = \max\{n \geq 0 \mid h_n > h_{n+1} = h_{n+2} \geq h_{\tau_{i-1}}\}$ für $i = 2, \dots, \nu$. Die Zahl τ_i ist so definiert, daß $h_{\tau_{i+1}}$ der letzte Wert von $\Delta H_{\mathbb{X}}$ vor dem i -ten Flachstück ist.

c) Für $i = 0, \dots, \nu - 1$ sei $\alpha_i = h_{\tau_{i+1}+1}$, und es gelte $\alpha_{\nu} = \alpha$. Die Zahl α_i ist der Funktionswert, den $\Delta H_{\mathbb{X}}$ im i -ten Flachstück annimmt.

d) Für $i = 0, \dots, \nu$ sei $\gamma_i = \max\{n \geq 0 \mid h_{n-1} = h_n > h_{n+1} \geq h_{\tau_{i+1}}\}$. Dieses Maximum existiert stets, außer im Fall $h_{\alpha-1} > h_{\alpha}$, in dem wir $\gamma_{\nu} = \alpha - 1$ setzen. Die Zahl γ_i ist der letzte Grad, in dem $\Delta H_{\mathbb{X}}$ den Wert α_i annimmt.

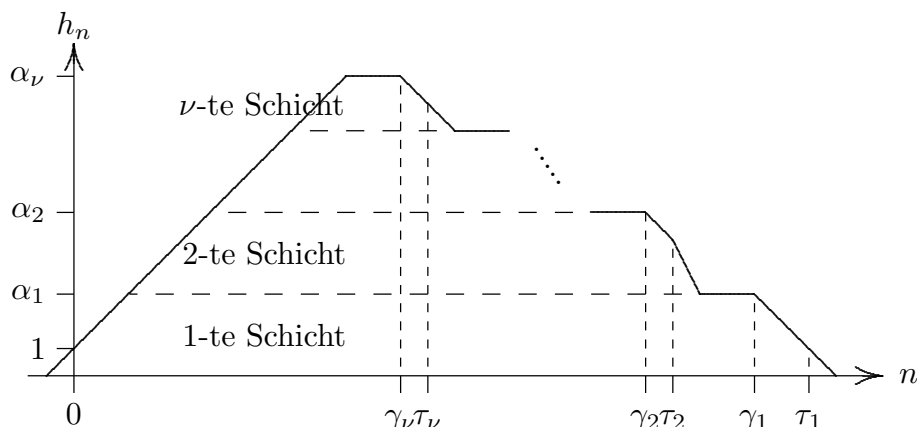
e) Für $i = 1, \dots, \nu$ sei

$$\Delta H_i(n) = \begin{cases} n+1 & \text{für } 0 \leq n \leq \alpha_i - 1 - \alpha_{i-1}, \\ \alpha_i - \alpha_{i-1} & \text{für } \alpha_i - \alpha_{i-1} \leq n \leq \gamma_i - \alpha_{i-1}, \\ h_{n+\alpha_{i-1}} - \alpha_{i-1} & \text{für } \gamma_i + 1 - \alpha_{i-1} \leq n \leq \tau_i - \alpha_{i-1}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion $\Delta H_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ entspricht der i -ten *Schicht* von $\Delta H_{\mathbb{X}}$, welche um α_{i-1} nach unten und nach links verschoben wurde.

Aus dieser Definition und aus [GMR] ergibt sich leicht, daß die Funktionen $\Delta H_1, \dots, \Delta H_{\nu}$ selbst Castelnuovo-Funktionen 0-dimensionaler Unterschemata von \mathbb{P}^2 sind. Wir veranschaulichen die eben definierte Zerlegung noch mit einer

Skizze:



Das Besondere an der Zerlegung der Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{X}}$ eines 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ ist nun, daß ihr im reduzierten Fall eine Zerlegung des Schemas selbst entspricht. Der nachstehende Satz faßt die Ergebnisse von [D] zusammen und wurde in [K11], 3.2 aus diesen abgeleitet.

17.3. Satz. (Die kanonische Zerlegung)

Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema. Die Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{X}}$ werde wie in Definition 17.2 in Schichten $\Delta H_1, \dots, \Delta H_{\nu}$ zerlegt. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}^{(1)} \cup \dots \cup \mathbb{X}^{(\nu)}$$

in Unterschemata $\mathbb{X}^{(i)} \subseteq \mathbb{X}$, so daß für $i = 1, \dots, \nu$ gilt $\Delta H_{\mathbb{X}^{(i)}} = \Delta H_i$.

Diese Zerlegung nennen wir die *kanonische Zerlegung* von \mathbb{X} . Die Unterschemata $\mathbb{X}^{(i)}$ heißen die *kanonischen Komponenten* von \mathbb{X} . Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wollen wir einige Resultate aus [K11] erklären, die verschiedene Invarianten eines reduzierten 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ mit denen seiner kanonischen Komponenten in Verbindung bringen. Wir präsentieren auch Schranken für diese Invarianten, von denen wir oftmals zeigen können, daß sie scharf sind. Als erstes wollen wir uns mit den folgenden Invarianten beschäftigen.

17.4. Definition. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema. Für jeden Punkt $P \in \text{Supp}(\mathbb{X})$ heißt

$$\text{deg}_{\mathbb{X}}(P) = \max\{\alpha_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \mid \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X} \text{ Unterschema vom Grad } \text{deg } \mathbb{X} - 1 \text{ mit } \mathcal{O}_{\mathbb{Y},P} \neq \mathcal{O}_{\mathbb{X},P}\}$$

der Grad von P in \mathbb{X} .

17.5. Bemerkungen. a) Ist \mathbb{X} reduziert, so gilt natürlich $\text{deg}_{\mathbb{X}}(P) = \alpha_{\mathbb{X} \setminus \{P\}/\mathbb{X}}$ für alle $P \in \text{Supp}(\mathbb{X})$.

b) Ist $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d$ reduziert und $\tilde{R} \cong K[T_1] \times \dots \times K[T_s]$ der ganze Abschluß von R , so ist der Führer $\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R}$ von R in \tilde{R} nach Korollar 2.10.a gegeben durch

$$\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R} \cong \prod_{i=1}^s T_i^{\text{deg}_{\mathbb{X}}(P_i)} \cdot K[T_i].$$

17.6. Definition. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, und sei $\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R} \subseteq R$ der Führer von R in \tilde{R} (vgl. Definition 2.8). Dann heißt die Länge $\ell(R/\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R})$ des Rings $R/\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R}$ die *Kolänge des Führers* von \mathbb{X} .

17.7. Satz. Sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema.

- a) Es gilt $\ell(\tilde{R}/\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R}) = \sum_{i=1}^s \deg_{\mathbb{X}}(P_i)$.
- b) Es gilt $\ell(R/\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R}) = \sum_{i=1}^s \deg_{\mathbb{X}}(P_i) - \sum_{i=0}^{\sigma+1} i \cdot h_i$.

Beweis: Behauptung a) folgt sofort aus Bemerkung 17.5.b, und Behauptung b) ergibt sich wegen $\ell(\tilde{R}/R) = \sum_{i=0}^{\infty} (\dim_K \tilde{R}_i - \dim_K R_i) = \sum_{i=0}^{\sigma} (s - H_{\mathbb{X}}(i)) = \sum_{i=0}^{\sigma+1} i \cdot h_i$ aus der exakten Sequenz $0 \rightarrow R/\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R} \rightarrow \tilde{R}/\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R} \rightarrow \tilde{R}/R \rightarrow 0$ (vgl. [K11], 4.4). □

Im Fall eines reduzierten Unterschemas \mathbb{X} der projektiven Ebene \mathbb{P}^2 erhalten wir aus der kanonischen Zerlegung eine obere Schranke für die Kolänge des Führers, die nur von der Castelnuovo-Funktion von \mathbb{X} abhängt.

17.8. Satz. Sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^2$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, und sei $\mathbb{X} = \mathbb{X}^{(1)} \cup \dots \cup \mathbb{X}^{(\nu)}$ die kanonische Zerlegung von \mathbb{X} .

- a) Für alle $P \in \text{Supp}(\mathbb{X}^{(i)})$ mit $1 \leq i \leq \nu$ gilt $\deg_{\mathbb{X}}(P) \leq \tau_i$.
- b) Es gilt $\ell(\tilde{R}/\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R}) = \sum_{i=1}^s \deg_{\mathbb{X}}(P_i) \leq \sum_{i=1}^{\nu} \tau_i \cdot \deg \mathbb{X}^{(i)}$.
- c) Es gilt $\ell(R/\mathfrak{F}_{\tilde{R}/R}) \leq \sum_{i=1}^{\nu} \tau_i \cdot \deg \mathbb{X}^{(i)} - \sum_{i=0}^{\sigma+1} i \cdot h_i$.

Beweis: Vgl. [K11], 3.3 und 4.5. □

Die kanonische Zerlegung kann auch dazu verwendet werden zu zeigen, daß die obere Schranke für die Kolänge des Führers aus Satz 17.8.c scharf ist. Dazu brauchen wir die folgende Beziehung zwischen dem Grad eines Punktes in \mathbb{X} und seinem Grad in der kanonischen Komponente $\mathbb{X}^{(i)}$, in der er liegt.

17.9. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, und sei $\mathbb{X} = \mathbb{X}^{(1)} \cup \dots \cup \mathbb{X}^{(\nu)}$ die kanonische Zerlegung von \mathbb{X} . Dann gilt für alle $i \in \{1, \dots, \nu\}$ und alle Punkte $P \in \text{Supp}(\mathbb{X}^{(i)})$ die Formel

$$\deg_{\mathbb{X}}(P) = \deg_{\mathbb{X}^{(i)}}(P) + \alpha_{i-1}.$$

Beweis: Vgl. [K11], 3.5. □

Die Castelnuovo-Funktion eines 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ heißt *vom fallenden Typ*, wenn für alle $i \geq \alpha_{\mathbb{X}} - 1$ mit $\Delta H_{\mathbb{X}}(i) > \Delta H_{\mathbb{X}}(i+1) > 0$ gilt $\Delta H_{\mathbb{X}}(i+1) > \Delta H_{\mathbb{X}}(i+2)$, mit anderen Worten, wenn die Funktion $\Delta H_{\mathbb{X}}$ streng monoton bis auf null fällt, sobald sie einmal zu fallen begonnen hat. Nach der Konstruktion der kanonischen Zerlegung sind die Funktionen $\Delta H_{\mathbb{X}^{(i)}} = \Delta H_i$ vom fallenden Typ. Der Satz [D], 4.4 besagt, daß es zu jeder Castelnuovo-Funktion ΔH_i vom fallenden Typ ein reduziertes Cayley-Bacharach Schema $\mathbb{Y}_i \subseteq \mathbb{P}^2$ gibt mit dieser Castelnuovo-Funktion. Im Fall $\text{char}(K) = 0$ folgt dies auch aus dem Satz von der uniformen Lage (vgl. Satz 7.1). Mit diesen Hilfsmitteln kann man nun die gesuchten Schemata konstruieren.

17.10. Satz. Sei $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ die Castelnuovo-Funktion eines 0-dimensionalen Unterschemas von \mathbb{P}^2 , sei ν die Anzahl der Flachstücke von h , und seien $\Delta H_1, \dots, \Delta H_\nu$ die gemäß Definition 17.2 gegebenen Schichten von h . Für jedes $i \in \{1, \dots, \nu\}$ wähle ein reduziertes Cayley-Bacharach Schema $\mathbb{Y}_i \subseteq \mathbb{P}^2$ mit Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{Y}_i} = \Delta H_i$.

a) Es gibt projektive Koordinatentransformationen $T_i : \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2$ für $i = 1, \dots, \nu$, so daß das Schema $\mathbb{X} = T_1(\mathbb{Y}_1) \cup \dots \cup T_\nu(\mathbb{Y}_\nu)$ die Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{X}} = h$ besitzt.

b) In der kanonischen Zerlegung $\mathbb{X} = \mathbb{X}^{(1)} \cup \dots \cup \mathbb{X}^{(\nu)}$ dieses Schemas gilt $\mathbb{X}^{(i)} = T_i(\mathbb{Y}_i)$ für $i = 1, \dots, \nu$.

c) Für $i = 1, \dots, \nu$ und für $P \in \text{Supp}(\mathbb{X}^{(i)})$ gilt $\deg_{\mathbb{X}}(P) = \tau_i$.

d) Es gilt $\ell(R/\tilde{\mathfrak{F}}_{\tilde{R}/R}) = \sum_{i=1}^{\nu} \tau_i \cdot \deg \mathbb{X}^{(i)} - \sum_{i=0}^{\sigma+1} i \cdot h_i$, d.h. die Schranke aus Satz 17.8.c ist scharf.

Beweis: Vgl. [K11], 3.6. □

Als nächstes wenden wir uns der Frage zu, ob es für 0-dimensionale Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ auch eine untere Schranke für die Kolänge des Führers gibt. Dazu erweist sich die Untersuchung der folgenden Punktmenge als hilfreich.

17.11. Definition. Sei $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ die Castelnuovo-Funktion eines 0-dimensionalen Unterschemas von \mathbb{P}^2 , sei $\alpha = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid h(i) < i+1\}$, sei $\sigma = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid h(i) \neq 0\} - 1$, und seien $\{s_0, \dots, s_{\sigma+1}\} \subseteq K$ sowie $\{t_0, \dots, t_{\alpha-1}\} \subseteq K$ Mengen paarweise verschiedener Elemente. Dann heißt das 0-dimensionale reduzierte Unterschema

$$\mathbb{X}(h) = \{(1 : s_i : t_j) \in \mathbb{P}^2 \mid 0 \leq i + j \leq \sigma + 1, 0 \leq j \leq h_{i+j}\} \subseteq \mathbb{P}^2$$

das *Castelnuovo-Schema* zu h mit den Parametern $s_0, \dots, s_{\sigma+1}$ und $t_0, \dots, t_{\alpha-1}$.

Die Bedeutung der Castelnuovo-Schemata ergibt sich aus Hartshorne's Methode zur Liftung von durch Lex-Segmente definierten monomialen Idealen (vgl. [H2]). Wie zum Beispiel in [GGR], 2.2 auf elementare Weise bewiesen wird, hat ein Castelnuovo-Schema \mathbb{X} zu h tatsächlich die Castelnuovo-Funktion $\Delta H_{\mathbb{X}} = h$, und man kann ein homogenes Erzeugendensystem seines Verschwindungsideals $I_{\mathbb{X}} \subseteq A$ explizit angeben. Für uns ist der folgende Satz von besonderer Wichtigkeit, der besagt, daß man in einem Castelnuovo-Schema auch den Grad jedes Punktes explizit angeben kann.

17.12. Satz. Sei $\mathbb{X}(h)$ ein Castelnuovo-Schema zu h mit den Parametern $s_0, \dots, s_{\sigma+1}$ und $t_0, \dots, t_{\alpha-1}$. Dann hat der Punkt $P = (1 : s_p : t_q) \in \text{Supp}(\mathbb{X}(h))$ den Grad

$$\deg_{\mathbb{X}(h)}(P) = \max\{i \geq \alpha \mid h_i > q\}$$

in $\mathbb{X}(h)$. Insbesondere hängt dieser Grad nur von q ab, d.h. alle Punkte auf der Geraden $\mathcal{Z}(X_2 - t_q X_0)$ haben den gleichen Grad in $\mathbb{X}(h)$.

Beweis: Vgl. [K11], 1.9. □

Unser Hauptresultat über die Kolänge des Führers ist, daß sie für Castelnuovo-Schemata minimal wird. Setzen wir $\mathbb{X}_{\leq i} = \{P \in \text{Supp}(\mathbb{X}) \mid \deg_{\mathbb{X}}(P) \leq i\}$ für jedes 0-dimensionale Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ und jede Zahl $i \geq 0$, so haben wir genauer die folgenden Abschätzungen.

17.13. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ ein 0-dimensionales Unterschema, sei $h = \Delta H_{\mathbb{X}}$ die Castelnuovo-Funktion von \mathbb{X} , und sei $\mathbb{X}(h)$ ein Castelnuovo-Schema zu h .*

a) *Für jedes $i \geq 0$ besteht $\mathbb{X}_{\leq i}$ aus höchstens so vielen Punkten wie $\mathbb{X}(h)_{\leq i}$.*

b) *Ist \mathbb{X} reduziert, so gilt $\ell(R/\tilde{\mathfrak{F}}_{\tilde{R}/R}) \geq \sum_{P \in \text{Supp}(\mathbb{X})} \deg_{\mathbb{X}(h)}(P) - \sum_{i=0}^{\sigma+1} i \cdot h_i$. Hierbei hängt der Ausdruck auf der rechten Seite nur von h ab, und die Ungleichung ist eine Gleichung, falls \mathbb{X} ein Castelnuovo-Schema zu h ist.*

Beweis: Vgl. [K11], 2.2, 2.4 und 4.5.a. □

Im restlichen Teil dieses Abschnitts wollen wir auch noch die folgenden Invarianten eines reduzierten 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ betrachten.

17.14. Definition. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema.

a) Die Zahl $\ell(\tilde{R}/R)$ heißt der *Singularitätengrad* von \mathbb{X} .

b) Die Zahl $\delta_{\mathbb{X}} = \ell(\tilde{R}/R) - \ell(R/\tilde{\mathfrak{F}}_{\tilde{R}/R})$ heißt die *Superabundanz* von \mathbb{X} .

17.15. Bemerkungen. a) Der affine Kegel C über \mathbb{X} besteht aus $s = \deg \mathbb{X}$ reduzierten Geraden in \mathbb{A}^3 , die sich im Ursprung $O = (0, 0, 0)$ schneiden. Der lokale Ring von C in O ist dann gegeben durch $\mathcal{O}_{C,O} \cong R_{\mathfrak{m}}$. Da der Singularitätengrad von \mathbb{X} die Gleichung $\ell(\tilde{R}/R) = \ell(\tilde{R}_{\mathfrak{m}}/R_{\mathfrak{m}})$ erfüllt, stimmt er also mit dem üblichen Singularitätengrad der Kurve C im Punkt O überein.

b) Wie wir sehen werden, gilt stets $\ell(\tilde{R}/R) \geq \ell(R/\tilde{\mathfrak{F}}_{\tilde{R}/R})$. Dies erklärt den Namen ‘‘Superabundanz’’ für $\delta_{\mathbb{X}}$. Aus der exakten Sequenz $0 \rightarrow R/\tilde{\mathfrak{F}}_{\tilde{R}/R} \rightarrow \tilde{R}/\tilde{\mathfrak{F}}_{\tilde{R}/R} \rightarrow \tilde{R}/R \rightarrow 0$ folgt

$$\delta_{\mathbb{X}} = \ell(\tilde{R}/\tilde{\mathfrak{F}}_{\tilde{R}/R}) - 2 \cdot \ell(R/\tilde{\mathfrak{F}}_{\tilde{R}/R}).$$

Die Ungleichung $\delta_{\mathbb{X}} \geq 0$ wurde in [HK], 3.7 in der lokalen Situation bewiesen. Wir werden sie im nächsten Satz verfeinern.

c) Nach Satz 17.7 kann man die Superabundanz $\delta_{\mathbb{X}}$ auch ausdrücken durch die Formel

$$\delta_{\mathbb{X}} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\sigma+1} i \cdot h_i - \sum_{P \in \text{Supp}(\mathbb{X})} \deg_{\mathbb{X}}(P).$$

17.16. Satz. Sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^2$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema mit Castelnuovo-Funktion $h = \Delta H_{\mathbb{X}}$. Mit den Notationen von Definition 17.2 und Satz 17.3 sei

$$\delta'_h = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\sigma+1} i \cdot h_i - \sum_{i=1}^{\nu} \tau_i \cdot \deg \mathbb{X}^{(i)}.$$

Ferner sei $\mathbb{X}(h)$ ein Castelnuovo-Schema zu h .

a) Wir haben eine Kette von Ungleichungen $\delta_{\mathbb{X}(h)} \geq \delta_{\mathbb{X}} \geq \delta'_h \geq 0$. Hierbei hängen die Zahlen $\delta_{\mathbb{X}(h)}$ und δ'_h nur von der Funktion h ab.

b) In der obigen Kette gilt $\delta'_h = 0$ genau dann, wenn die Hilbert-Funktion von \mathbb{X} symmetrisch ist.

c) In der obigen Kette gilt $\delta_{\mathbb{X}} = \delta'_h$ genau dann, wenn jede der kanonischen Komponenten $\mathbb{X}^{(1)}, \dots, \mathbb{X}^{(\nu)}$ von \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema ist.

d) In der obigen Kette gilt $\delta_{\mathbb{X}} = \delta'_h = 0$ genau dann, wenn \mathbb{X} arithmetisch Gorenstein ist.

Beweis: Vgl. [K11], 4.8. □

Der letzte Teil dieses Satzes verallgemeinert D. Gorensteins ursprüngliche Charakterisierung der nach ihm benannten Ringe (vgl. [Gor], Thm. 6). Für Beispiele und Anwendungen der vorangehenden Resultate verweisen wir den Leser auf [K11].

18. Determinantielle nulldimensionale Schemata

In diesem Abschnitt wollen wir dem Leser einige Charakterisierungen 0-dimensionaler (und höherdimensionaler) Unterschemata von \mathbb{P}^d vorstellen, die “determinantiell” sind in dem Sinne, daß ihr homogenes Verschwindungsideal von den maximalen Minoren einer homogenen Matrix homogener Polynome erzeugt wird. Selbstverständlich muß man dabei Bedingungen an die Größe dieser Matrix stellen, weil ja sonst jedes abgeschlossene Unterschema von \mathbb{P}^d determinantiell wäre. Der Ausgangspunkt der Arbeit [K12], auf der dieser Abschnitt basiert, war das folgende Resultat des Autors (vgl. [K7], 1.3).

18.1. Satz. *Ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ ist genau dann ein vollständiger Durchschnitt, wenn \mathbb{X} arithmetisch Gorenstein ist, und wenn es eine Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^3$ gibt, die arithmetisch Cohen-Macaulay und ein lokal vollständiger Durchschnitt ist, so daß \mathbb{X} das zu einem effektiven Cartier-Divisor von C assoziierte Unterschema darstellt, und so daß die Garbe $\mathcal{O}_C(\mathbb{X})$ zu $\omega_C(\sigma_{\mathbb{X}})$ isomorph ist und von ihren globalen Schnitten erzeugt wird.*

Ein vollständiger Durchschnitt wie in diesem Satz ist natürlich nichts anderes als ein determinantielles Schema, dessen Verschwindungsideal von den maximalen Minoren einer 3×1 -Matrix homogener Polynome erzeugt wird. Man beachte, daß diese maximalen Minoren ein Unterschema der “erwarteten” Kodimension definieren. Ganz allgemein führen wir nun die folgenden Begriffe ein.

18.2. Definition. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein abgeschlossenes Unterschema und $r = \text{codim } \mathbb{X} - 1$.

a) Das Schema \mathbb{X} heißt *standard determinantiell*, wenn es eine Zahl $t \geq 1$ und eine homogene $t \times (t+r)$ -Matrix \mathfrak{A} homogener Polynome aus A gibt, so daß das homogene Verschwindungsideal $I_{\mathbb{X}}$ von den maximalen Minoren von \mathfrak{A} erzeugt wird. (In dieser Situation definieren die maximalen Minoren von \mathfrak{A} also gerade ein Unterschema der “erwarteten” Kodimension $r + 1$.)

b) Das Schema \mathbb{X} heißt *gut determinantiell*, wenn es standard determinantiell ist, und wenn man die Matrix \mathfrak{A} zusätzlich so wählen kann, daß sie (eventuell nach einem Basiswechsel) eine $(t-1) \times (t+r)$ -Untermatrix enthält, deren maximale Minoren ein Unterschema der Kodimension $r + 2$ definieren.

Eine homogene Matrix – wie sie in dieser Definition verlangt wird – ist dabei die Matrix einer homogenen Abbildung zwischen zwei endlich erzeugten, graduiert-freien A -Moduln. Wir illustrieren diese Konzepte mit einigen Beispielen.

18.3. Beispiel. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ das Unterschema, das von den maximalen Minoren der Matrix $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & 0 \\ 0 & X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}$ definiert wird. Dann ist \mathbb{X} das 0-dimensionale Unterschema, das am Punkt $P = (1:0:0:0)$ konzentriert ist und $\mathcal{O}_{\mathbb{X},P} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3,P}/\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^3,P}^2$ erfüllt. Wegen $r = \text{codim } \mathbb{X} - 1 = 2$ ist \mathbb{X} ein standard determinantielles Schema. Jedoch enthält die Matrix \mathfrak{A} – selbst nach eventuellem Basiswechsel – keine 1×4 -Untermatrix, deren Einträge das leere Unterschema, also das Unterschema der Kodimension $r + 2 = 4$ von

\mathbb{P}^3 definieren, denn alle Einträge von \mathfrak{A} liegen in dem Ideal (X_1, X_2, X_3) . Somit ist \mathbb{X} kein gut determinantielles Schema.

18.4. Beispiel. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema, das von den 2×2 -Minoren einer Matrix $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} F_0 & \cdots & F_d \\ G_0 & \cdots & G_d \end{pmatrix}$ wie in Satz 5.22 definiert wird. Dann hat \mathbb{X} die Kodimension $d = r + 1$, und die Teilmatrix $(F_0 \cdots F_d)$ definiert ein Unterschema $\emptyset \subseteq \mathbb{P}^d$ der Kodimension $d + 1 = r + 2$. Somit ist \mathbb{X} ein gut determinantielles Schema.

Man kann Satz 5.22 also so interpretieren, daß ein gut determinantielles 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ im Fall $t = 2$ stets ein Cayley-Bacharach Schema ist. Es stellt sich die Frage, ob dies für alle $t \geq 1$ so ist.

Möchten wir Satz 18.1 auf den Fall $t \geq 2$ ausdehnen, so zeigt ein näheres Studium seines Beweises in [K7] und [K13] zusammen mit einem Ergebnis aus [MNP], daß er die folgende Verallgemeinerung besitzt (vgl. [K12], 4.8).

18.5. Satz. Für ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) \mathbb{X} ist gut determinantiell.
- b) \mathbb{X} ist standard determinantiell und ein lokal vollständiger Durchschnitt.
- c) Es gibt eine Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^3$, die arithmetisch Cohen-Macaulay und ein lokal vollständiger Durchschnitt ist, so daß \mathbb{X} das zu einem effektiven Cartier-Divisor von C assoziierte Unterschema darstellt, und so daß für ein $i \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathcal{O}_C(\mathbb{X}) \cong \omega_C(i)$.

Wird \mathbb{X} hierbei von den maximalen Minoren einer $t \times (t+r)$ -Matrix homogener Polynome definiert, so ist der Cohen-Macaulay Typ des homogenen Koordinatenrings von \mathbb{X} gegeben durch $\binom{r+t-1}{r}$, und der Cohen-Macaulay Typ des homogenen Koordinatenrings von C ist $\binom{r+t-1}{r-1}$.

Unser Ziel ist es nun, diesen Satz noch weiter auf den Fall 0-dimensionaler Unterschemata von \mathbb{P}^d mit $d \geq 3$ zu verallgemeinern. Dazu brauchen wir zuerst eine geeignete Verallgemeinerung der reflexiven Garben vom Rang zwei, die im Beweis von Satz 18.1 in [K7] und [K13] benützt werden. Hierzu dienen die folgenden Begriffe.

18.6. Definition. Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} zwei endlich erzeugte, lokal freie $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}$ -Modulgarben vom Rang $f = \text{rk}(\mathcal{F})$ bzw. $g = \text{rk}(\mathcal{G})$ auf \mathbb{P}^d , und sei $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein generisch surjektiver Garbenhomomorphismus.

- a) Es gibt einen Komplex von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}$ -Moduln

$$0 \rightarrow \Lambda^f \mathcal{F} \otimes \text{Sym}^{f-g-1}(\mathcal{G}^\vee) \otimes \Lambda^g(\mathcal{G}^\vee) \rightarrow \Lambda^{f-1} \mathcal{F} \otimes \text{Sym}^{f-g-2}(\mathcal{G}^\vee) \otimes \Lambda^g(\mathcal{G}^\vee) \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^{g+2} \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}^\vee \otimes \Lambda^g(\mathcal{G}^\vee) \rightarrow \Lambda^{g+1} \mathcal{F} \otimes \Lambda^g(\mathcal{G}^\vee) \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{G} \rightarrow 0.$$

Dieser Komplex heißt der *Buchsbaum-Rim Komplex* von Φ (vgl. [Bu], [BR]).

- b) Hat der Träger der Garbe $\text{coker}(\Phi)$ die erwartete Kodimension $f - g + 1$, so ist der Buchsbaum-Rim Komplex exakt und heißt die *Buchsbaum-Rim Auflösung* von Φ . In diesem Fall heißt die Garbe $\mathcal{B}_\Phi = \ker(\Phi)$ eine *erste Buchsbaum-Rim Garbe*, und die $(i+1)$ -te Syzygiengarbe der Buchsbaum-Rim Auflösung heißt eine *i -te Buchsbaum-Rim Garbe* (vgl. [MNP]).

In unserer Situation werden \mathcal{F} und \mathcal{G} stets direkte Summen von Geradenbündeln $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(i)$ mit $i \in \mathbb{Z}$ sein, so daß der Garbenhomomorphismus Φ durch eine homogene Matrix \mathfrak{A} homogener Polynome repräsentiert wird. Dies setzen wir im folgenden immer voraus.

18.7. Bemerkung. Definieren die maximalen Minoren einer homogenen $t \times (t+r)$ -Matrix \mathfrak{A} ein Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ der erwarteten Kodimension $r + 1$, so stellt der Buchsbaum-Rim Komplex eine freie Auflösung von $\text{coker}(\Phi)$ dar, und der Annihilator von $\text{coker}(\Phi)$ ist gegeben durch das Ideal, das von den maximalen Minoren von \mathfrak{A} erzeugt wird (vgl. [E], ex. 20.6).

Mit diesen Begriffen können wir eine Reihe von Charakterisierungen gut determinantieller Schemata geben.

18.8. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein abgeschlossenes Unterschema der Kodimension $\text{codim } \mathbb{X} = r + 1 \geq 2$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

- a) \mathbb{X} ist ein gut determinantielles Schema.
- b) \mathbb{X} ist das Nullstellenschema eines regulären globalen Schnitts des Duals einer ersten Buchsbaum-Rim Garbe vom Rang $r + 1$.
- c) \mathbb{X} ist standard determinantiell und ein lokal vollständiger Durchschnitt außerhalb eines Unterschemas $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ der Kodimension $r + 2$ in \mathbb{P}^d .
- d) \mathbb{X} ist standard determinantiell und ein generisch vollständiger Durchschnitt.

Beweis: Vgl. [K12], 3.1, 3.4 und 3.5. □

18.9. Beispiel. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ das standard determinantielle Unterschema aus Beispiel 18.3. Wegen $\mathcal{O}_{\mathbb{X},P} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3,P}/\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^3,P}^2$ ist \mathbb{X} kein lokal vollständiger Durchschnitt, so daß \mathbb{X} auch nach Satz 18.8 nicht gut determinantiell sein kann.

Um die gesuchte Verallgemeinerung der Sätze 18.1 und 18.5 formulieren zu können, brauchen wir noch geeignete Kandidaten, die die Rolle der Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^3$ und der Bedingung $\mathcal{O}_C(\mathbb{X}) \cong \omega_C(i)$ spielen können.

18.10. Definition. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein standard determinantielles Unterschema der Kodimension $\text{codim } \mathbb{X} = r + 1$. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ die Menge der Isomorphieklassen aller endlich erzeugten, graduierten A -Moduln M , für die $\text{Ann}_A(M) = I_{\mathbb{X}}$ gilt und die eine minimale homogene Präsentation der Form

$$\bigoplus_{i=1}^{r+\mu} A(a_i) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{\mu} A(b_j) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

mit $\mu \geq 1$ und $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$ haben.

Gilt $\text{codim } \mathbb{X} = r + 1 = 2$, oder ist \mathbb{X} ein vollständiger Durchschnitt, so kann man zeigen, daß die Menge $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}$ nur aus einem Element besteht. Der nächste Satz ist die allgemeinste Version von Satz 18.1, die in [K12], 3.7 bewiesen wird.

18.11. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein abgeschlossenes Unterschema, und sei $r = \text{codim } \mathbb{X} - 1$.

a) Genau dann ist \mathbb{X} standard determinantiell, wenn es ein gut determinantielles Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}^d$ gibt mit $\text{codim } \mathbb{Y} = r$, so daß $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}$ das Nullstellenschema eines regulären globalen Schnitts $t \in \Gamma_*(\widetilde{M})$ mit $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{Y}}$ ist.

b) Genau dann ist \mathbb{X} gut determinantiell, wenn es ein gut determinantielles Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}^d$ gibt mit $\text{codim } \mathbb{Y} = r$, so daß $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}$ das Nullstellenschema eines regulären globalen Schnitts $t \in \Gamma_*(\widetilde{M})$ mit $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{Y}}$ ist, und so daß $\text{coker}(t)$ zu einer Idealgarbe positiver Höhe von $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$ isomorph ist.

Als Anwendung erhalten wir die gesuchte Verallgemeinerung von Satz 18.5, also eine Charakterisierung gut determinantieller 0-dimensionaler Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$.

18.12. Korollar. Für ein 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

a) \mathbb{X} ist gut determinantiell.

b) Es gibt eine gut determinantielle Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^d$, die ein lokal vollständiger Durchschnitt ist, so daß \mathbb{X} das zu einem effektiven Cartier-Divisor von C assoziierte abgeschlossene Unterschema darstellt, und so daß es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(i) \xrightarrow{t} \widetilde{M} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(j) \longrightarrow 0$$

mit $i, j \in \mathbb{Z}$ und $M \in \mathcal{M}_C$ gibt.

Beweis: Vgl. [K12], 4.7. □

Für Beispiele und Anwendungen dieser Charakterisierung verweisen wir den Leser auf [K12], §4. Wir erwähnen noch die folgende Charakterisierung vollständiger Durchschnitte, die ebenfalls aus Satz 18.11 folgt und Satz 18.1 verallgemeinert.

18.13. Korollar. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein abgeschlossenes Unterschema, und sei $r = \text{codim } \mathbb{X} - 1 \geq 2$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

a) \mathbb{X} ist ein vollständiger Durchschnitt.

b) \mathbb{X} ist arithmetisch Gorenstein, und es gibt ein gut determinantielles Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit $\text{codim } \mathbb{Y} = r$, so daß $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}$ das Nullstellenschema eines regulären globalen Schnitts $t \in \Gamma_*(\widetilde{M})$ mit $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{Y}}$ ist.

In diesem Fall kann man \mathbb{Y} und M so wählen, daß \widetilde{M} von seinen globalen Schnitten erzeugt wird.

Beweis: Vgl. [K12], 4.1. □

19. Kodierungstheorie

Besitzt der algebraisch abgeschlossene Grundkörper K eine positive Charakteristik $\text{char}(K) = p > 0$, und betrachten wir nur reduzierte 0-dimensionale Unterschemata $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^d$, für die alle Punkte Koordinaten in einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q \subseteq K$ mit $q = p^e$ und $e \geq 1$ haben, so ist ziemlich klar, daß dies bzgl. der möglichen Werte der Hilbert-Funktion oder anderer Invarianten und bzgl. der Uniformität von \mathbb{X} zu starken Einschränkungen führt. Zum Beispiel können höchstens $q + 1$ Punkte von \mathbb{X} auf einer Geraden liegen, oder wir können Beispiel 7.10 betrachten, wo wir fanden, daß bestimmte Punktmengen höchstens 1-uniform sind. Schon die Frage nach den möglichen Hilbert-Funktionen reduzierter 0-dimensionaler Unterschemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^d$ scheint schwierig und im allgemeinen Fall noch ungelöst zu sein.

In der Arbeit [K14] wurde daher die einfachere Frage untersucht, welche Werte die Invariante $\sigma_{\mathbb{X}}$ in dieser Situation annehmen kann. Wir stellen nachfolgend die Hauptergebnisse von [K14] vor und zeigen dann, wie der beschriebene Problemkreis mit den Fragestellungen der Kodierungstheorie zusammenhängt.

Ist $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^d$ ein nicht ausgeartetes, reduziertes, 0-dimensionales Unterschema, so gilt offenbar $1 \leq d < s \leq \deg \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) = \frac{q^{d+1}-1}{q-1}$. Anstelle der Invarianten $\sigma_{\mathbb{X}}$ betrachten wir im folgenden die Zahl $r_{\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{X}} + 1$, die auch die *Castelnuovo-Mumford Regularität* von \mathbb{X} genannt wird. Um die möglichen Werte von $r_{\mathbb{X}}$ besser studieren zu können, führen wir die Funktionen

$$\mathfrak{s}(s, d, q) = \max\{r_{\mathbb{X}} \mid \mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \text{ nicht ausgeartetes, reduziertes, } \\ \text{0-dimensionales Unterschema vom Grad } s\}$$

und
$$\mathfrak{s}(s, q) = \max\{\mathfrak{s}(s, d, q) \mid 1 \leq d < s \leq \frac{q^{d+1}-1}{q-1}\}$$

ein. Die Hilbert-Funktion der Menge $\mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q)$ aller \mathbb{F}_q -rationalen Punkte wurde in [Sø], Thm. 1 berechnet und lautet folgendermaßen.

19.1. Lemma. *Die Hilbert-Funktion des reduzierten 0-dimensionalen Schemas $\mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^d$ ist gegeben durch*

$$H_{\mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q)}(i) = \sum_{\substack{0 \leq t < i \\ t \equiv i \pmod{q-1}}} \sum_{0 \leq j \leq d+1} (-1)^j \binom{d+1}{j} \binom{t - qj + d}{t - qj}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Auf Grund dieses Lemmas ist auch $\sigma(s, d, q) = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid s > H_{\mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q)}(i - 1)\}$ effektiv berechenbar. Unser erster Satz führt die Bestimmung der möglichen Werte von $r_{\mathbb{X}}$ auf die Berechnung der Funktion $\mathfrak{s}(s, d, q)$ zurück.

19.2. Satz. *Sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^d$ ein nicht ausgeartetes, reduziertes, 0-dimensionales Unterschema. Dann gilt*

$$\sigma(s, d, q) \leq r_{\mathbb{X}} \leq \mathfrak{s}(s, d, q),$$

und jeder Wert zwischen diesen beiden Schranken wird angenommen.

Beweis: Vgl. [K14], 1.1. □

Was nun die Funktion $\mathfrak{s}(s, d, q)$ betrifft, so wird sie in [K14] am Anfang und am Ende des Intervalls $d < s \leq \frac{q^{d+1}-1}{q-1}$ explizit bestimmt, und in den Fällen $q = 2$ sowie $d = 2$ wird sie vollständig berechnet. Wir beginnen mit dem allgemeinen Fall.

- 19.3. Satz.** a) Für $d < s \leq d + q$ gilt $\mathfrak{s}(s, d, q) = s - d$.
 b) Für $d + q \leq s < d + 2q$ gilt $\mathfrak{s}(s, d, q) = q$.
 c) Für $d + 2q \leq s < q^d$ gilt $\mathfrak{s}(s - 1, d, q) \leq \mathfrak{s}(s, d, q) \leq \frac{1}{2}(s + 2 - d)$.
 d) Für $q^d \leq s < \frac{q^{d+1}-1}{q-1}$ gilt $\mathfrak{s}(s, d, q) = d(q - 1)$.
 e) Es gilt $\mathfrak{s}(\frac{q^{d+1}-1}{q-1}, d, q) = d(q - 1) + 1$.

Beweis: Vgl. [K14], 1.4. □

Aus einem Ergebnis über die Funktion $\mathfrak{s}(s, d, q)$ ergeben sich meist auch Werte bzw. Abschätzungen der Funktion $\mathfrak{s}(d, q)$.

- 19.4. Korollar.** a) Für $2 \leq s \leq q + 1$ gilt $\mathfrak{s}(s, q) = s - 1$.
 b) Für $q + 1 \leq s \leq 2q + 1$ gilt $\mathfrak{s}(s, q) = q$.
 c) Für $s \geq 2q + 2$ gilt $\mathfrak{s}(s, q) \leq \frac{q-1}{2q-1}(s + 2)$.

Beweis: Vgl. [K14], 1.5. □

In dem für die Kodierungstheorie besonders relevanten Fall $q = 2$ kennen wir die Zahl $\mathfrak{s}(s, d, q)$ auch in dem noch fehlenden Bereich $d + 4 \leq s < 2^d$.

- 19.5. Satz.** Sei $d + 1 \leq s \leq 2^{d+1} - 1$, und sei $\ell \geq 1$ die eindeutig bestimmte Zahl mit $2^\ell - \ell \leq s - d < 2^{\ell+1} - (\ell + 1)$. Dann gilt $\mathfrak{s}(s, d, 2) = \ell$.

Beweis: Vgl. [K14], 1.2. □

Die Beweise dieser Sätze verwenden außer Lemma 19.1 nur Methoden der Theorie der 0-dimensionalen Schemata wie wir sie in den vorangegangenen Abschnitten dargestellt haben. Auch im Fall $d = 2$, also für \mathbb{F}_q -rationale Punkte in \mathbb{P}^2 , können wir die Funktion $\mathfrak{s}(s, d, q)$ im noch fehlenden Bereich $2 + 2q \leq s < q^2$ explizit bestimmen. Die Haupthilfsmittel hierzu sind Lemma 17.1 und die kanonische Zerlegung (vgl. Satz 17.3).

- 19.6. Satz.** a) Für $q + 2 \leq s \leq 3q - 1$ gilt $\mathfrak{s}(s, 2, q) = q$.
 b) Für $3q \leq s < q^2$ gilt $\mathfrak{s}(s, 2, q) = \lfloor \frac{s}{q} \rfloor + q - 2$.

Beweis: Vgl. [K14], 1.6. □

Im restlichen Teil dieses Abschnitts beschäftigen wir uns mit den Zusammenhängen zwischen diesen und ähnlichen Resultaten über reduzierte 0-dimensionale Unterschemata $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^d$ und der Kodierungstheorie. In der Kodierungstheorie betrachtet man lineare Teilräume $C \subseteq \mathbb{F}_q^s$ und nennt sie *lineare Koden*. Die Zahl s heißt die *Länge* und die Zahl $d(C) = \dim_{\mathbb{F}_q}(C)$ die *Dimension* von C . Eine wichtige Rolle spielt auch die kleinste Zahl $m(C)$ von Einträgen ungleich null, die ein Vektor aus

$C \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ hat. Sie heißt der *Minimalabstand* von C . Man bezeichnet C auch als linearen $[s, d(C)]_q$ -Kode. Für die Parameter eines linearen Kode gibt es eine einfache Schranke (vgl. z.B. [vL], 5.2.2).

19.7. Satz. (*Singleton-Schranke*)

Für jeden linearen Kode $C \subseteq \mathbb{F}_q^s$ gilt $m(C) \leq s - d(C) + 1$.

Ein linearer Kode, der diese Schranke annimmt, heißt ein *MDS-Kode* (“maximum distance separable”). Ein Ziel der Kodierungstheorie ist es, “gute” Kodieren (z.B. MDS-Koden) zu finden. Ausgehend von einem reduzierten 0-dimensionalen Unterschema $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^d$ können wir dabei für jede Zahl $1 \leq r \leq \sigma_{\mathbb{X}}$ die folgende Konstruktion durchführen (vgl. [Han]).

19.8. Bemerkung. Sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^d \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, und sei $I_{\mathbb{X}} \subseteq \mathbb{F}_q[X_0, \dots, X_d]$ das homogene Ideal, das von allen homogenen Polynomen erzeugt wird, die an allen Punkten von \mathbb{X} verschwinden. Wir nehmen an, daß $\mathbb{X} \cap \mathcal{Z}(X_0) = \emptyset$ gilt und schreiben $P_i = (1 : p_{i1} : \dots : p_{id})$ mit $p_{i1}, \dots, p_{id} \in \mathbb{F}_q$ für $i = 1, \dots, s$.

- a) Der Ring $R = \mathbb{F}_q[X_0, \dots, X_d]/I_{\mathbb{X}}$ ist der homogene Koordinatenring von \mathbb{X} in $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^d$.
- b) Für jede Zahl $1 \leq r \leq \sigma_{\mathbb{X}}$ hat man eine injektive \mathbb{F}_q -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_r : R_r &\longrightarrow \mathbb{F}_q^s \\ f &\longmapsto (f(1, p_{11}, \dots, p_{1d}), \dots, f(1, p_{s1}, \dots, p_{sd})) \end{aligned}$$

deren Bild ein linearer $[s, H_{\mathbb{X}}(r)]_q$ -Kode ist. Wir nennen $C = \text{im } \Phi_1$ den zu \mathbb{X} assoziierten linearen Kode und $C^r = \text{im } \Phi_r$ den r -ten zu C assoziierten Reed-Muller Kode.

Jeder lineare Kode ist auf die beschriebene Weise assoziiert zu einem reduzierten 0-dimensionalen Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^d$. (Man braucht nur $r = 1$ zu wählen.) Zwei lineare Kodieren heißen *äquivalent*, wenn sie sich nur um eine lineare Transformation aus $\mathfrak{S}_s \times (\mathbb{F}_q^*)^s \subseteq GL_s(\mathbb{F}_q)$ unterscheiden. Die Zahl der nicht äquivalenten Kodieren der Form C^r mit $r \geq 1$ bezeichnen wir mit $r(C)$. Mit der vorstehenden Konstruktion und diesen Sprechweisen haben die weiter oben aufgeführten Ergebnisse über die Invarianten $r_{\mathbb{X}}$ und die Funktionen $\mathfrak{s}(s, d, q)$ sowie $\mathfrak{s}(s, q)$ die folgenden Interpretationen.

19.9. Satz. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^d$ ein nicht ausgeartetes, reduziertes, 0-dimensionales Unterschema, und sei $C \subseteq \mathbb{F}_q^s$ der zu \mathbb{X} assoziierte lineare Kode.

- a) Es gilt $r(C) = r_{\mathbb{X}}$.
- b) Es gilt $\mathfrak{s}(s, d, q) = \max\{r(C) \mid C \text{ linearer } [s, d+1]_q\text{-Kode}\}$.
- c) Es gilt $\mathfrak{s}(s, q) = \max\{r(C) \mid C \subseteq \mathbb{F}_q^s \text{ linearer Kode}\}$.

Beweis: Vgl. [K14], 3.1. □

Wesentlich interessanter als die Beziehung $r(C) = r_{\mathbb{X}}$ ist jedoch die folgende Beziehung zwischen der Uniformität von \mathbb{X} und dem Minimalabstand des zu \mathbb{X} assoziierten Kode $C \subseteq \mathbb{F}_q^s$ (vgl. [Han], Prop. 6).

19.10. Satz. Sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, sei $C \subseteq \mathbb{F}_q^s$ der zu \mathbb{X} assoziierte lineare Kode, und sei $1 \leq r \leq \sigma_{\mathbb{X}}$. Dann sind für jedes $i \geq 1$ die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) Es gilt $m(C^r) \geq s - i + 1$.
- b) Für jedes Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = i$ gilt $H_{\mathbb{Y}}(r) = H_{\mathbb{X}}(r)$.
- c) \mathbb{X} ist $(s-i, r)$ -uniform.

Da ein 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ offenbar genau dann $(s-H_{\mathbb{X}}(r), r)$ -uniform ist, wenn es $(s-H_{\mathbb{X}}(r))$ -uniform ist, erhalten wir die folgende Charakterisierung von MDS-Koden (vgl. [Han], Thm. 8).

19.11. Korollar. Sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, sei $C \subseteq \mathbb{F}_q^s$ der zu \mathbb{X} assoziierte lineare Kode, und sei $1 \leq r \leq \sigma_{\mathbb{X}}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) C^r ist ein MDS-Kode.
- b) \mathbb{X} ist $(s-H_{\mathbb{X}}(r))$ -uniform.

Im Fall $r = \sigma_{\mathbb{X}}$ besteht C^r wegen Korollar 1.11.b gerade aus dem von den Vektoren $(-\beta_{j1}, \dots, -\beta_{j\Delta_{\mathbb{X}}}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ mit $1 \leq j \leq s - \Delta_{\mathbb{X}}$ erzeugten \mathbb{F}_q -Untervektorraum von \mathbb{F}_q^s , d.h. $C^{\sigma_{\mathbb{X}}}$ ist der Kern der Matrix

$$\tilde{\mathfrak{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathfrak{B} \\ 0 & & 1 & \end{array} \right)$$

In der Sprache der Kodierungstheorie sagt man, die Matrix $\tilde{\mathfrak{B}}$ sei eine *Parity-Check Matrix* von $C^{\sigma_{\mathbb{X}}}$. Aus Satz 7.9 erhalten wir dann das folgende Korollar.

19.12. Korollar. Sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, und sei $C \subseteq \mathbb{F}_q^s$ der zu \mathbb{X} assoziierte lineare Kode. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- a) $C^{\sigma_{\mathbb{X}}}$ ist ein MDS-Kode.
- b) Je $\Delta_{\mathbb{X}}$ Spalten der Matrix $\tilde{\mathfrak{B}}$ sind \mathbb{F}_q -linear unabhängig.

Betrachten wir die Spalten der Matrix $\tilde{\mathfrak{B}}$ als Punkte im projektiven Raum $\mathbb{P}^{\Delta_{\mathbb{X}}-1}$, d.h. wenden wir die $\sigma_{\mathbb{X}}$ -te kanonische Transformation an, so entsprechen MDS-Koden also Mengen von s Punkten im Raum $\mathbb{P}^{\Delta_{\mathbb{X}}-1}(\mathbb{F}_q)$, die sich in linear allgemeiner Lage befinden. Die sogenannte *MDS-Vermutung* der Kodierungstheorie übersetzt sich dann in die Aussage, daß es in $\mathbb{P}^{\Delta-1}(\mathbb{F}_q)$ höchstens $q+1$ Punkte in linear allgemeiner Lage gibt, falls $2 \leq \Delta \leq q$ gilt, bzw. höchstens $\Delta+1$ Punkte in linear allgemeiner Lage, falls $\Delta > q$ gilt, außer in dem Fall $p=2$, in dem man für $\Delta \in \{3, q-1\}$ sogar $q+2$ Punkte in linear allgemeiner Lage finden kann (vgl. [MS], ch. 11). Im Widerspruch zu der in [Han] ausgedrückten Hoffnung liefert die Konstruktion aus Bemerkung 19.8 also anscheinend keine Möglichkeit, "neue" MDS-Koden zu konstruieren. Es bleibt dazu wohl nichts anderes übrig, als die in [MS], ch. 11 beschriebenen Methoden und die dort zitierte umfangreiche Literatur zu diesem Thema zu studieren.

20. Computeralgebra

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir eine Reihe von Objekten und Begriffen untersucht, die einem 0-dimensionalen Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ zugeordnet sind. Wie der Leser sicherlich bemerkt hat, konnten viele der angeführten Beispiele und Spezialfälle nur mit Unterstützung der Computeralgebra durchgerechnet werden. Nachfolgend stellen wir einige der dabei verwendeten Methoden vor und erklären, welche Rolle die Arbeiten [K1] und [K5] dabei spielen. Für grundlegende Techniken der Computeralgebra verweisen wir auf [E], ch. 15 oder [K9]. Allgemeine Berechnungen mit Idealen und Moduln wurden für die vorliegende Arbeit stets mit dem Computeralgebraprogramm “CoCoA” ausgeführt (vgl. [CNR]), während einige speziellere und komplexere Beispiele reduzierter 0-dimensionaler Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit dem von S. Beck und dem Autor entwickelten Programm “COP” erarbeitet wurden (vgl. [K5]).

1. Der homogene Koordinatenring. In einem Computer wird der homogene Koordinatenring eines 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ natürlich durch ein homogenes Erzeugendensystem des Verschwindungsideals $I_{\mathbb{X}} \subseteq A = K[X_0, \dots, X_d]$ repräsentiert. Hierbei ersetzen wir den algebraisch abgeschlossenen Körper K meist durch einen kleineren, berechenbaren Teilkörper. Typischerweise ist ein reduziertes 0-dimensionales Schema $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d$ durch die Koordinaten seiner Punkte P_1, \dots, P_s gegeben. Der effektivste Algorithmus zur Berechnung von $I_{\mathbb{X}}$ ist dann der *Buchberger-Möller Algorithmus* (vgl. [BM] und [MR], sect. 1.2). Eine Version dieses Algorithmus für den nicht notwendig reduzierten Fall sowie eine Analyse seiner Komplexität findet der Leser in [MMM]. Wir fassen hier nur die für uns bedeutsamen Eigenschaften des Buchberger-Möller Algorithmus im reduzierten Fall zusammen (vgl. [MR], sect. 1.2 und [K5], 3.6).

20.1. Satz. *Sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq D_+(X_0) \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema, sei $P_i = (1 : p_{i1} : \dots : p_{id})$ mit $p_{i1}, \dots, p_{id} \in K$ für $i = 1, \dots, s$, und sei \leq_{σ} eine gradkompatible Termordnung auf $K[X_1, \dots, X_d]$.*

a) Der Buchberger-Möller Algorithmus berechnet eine Gröbner-Basis $\{G_1, \dots, G_r\}$ des Ideals $J_{\mathbb{X}} = I_{\mathbb{X}}/(I_{\mathbb{X}} \cap (X_0 - 1)) \subseteq K[X_1, \dots, X_d]$ bzgl. \leq_{σ} sowie Polynome D_1, \dots, D_s aus $K[X_1, \dots, X_d]$ mit $D_i(p_{j1}, \dots, p_{jd}) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i \leq j \leq s$.

b) Die Homogenisierungen G_1^, \dots, G_r^* der Polynome G_1, \dots, G_r bzgl. X_0 bilden ein homogenes Erzeugendensystem des Ideals $I_{\mathbb{X}}$, das eine Gröbner-Basis bzgl. der projektiven Fortsetzung \leq_{τ} von \leq_{σ} darstellt.*

c) Die Homogenisierungen $F_1, \dots, F_s \in A$ der Normalformen von D_1, \dots, D_s bzgl. $J_{\mathbb{X}}$ sind Polynome vom Grad $\leq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$, die die minimalen Separatoren von \mathbb{X} repräsentieren.

d) Die Monome $M_{\mathbb{X}} = \{X_0^i \cdot m \mid m \in O_{\sigma}(J_{\mathbb{X}})\}$ bilden eine K -Basis von R . Hierbei ist $O_{\sigma}(J_{\mathbb{X}}) = \{m \in K[X_1, \dots, X_d] \text{ Monom} \mid m \notin (\text{Lt}_{\sigma}(G_1), \dots, \text{Lt}_{\sigma}(G_t))\}$ das Ordnungsideal von $J_{\mathbb{X}}$ bzgl. \leq_{σ} .

In [MR], sect. 2.1 wird auch erklärt, wie man aus einem homogenen Erzeugendensystem von $I_{\mathbb{X}}$ sehr einfach ein minimales auswählen kann. Die Hilbert-Funktion $H_{\mathbb{X}}(i)$

von \mathbb{X} im Grad $i \in \mathbb{Z}$ ist jetzt gegeben durch die Anzahl der Monome vom Grad i in $M_{\mathbb{X}}$. Ebenso kann man die Matrix $\mathfrak{B} = (\beta_{ji})^{\text{transp.}}$ aus den in Satz 20.1 berechneten Polynomen gewinnen, indem man überall $X_0 = 0$ setzt und in dem Ring

$$\bar{R} = K[X_1, \dots, X_d] / (G_1^*(0, X_1, \dots, X_d), \dots, G_r^*(0, X_1, \dots, X_d))$$

die K -linearen Relationen zwischen den Elementen Lf_1, \dots, Lf_s bestimmt, wobei letztere im Fall $\deg F_i^* = \sigma_{\mathbb{X}} + 1$ durch die Polynome $F_i^*(0, X_1, \dots, X_d)$ repräsentiert werden.

2. Der kanonische Modul. Der Algorithmus zur Berechnung einer minimalen homogenen Präsentation

$$(*) \quad \bigoplus_{i=1}^{\beta_{d-1}} A(-a_i) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{\beta_d} A(-b_j) \longrightarrow \omega_R \longrightarrow 0$$

des kanonischen Moduls ω_R eines reduzierten 0-dimensionalen Schemas $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d$ beruht auf der Formel $\omega_R \cong \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])(-1)$ und wurde in [K5], §4 – §6 beschrieben. Wir fassen hier nur die wichtigsten Schritte zusammen. Die Algebra $R/K[x_0]$ besitzt eine \mathbb{Z}^d -Filtrierung $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{\nu})_{\nu \in \mathbb{Z}^d}$ mit

$$\mathcal{F}_{\nu} = \langle \{x_1^{\mu_1} \cdots x_d^{\mu_d} \mid (\mu_1, \dots, \mu_d) \leq_{\sigma} \nu\} \rangle_{K[x_0]} \subseteq R.$$

Hieraus erhalten wir eine \mathbb{Z}^d -Filtrierung $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_{\nu})_{\nu \in \mathbb{Z}^d}$ des Moduls $\underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])$ mit

$$\mathcal{G}_{\nu} = \langle \{\varphi : R \longrightarrow K[x_0] \text{ homogen, } K[x_0]\text{-linear} \mid \varphi(\mathcal{F}_{-\mu}) = 0 \text{ für alle } \mu < \nu\} \rangle_{K[x_0]}$$

Die Filtrierungen \mathcal{F} und \mathcal{G} haben die folgenden Eigenschaften.

20.2. Satz. *a) Die Filtrierung \mathcal{F} besteht nur aus $s + 1$ verschiedenen $K[x_0]$ -Moduln $\{0\} = \mathcal{F}_{\nu_0} \subsetneq \mathcal{F}_{\nu_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_{\nu_s} = R$.*

b) Sind $t_1, \dots, t_s \in R$ Restklassen von Monomen T_1, \dots, T_s aus $K[X_1, \dots, X_d]$, die eine $K[x_0]$ -Basis von R bilden (vgl. Satz 20.1.d), so stellen ihre Leitformen $\{L_{\mathcal{F}}(t_1), \dots, L_{\mathcal{F}}(t_s)\}$ bzgl. \mathcal{F} eine $K[x_0]$ -Basis des graduerten Rings $\text{gr}_{\mathcal{F}}(R)$ dar.

c) Der kanonische Modul des graduerten Rings $\text{gr}_{\mathcal{F}}(R)$ ist gegeben durch

$$\omega_{\text{gr}_{\mathcal{F}}(R)} \cong \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(\text{gr}_{\mathcal{F}}(R), K[x_0])(-1).$$

d) Betrachten wir die $K[x_0]$ -linearen Abbildungen $p_i : R \longrightarrow K[x_0]$ mit $p_i(t_j) = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, s$, so ist $\{L_{\mathcal{G}}(p_1), \dots, L_{\mathcal{G}}(p_s)\}$ eine $K[x_0]$ -Basis des $\text{gr}_{\mathcal{F}}(R)$ -Moduls $\text{gr}_{\mathcal{G}} \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0]) \cong \underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(\text{gr}_{\mathcal{F}}(R), K[x_0])$ und $\{p_1, \dots, p_s\}$ ist eine Gröbner-Basis von $\underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])$.

Beweis: Vgl. [K5], 4.2 und 4.3.b. □

Da wir die Produkte $t_i \cdot p_j$ explizit berechnen können (vgl. [K5], 4.3.a), haben wir also eine erste Beschreibung von ω_R gefunden. Der nächste Satz zeigt, wie wir das Erzeugendensystem verkleinern und eine minimale Gröbner-Basis von ω_R finden können.

20.3. Satz. *Seien $\mu_1, \dots, \mu_t \in \{1, \dots, s\}$ so gewählt, daß die Monome $T_{\mu_1}, \dots, T_{\mu_t} \in K[X_1, \dots, X_d]$, die die Elemente $t_{\mu_1}, \dots, t_{\mu_t} \in R$ repräsentieren, gerade die Sockelmonome $\mathfrak{S}(O_\sigma(J_{\mathbb{X}})) = \{T \in O_\sigma(J_{\mathbb{X}}) \mid X_i \cdot T \notin O_\sigma(J_{\mathbb{X}}) \text{ für } i = 1, \dots, d\}$ des Ordnungsideals $O_\sigma(J_{\mathbb{X}})$ sind. Dann ist $\{p_{\mu_1}, \dots, p_{\mu_t}\}$ eine minimale Gröbner-Basis von $\underline{\text{Hom}}_{K[x_0]}(R, K[x_0])$, und somit auch von ω_R .*

Beweis: Vgl. [K5], 4.4. □

Also haben wir einen homogenen Epimorphismus $\epsilon_t : \bigoplus_{i=1}^t A(\deg t_{\mu_i} - 1) \longrightarrow \omega_R$ gefunden. Um eine Gröbner-Basis des Syzygienmoduls $\ker \epsilon_t$ zu bestimmen, berechnen wir dann ein Erzeugendensystem des Kerns der Abbildung $\epsilon_s : \bigoplus_{i=1}^s A(\deg t_i - 1) \longrightarrow \omega_R$ (vgl. [K5], 5.3) und reduzieren dieses zu Syzygien von $p_{\mu_1}, \dots, p_{\mu_t}$ (vgl. [K5], 5.4). Es ergibt sich eine Präsentation von ω_R der Form

$$(**) \quad A^{\binom{t}{2} + dt} \longrightarrow A^t \longrightarrow \omega_R \longrightarrow 0.$$

Der letzte Schritt zur Berechnung der gesuchten Präsentation (*) ist nun eine geschickte Minimalisierung der Präsentation (**) (vgl. [K5], §6).

3. Das kanonische Ideal. Um ein homogenes Erzeugendensystem des kanonischen Ideals $\mathfrak{J}_{R/K[x_0]} \subseteq R$ eines reduzierten 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d$ zu finden, können wir mit der eben gefundenen Beschreibung von ω_R anfangen und dann den Isomorphismus $\mathfrak{J}_{R/K[x_0]} \cong \omega_R(-2\sigma_{\mathbb{X}} - 1)$ aus Satz 3.9 anwenden. Dazu nehmen wir an, daß wir die Projektionen $p_{\mu_1}, \dots, p_{\mu_t}$ auf die Sockelmonome bereits bestimmt haben. Eine Projektion p_i entspricht für $i = 1, \dots, s$ einem homogenen Element vom Grad $2\sigma_{\mathbb{X}} + 2 - \deg t_i$ von $\mathfrak{J}_{R/K[x_0]}$. In der Darstellung $p_i = x_0^{\sigma_{\mathbb{X}} + 1 - \deg t_i} \cdot (c_1 f_1 + \dots + c_s f_s)$ mit $c_1, \dots, c_s \in K$ gilt $c_j = p_i(f_j)$ für $i, j = 1, \dots, s$. Also brauchen wir nur noch die Koeffizienten von f_j in der $K[x_0]$ -Basis $\{t_1, \dots, t_s\}$ von R , und diese sind gerade die Koeffizienten der Monome $\{T_1, \dots, T_s\} = O_\sigma(J_{\mathbb{X}})$ in der Normalform von D_i bzgl. $J_{\mathbb{X}}$ (vgl. Satz 20.1).

Für die homogenen Komponenten $(\mathfrak{J}_{R/K[x_0]})_{\sigma_{\mathbb{X}} + 1}$ und $(\mathfrak{J}_{R/K[x_0]})_{2\sigma_{\mathbb{X}}}$ haben wir bereits in den Korollaren 3.10 und 3.11 explizite K -Basen angegeben. Die Berechnung der Gale-Transformierten bzw. der höheren kanonischen Transformierten von \mathbb{X} stellt nun kein Problem mehr dar, weil wir aus dem homogenen Erzeugendensystem des Ideals $\mathfrak{J}_{R/K[x_0]}$ jederzeit K -Basen aller seiner homogenen Komponenten gewinnen können.

4. Der Kählersche Differentialmodul. Die Moduln $\Omega_{R/K}^1$, $\Omega_{R/K[x_0]}^1$ und $\Omega_{\overline{R}/K}^1$ über dem homogenen Koordinatenring eines 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ wurden bereits in den Sätzen 4.2 und 4.3 explizit präsentiert. Den Torsionsuntermodul $\mathcal{T}_{R/K}$ von $\Omega_{R/K}^1$ kann man wegen der Beschreibung in Satz 4.5.a aus der Saturierung bzgl.

(X_0, \dots, X_d) des Untermoduls $\mathcal{G}(-1) \subseteq R(-1)^{d+1}$ bestimmen. Für die Berechnung der Hilbert-Funktionen dieser Moduln verwenden wir die üblichen Methoden (vgl. [E], ch. 15 und [K9]).

5. Cayley-Bacharach Schemata. Ist ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ durch die Koordinaten seiner Punkte gegeben, und wollen wir herausfinden, ob \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach Schema ist, so brauchen wir nach Satz 5.6 nur die Grade der in Satz 20.1 gefundenen minimalen Separatoren mit der Zahl $\sigma_{\mathbb{X}} + 1$ zu vergleichen. Etwas schwieriger wird diese Aufgabe, wenn $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein nicht notwendig reduziertes 0-dimensionales Unterschema darstellt und nur sein homogenes Verschwindungsideal $I_{\mathbb{X}} \subseteq A$ gegeben ist. (Im reduzierten Fall stammt das folgende Verfahren aus [K1], 4.11.)

Zunächst benötigen wir eine reguläre Folge homogener Polynome $\{G_1, \dots, G_d\}$ aus $I_{\mathbb{X}}$. Eine solche Folge erhalten wir z.B. aus generisch gewählten Elementen von $(I_{\mathbb{X}})_{\sigma_{\mathbb{X}}+2}$. Dann betrachten wir den 0-dimensionalen vollständigen Durchschnitt $\mathbb{V} = \mathcal{Z}(G_1, \dots, G_d)$, der \mathbb{X} enthält. Bekanntlich gilt $\sigma_{\mathbb{V}} = \deg G_1 + \dots + \deg G_d - d$. Wir beginnen nun, das Colon-Ideal $I_{\mathbb{V}} : I_{\mathbb{X}}$ zu berechnen, und zwar mit Hilfe der Bestimmung einer Gröbner-Basis bzgl. einer gradkompatiblen Termordnung. Sobald wir ein Element dieser Gröbner-Basis gefunden haben, prüfen wir, ob es in $I_{\mathbb{V}}$ liegt. Das erste Element von $(I_{\mathbb{V}} : I_{\mathbb{X}}) \setminus I_{\mathbb{V}}$, das wir so finden, hat den Grad $\alpha_{\mathbb{V}/\mathbb{V}}$. Wir können die Berechnung von $I_{\mathbb{V}} : I_{\mathbb{X}}$ nach diesem Grad abbrechen und erhalten $(I_{\mathbb{V}} : I_{\mathbb{X}})_{\alpha_{\mathbb{V}/\mathbb{V}}}$. Mit einer weiteren Berechnung einer im Grad $\sigma_{\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{V}} - \alpha_{\mathbb{V}/\mathbb{V}}$ abgeschnittenen Gröbner-Basis von $(I_{\mathbb{V}} : (I_{\mathbb{V}} : I_{\mathbb{X}})_{\alpha_{\mathbb{V}/\mathbb{V}}})$ sind wir nach Satz 16.9 dann fertig, d.h. wir brauchen nur noch zwei K -Vektorraumdimensionen zu vergleichen.

6. Höhere Uniformitäten. Der naive Ansatz, für ein $i \geq 1$ zur Überprüfung der i -Uniformität eines reduzierten 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d$ alle Hilbert-Funktionen von Unterschemata $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ vom Grad $\deg \mathbb{Y} = s - i$ zu berechnen und miteinander zu vergleichen, führt schon in einfachen Fällen zu einem gewaltigen und meist unpraktikablen Rechenaufwand. In den Fällen $1 \leq i \leq \Delta_{\mathbb{X}}$ können wir aus Satz 7.9 ein einfacheres Verfahren ableiten (vgl. [K5], 8.2).

20.4. Bemerkung. Sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein reduziertes 0-dimensionales Unterschema. Wir bestimmen die Matrix $\mathfrak{B} = (\beta_{ji})^{\text{transp.}}$ wie in Satz 20.1. Dann sind für jedes $i \in \{1, \dots, \Delta_{\mathbb{X}}\}$ die folgenden Bedingungen äquivalent.

a) \mathbb{X} ist i -uniform.

b) Je i Spalten der Matrix $\tilde{\mathfrak{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathfrak{B} \\ 0 & & 1 & \end{array} \right)$ sind K -linear unabhängig.

Schwieriger wird es für höhere Uniformitäten. Im Fall $i = s - H_{\mathbb{X}}(j)$ mit $0 \leq j \leq \sigma_{\mathbb{X}}$ müssen wir nach Satz 7.6 prüfen, ob die Multiplikationsabbildungen $\mu_k : R_k \otimes (\omega_R)_{-k} \rightarrow (\omega_R)_0$ für $j \leq k \leq \sigma_{\mathbb{X}}$ biinjektiv sind. Da wir wissen, wie wir eine homogene minimale Präsentation von ω_R finden können, bleibt also noch die Frage, wie man

von einer gegebenen K -linearen Abbildung $\mu : U \otimes V \rightarrow W$ mit endlichdimensionalen K -Vektorräumen U, V, W herausfindet, ob sie biinjektiv ist. Wir wählen Basen $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ von U , $\{v_1, \dots, v_m\}$ von V und $\{w_1, \dots, w_n\}$ von W . Dann schreiben wir $\mu(u_\lambda \otimes v_\mu) = \sum_{\nu=1}^n c_{\lambda\mu\nu} w_\nu$ mit $c_{\lambda\mu 1}, \dots, c_{\lambda\mu n} \in K$ für $\lambda = 1, \dots, \ell$ und $\mu = 1, \dots, m$. Jetzt können wir die Biinjektivität von μ auf eine der folgenden beiden Arten überprüfen (vgl. [K5], 8.3 und 8.4).

20.5. Bemerkung. Wir führen über K unabhängige Variable Y_1, \dots, Y_ℓ und Z_1, \dots, Z_m ein und betrachten die quadratischen Polynome $q_\nu = \sum_{\lambda, \mu} c_{\lambda\mu\nu} Y_\lambda Z_\mu$ für $\nu = 1, \dots, n$. Die Bedingung, daß aus $\mu((a_1 u_1 + \dots + a_\ell u_\ell) \otimes (b_1 v_1 + \dots + b_m v_m)) = 0$ schon $a_1 = \dots = a_\ell = 0$ oder $b_1 = \dots = b_m = 0$ folgt, ist damit äquivalent, daß sich dieselbe Folgerung aus $q_1(a_1, \dots, a_\ell, b_1, \dots, b_m) = \dots = q_n(a_1, \dots, a_\ell, b_1, \dots, b_m) = 0$ ergibt. Also müssen wir prüfen, ob das Ideal $(Y_1, \dots, Y_\ell) \cap (Z_1, \dots, Z_m) = (Y_\lambda Z_\mu)_{\lambda, \mu}$ im Radikal des Ideals (q_1, \dots, q_n) enthalten ist. Dieser Radikalmitgliedschaftstest (“radical membership”) ist mit den Standardtechniken lösbar (vgl. [E], ch. 15 oder [K9]).

Die zweite Methode basiert auf einem Ergebnis von D. Eisenbud (vgl. [Ei], 1.1).

20.6. Bemerkung. Für $\nu = 1, \dots, n$ betrachten wir die Matrix $\mathfrak{C}_\nu = (c_{\lambda\mu\nu})_{\lambda, \mu}$. Sei $M \subseteq \text{Hom}_K(K^m, K^\ell)$ der K -Untervektorraum, der von den zu diesen Matrizen gehörigen K -linearen Abbildungen erzeugt wird. Ferner sei M^\perp der zu M bzgl. der Spurabbildung orthogonale Raum, d.h. es gelte

$$M^\perp = \{\mathfrak{D} \in \text{Hom}_K(K^\ell, K^m) \mid \text{tr}(\mathfrak{D}\mathfrak{C}_1) = \dots = \text{tr}(\mathfrak{D}\mathfrak{C}_n) = 0\}.$$

Offensichtlich kann man M^\perp berechnen, indem man ein System linearer Gleichungen löst. Sei $\{\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_{\ell m - n}\}$ eine K -Basis von M^\perp . Wir führen neue Unbekannte $Y_1, \dots, Y_{\ell m - n}$ ein und betrachten die zu M^\perp gehörige Matrix von Linearformen $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}_1 Y_1 + \dots + \mathfrak{D}_{\ell m - n} Y_{\ell m - n}$ (vgl. [Ei], sect. 1). Nach [Ei], 1.1 müssen wir nun prüfen, ob $(M^\perp)_1 = 0$ ist, d.h. ob das von den 2×2 -Minoren von \mathfrak{M} erzeugte Ideal das Radikalideal $(Y_1, \dots, Y_{\ell m - n})$ besitzt. Dies ist wiederum mit den üblichen Methoden lösbar, denn man braucht ja nur für $Y_1, \dots, Y_{\ell m - n}$ den Radikalmitgliedschaftstest durchzuführen.

Schließlich bleibt noch der allgemeinste Fall $i = s - H_{\mathbb{X}}(j) + k$ mit $0 \leq j \leq \sigma_{\mathbb{X}}$ und $1 \leq k \leq \Delta H_{\mathbb{X}}(j) - 1$. In diesem Fall können wir nur für $k \gg 0$ auf eine Vereinfachung gegenüber dem naiven i -Uniformitätstest hoffen. Dazu prüfen wir zuerst mittels Bemerkung 20.5 oder 20.6, ob \mathbb{X} ein $(s - H_{\mathbb{X}}(j))$ -uniformes Schema ist. Wenn ja, so müssen wir dann für jedes Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $\deg \mathbb{Y} = s - H_{\mathbb{X}}(j)$ mittels Bemerkung 20.4 herausfinden, ob \mathbb{Y} ein k -uniformes Schema ist.

Es bleibt noch anzumerken, daß wir mittels Bemerkung 20.5 oder 20.6 wegen Satz 6.6 auch die Bedingung der linearen allgemeinen Lage effektiv prüfen können. Wiederum stellt sich die Frage, ob das Ausrechnen der $\binom{s}{d+1}$ Determinanten über K nicht oftmals die einfachere Möglichkeit darstellt.

7. *Freie Auflösungen.* Die Berechnung der minimalen graduiert-freien Auflösung

$$(*) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\beta_d} A(-\alpha_{di}) \xrightarrow{\Phi_d} \bigoplus_{i=1}^{\beta_{d-1}} A(-\alpha_{d-1i}) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\beta_1} A(-\alpha_{1i}) \xrightarrow{\Phi_1} A \rightarrow R \rightarrow 0$$

des homogenen Koordinatenrings R eines 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ (vgl. Abschnitt 13) ist mit den Standardmethoden der Computeralgebra lösbar, führt jedoch oft zu großem Rechenaufwand. Die graduierten Betti-Zahlen wachsen nämlich typischerweise zur Mitte der Auflösung hin exponentiell, und die Länge der Auflösung nimmt mit der Einbettungsdimension zu. Sind wir nur an den Betti-Zahlen und Gradverschiebungen am Ende der Auflösung (*) interessiert, so können wir das beschriebene Verfahren zur Berechnung einer minimalen homogenen Präsentation von ω_R anwenden, denn wie wir in Abschnitt 13 gesehen haben, ist die minimale graduiert-freie Auflösung des A -Moduls ω_R dual zu der von R .

Einen Fall, in dem diese Methode besonders erfolgreich ist, stellen 0-dimensionale Schemata $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ mit generischer Hilbert-Funktion dar. Wir setzen also im folgenden voraus, daß für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt $H_{\mathbb{X}}(i) = \min\{H_{\mathbb{P}^d}(i), \deg \mathbb{X}\}$. In diesem Fall gilt $\sigma_{\mathbb{X}} \leq \alpha_{\mathbb{X}} - 1$, und nach dem in Abschnitt 13 Gezeigten ist die Auflösung (*) von der besonders einfachen Gestalt

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow A(-\alpha_{\mathbb{X}} - d + 1)^{a_d} \oplus A(-\alpha_{\mathbb{X}} - d)^{b_d} &\longrightarrow \cdots \longrightarrow \\ &\longrightarrow A(-\alpha_{\mathbb{X}})^{a_1} \oplus A(-\alpha_{\mathbb{X}} - 1)^{b_1} \longrightarrow A \longrightarrow R \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

so daß es genügt, die Zahlen a_1, \dots, a_d und b_1, \dots, b_d zu bestimmen. Hierbei gilt offensichtlich, daß aus $a_i = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, d\}$ schon $a_i = \cdots = a_d = 0$ folgt, und aus $b_i = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, d\}$ folgt $b_1 = \cdots = b_i = 0$. Aus der Dimensionsbilanz der obigen Auflösung erhalten wir noch weitere Beziehungen zwischen den Zahlen a_i und b_j (vgl. z.B. [K5], 7.3).

20.7. Satz. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ ein 0-dimensionales Unterschema mit generischer Hilbert-Funktion.*

a) *Gilt $\sigma_{\mathbb{X}} = \alpha_{\mathbb{X}} - 2$, so ist $b_1 = \cdots = b_d = 0$ und $a_i = \binom{d+\alpha_{\mathbb{X}}-1}{i+\alpha_{\mathbb{X}}-1} \binom{i+\alpha_{\mathbb{X}}-2}{\alpha_{\mathbb{X}}-1}$ für $i = 1, \dots, d$.*

b) *Gilt $\sigma_{\mathbb{X}} = \alpha_{\mathbb{X}} - 1$, so ist $a_1 = \binom{d+\alpha_{\mathbb{X}}}{d}$, $b_d = \Delta_{\mathbb{X}}$, und es gilt $a_i - b_{i-1} = \binom{d+\alpha_{\mathbb{X}}-1}{i+\alpha_{\mathbb{X}}-1} \binom{i+\alpha_{\mathbb{X}}-2}{\alpha_{\mathbb{X}}-1} - \Delta_{\mathbb{X}} \binom{d}{i-1}$ für $i = 2, \dots, d$.*

Folglich brauchen wir nur entweder die Zahlen a_1, \dots, a_d oder die Zahlen b_1, \dots, b_d zu finden.

20.8. Definition. Sei M ein endlich erzeugter graduerter A -Modul, und sei $\alpha = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid M_i \neq 0\}$. Weiter sei

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\beta_{d+1}} A(-\alpha_{d+1i}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\beta_0} A(-\alpha_{0i}) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

die minimale graduiert-freie Auflösung von M , wobei für $i = 0, \dots, d+1$ gelte $\alpha + i \leq \alpha_{i1} \leq \dots \leq \alpha_{i\beta_i}$. Dann heißt der Teilkomplex

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\{i|\alpha_{d+1 i}=\alpha+d+1\}} A(-\alpha-d-1) \longrightarrow \dots \longrightarrow \bigoplus_{\{i|\alpha_{0i}=\alpha\}} A(-\alpha) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

der *lineare Teil der Auflösung* von M .

In unserem Fall ist der lineare Teil der Auflösung von $I_{\mathbb{X}}$ gegeben durch

$$0 \longrightarrow A(-\alpha_{\mathbb{X}} - d + 1)^{a_d} \longrightarrow \dots \longrightarrow A(-\alpha_{\mathbb{X}})^{a_1} \longrightarrow I_{\mathbb{X}} \longrightarrow 0,$$

und der lineare Teil der Auflösung von ω_R ist

$$0 \longrightarrow A(\sigma_{\mathbb{X}} - d + 1)^{b_1} \longrightarrow \dots \longrightarrow A(\sigma_{\mathbb{X}})^{b_d} \longrightarrow \omega_R \longrightarrow 0.$$

Also können wir die Zahlen a_1, \dots, a_d bzw. b_1, \dots, b_d berechnen, indem wir den linearen Teil der Auflösung von $I_{\mathbb{X}}$ oder den linearen Teil der Auflösung von ω_R bestimmen. Dies ist mit den Standardtechniken möglich (vgl. z.B. [K5], 7.7), kann aber mit speziellen, für diesen Zweck optimierten Algorithmen wesentlich beschleunigt werden (vgl. [K15]).

In [K5], §7 wird das beschriebene Verfahren verwendet, um die sogenannte “Minimal Resolution Conjecture” über die minimale graduiert-freie Auflösung des Koordinatenrings eines reduzierten 0-dimensionalen Unterschemas $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^d$ aus generisch gewählten Punkten in vielen Fällen mit Hilfe von Computerberechnungen zu beweisen.

Hiermit beschließen wir unsere Anmerkungen zur Computeralgebra. Mit einem programmierbaren Computeralgebrasystem wie CoCoA (vgl. [CNR]) ist es nicht schwer, für viele weitere Situationen selbst Funktionen zu entwickeln, die zur Berechnung von Beispielen, zum systematischen Probieren oder zur Suche nach Gegenbeispielen verwendet werden können.

Arbeiten des Verfassers

- [K1] (mit A.V. Geramita und L. Robbiano) Cayley-Bacharach schemes and their canonical modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **339** (1993), 163 – 189
- [K2] On the canonical module of a 0-dimensional scheme, *Can. J. Math.* **46** (1994), 357 – 379
- [K3] Some applications of the canonical module of a 0-dimensional scheme, in: F. Orecchia und L. Chiantini (Hrsg.), *Zero-Dimensional Schemes*, Proc. Conf. Ravello 1992, de Gruyter, Berlin 1994, S. 243 – 252
- [K4] On the canonical ideal of a set of points, Manuskript 1997
- [K5] (mit S. Beck) How to compute the canonical module of a set of points, in: L. González-Vega und T. Recio (Hrsg.), *Algorithms in Algebraic Geometry and Applications*, Proc. Conf. MEGA '94, Santander 1994, *Progress in Math.* **143**, Birkhäuser, Basel 1996, S. 51 – 78
- [K6] (mit G. de Dominicis) Kähler differentials for points in \mathbb{P}^n , Manuskript 1996
- [K7] On 0-dimensional complete intersections, *Math. Ann.* **292** (1992), 43 – 58
- [K8] (mit L. Robbiano) On maximal Cayley-Bacharach schemes, *Commun. in Algebra* **23** (1995), 3357 – 3378
- [K9] Computeralgebra, Vorlesungsmanuskript, Universität Regensburg 1996
- [K10] An introduction to a theorem of Strano, in: A.V. Geramita (Hrsg.), *The Curves Seminar at Queen's*, Vol. VIII, *Queen's Papers in Pure and Appl. Math.* **88**, Queen's University, Kingston 1991, S. C 1 – C 23
- [K11] (mit B. Kreuzer) Extremal zerodimensional subschemes of \mathbb{P}^2 , *J. Pure Appl. Algebra* (erscheint)
- [K12] (mit J.C. Migliore, U. Nagel und C. Peterson) Determinantal schemes and Buchsbaum-Rim sheaves, Manuskript 1997 (eingereicht)
- [K13] Vector bundles with good sections, *Commun. in Algebra* **21** (1993), 1045 – 1062
- [K14] (mit R. Waldi) On the Castelnuovo-Mumford regularity of a projective system, *Commun. in Algebra* (erscheint)
- [K15] (mit M. Lusteck) How to compute linear resolutions, in Vorbereitung

Weitere Literaturhinweise

- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths und J. Harris, Geometry of algebraic curves, Vol. I, Grundlehren der Math. **297**, Springer, New York 1985
- [B] I. Bacharach, Über den Cayley'schen Schnittpunktsatz, Math. Ann. **26** (1886), 275 – 299
- [BV] W. Bruns und U. Vetter, Determinantal rings, Lecture Notes in Math. **1327**, Springer, Heidelberg 1988
- [BM] B. Buchberger und H.M. Möller, The construction of multivariate polynomials with preassigned zeros, in: Computer Algebra, EUROCAM '82, Proc. Conf. Marseille 1982, Lect. Notes Comput. Sci. **144** (1982), 24 – 31
- [Bu] D. Buchsbaum, A generalized Koszul complex, I, Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1964), 183 – 196
- [BR] D. Buchsbaum und D.S. Rim, A generalized Koszul complex, II. Depth and multiplicity, Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1964), 197 – 224
- [CNR] A. Capani, G. Niesi und L. Robbiano, CoCoA 3, a system for doing computations in commutative algebra, Università di Genova, Genova 1995
- [C1] G. Castelnuovo, Ricerche di geometria sulle curve algebriche, Atti Accad. Sci. Torino **24** (1889)
- [C2] G. Castelnuovo, Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica, Rend. Circ. Mat. Palermo **7** (1893), 89 – 110
- [CRV1] M.P. Cavaliere, M.E. Rossi und G. Valla, Quadrics through a set of points and their syzygies, Math. Z. **218** (1995), 25 – 42
- [CRV2] M.P. Cavaliere, M.E. Rossi und G. Valla, On Green-Lazarsfeld and minimal resolution conjecture for $n + 3$ points in \mathbb{P}^n , J. Pure Appl. Algebra **85** (1993), 105 – 117
- [C] A. Cayley, On the intersection of curves, Cambridge Math. J. **3** (1843), 211 – 213
- [CJ] Y.H. Cho und B.E. Jung, Some conditions for the uniform position property, Commun. in Algebra (erscheint)
- [D] E.D. Davis, 0-dimensional subschemes of \mathbb{P}^2 : New applications of Castelnuovo's function, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII **32** (1986), 93 – 107
- [DGO] E.D. Davis, A.V. Geramita und F. Orecchia, Gorenstein algebras and the Cayley-Bacharach theorem, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 593 – 597
- [DO] I. Dolgachev und D. Ortland, Point sets in projective spaces and theta functions, Astérisque **165**, Soc. Math. de France, Paris 1988
- [E] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Graduate Texts in Math. **150**, Springer, New York 1995
- [Ei] D. Eisenbud, Linear sections of determinantal varieties, Amer. J. Math. **110** (1988), 541 – 575
- [EGH1] D. Eisenbud, M. Green und J. Harris, Cayley-Bacharach theorems and conjectures, Bull. Amer. Math. Soc. **33** (1996), 295 – 324

- [EGH2] D. Eisenbud, M. Green und J. Harris, Higher Castelnuovo theory, *Astérisque* **218** (1993), 187 – 202
- [EH] D. Eisenbud und J. Harris, Finite projective schemes in linearly general position, *J. Algebraic Geom.* **1** (1992), 15 – 30
- [EK] D. Eisenbud und J.-H. Koh, Remarks on points in a projective space, in: M. Hochster, C. Huneke und J.D. Sally (Hrsg.), *Commutative algebra*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **15**, Springer, New York 1989
- [EP] D. Eisenbud und S. Popescu, Gale duality and free resolutions of ideals of points, *Manuskript* 1996
- [Eu] L. Euler, Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes, in: *Opera omnia*, series prima, Vol. **26**, Orell Füssli Turici, Lausanne 1953, S. XI – XIII und 33 – 45
- [Ga] A. Galligo, Exemples d'ensembles de points en position uniforme, in: T. Mora und C. Traverso (Hrsg.), *Effective Methods in Algebraic Geometry*, Proc. Conf. MEGA '90, Progress in Math. **94**, Birkhäuser, Boston 1991, S. 105 – 117
- [Ge] A.V. Geramita, Inverse systems of fat points: Waring's problem, secant varieties of Veronese varieties and parameter spaces for Gorenstein ideals, in: *The Curves Seminar at Queen's*, Vol. X, Queen's Papers in Pure and Appl. Math. **102**, Queen's University, Kingston 1996, S. 1 – 129
- [GGP] A.V. Geramita, A. Gimigliano und Y. Pitteloud, Graded Betti numbers of some embedded rational n -folds, *Math. Ann.* **301** (1995), 363 – 380
- [GGR] A.V. Geramita, D. Gregory und L.G. Roberts, Monomial ideals and points in projective space, *J. Pure Appl. Algebra* **40** (1986), 33 – 62
- [GM] A.V. Geramita und P. Maroscia, The ideal of forms vanishing at a finite set of points in \mathbb{P}^n , *J. Algebra* **90** (1984), 528 – 555
- [GMR] A.V. Geramita, P. Maroscia und L.G. Roberts, The Hilbert function of a reduced k -algebra, *J. London Math. Soc.* (2) **28** (1983), 443 – 452
- [GRM] S. Giuffrida, R. Maggioni und A. Ragusa, Resolutions of 0-dimensional subschemes of a smooth quadric, in: F. Orecchia und L. Chiantini (Hrsg.), *Zero-Dimensional Schemes*, Proc. Conf. Ravello 1992, de Gruyter, Berlin 1994, S. 191 – 204
- [Go] W.J. Gordon, A linear algebra proof of Clifford's theorem, *Enseign. Math.* **30** (1984), 85 – 94
- [Gor] D. Gorenstein, An arithmetic theory of adjoint plane curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72** (1952), 414 – 436
- [GW] S. Goto und K. Watanabe, On graded rings I, *J. Math. Soc. Japan* **30** (1978), 179 – 213
- [Han] J.P. Hansen, Points in uniform position and maximum distance separable codes, in: F. Orecchia und L. Chiantini (Hrsg.), *Zero-Dimensional Schemes*, Proc. Conf. Ravello 1992, de Gruyter, Berlin 1994, S. 205 – 211
- [Ha] J. Harris, The genus of space curves, *Math. Ann.* **249** (1980), 191 – 204

- [HE] J. Harris (unter Mitarbeit von D. Eisenbud), Curves in projective space, Sémin. de Math. Supérieures, Université de Montreal, Montreal 1982
- [H1] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Graduate Texts in Math. **52**, Springer, New York 1977
- [H2] R. Hartshorne, Connectedness of the Hilbert scheme, Math. Inst. des Hautes Etudes Sci. **29** (1966), 261 – 304
- [He] L.O. Hesse, De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis, Dissertation, Königsberg 1840, in: Gesammelte Werke, Chelsea Publ. Comp., New York 1972, S. 21 – 50
- [Hi1] T. Hibi, What can be said about pure O-sequences?, J. Combin. Theory **50** (1989), 319 – 322
- [Hi2] T. Hibi, Flawless O-sequences and Hilbert functions of Cohen-Macaulay domains, J. Pure Appl. Alg. **60** (1989), 245 – 251
- [HK] J. Herzog und E. Kunz, Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay Rings, Lect. Notes in Math. **238**, Springer, Berlin 1971
- [HU] C. Huneke und B. Ulrich, General hyperplane sections of algebraic varieties, J. Alg. Geom. **2** (1993), 487 – 505
- [J1] C.G.J. Jacobi, Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum inter duas variables propositarum, J. Reine Angew. Math. **14** (1835), 281 – 288
- [J2] C.G.J. Jacobi, De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis, simul cum enodatione paradoxo algebraici, J. Reine Angew. Math. **15** (1836), 285 – 308
- [KD] E. Kunz, Kähler differentials, Adv. Lect. in Math., F. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1986
- [Ku] E. Kunz, Residuen und Dualität auf projektiven algebraischen Varietäten, Der Regensburger Trichter **19**, Fakultät für Mathematik der Universität, Regensburg 1986
- [KW] E. Kunz und R. Waldi, Regular differential forms, Contemporary Math. **79**, Amer. Math. Soc., Providence 1988
- [MS] F.J. MacWilliams und N.J. Sloane, The theory of error-correcting codes, North-Holland, Amsterdam 1978
- [MMM] M.G. Marinari, H.M. Möller und T. Mora, Gröbner bases of ideals defined by functionals with an application to ideals of projective points, Appl. Algebra Eng. Commun. Comput. **4** (1993)
- [M] J.C. Migliore, Hypersurface sections of curves, in: F. Orecchia und L. Chiantini (Hrsg.), Zero-Dimensional Schemes, Proc. Conf. Ravello 1992, de Gruyter, Berlin 1994, S. 269 – 282
- [MN] J.C. Migliore und U. Nagel, On the Cohen-Macaulay type of the general hypersurface section of a curve, Math. Z. **219** (1995), 245 – 273

- [MNP] J.C. Migliore, U. Nagel und C. Peterson, Buchsbaum-Rim sheaves, Manuskript 1997
- [MR] T. Mora und L. Robbiano, Points in affine and projective spaces, in: D. Eisenbud und L. Robbiano (Hrsg.), Computational algebraic geometry and commutative algebra, Proc. Conf. Cortona 1991, Symp. Math. **34**, Cambridge University Press, Cambridge 1993, S. 106 – 150
- [NR] G. Niesi und L. Robbiano, Disproving Hibi’s conjecture with CoCoA or projective curves with bad Hilbert functions, in: F. Eyssette und A. Galligo (Hrsg.), Computational Algebraic Geometry, Proc. Conf. MEGA ’92, Nice 1992, Progress in Math. **109**, Birkhäuser, Boston 1993, S. 195 – 201
- [O] F. Orecchia, Points in generic position and conductors of curves with ordinary singularities, J. London Math. Soc. (2) **24** (1981), 85 – 96
- [R] J. Rathmann, The uniform position principle for curves in characteristic p , Math. Ann. **276** (1987), 565 – 576
- [Re] R. Re, Sulle sezioni iperplane di una varietà proiettiva, Le Matematiche **42** (1987), 211 – 218
- [RRR] L. Reid, L.G. Roberts und M. Roitman, On complete intersections and their Hilbert functions, Can. Math. Bull. **34** (1991), 525 – 535
- [RT] C. Renteria und H. Tapia-Recillas, Linear codes associated to the ideal of points in \mathbb{P}^d and its canonical module, Commun. in Algebra **24** (1996), 1083 – 1090
- [Sch] P. Schenzel, Über die freien Auflösungen extremaler Cohen-Macaulay Ringe, J. Algebra **64** (1980), 93 – 101
- [Sø] A.B. Sørensen, Projective Reed-Muller codes, IEEE Trans. on Information Theory **37** (1991), 1567 – 1576
- [S1] R.P. Stanley, Cohen-Macaulay complexes, in: M. Aigner (Hrsg.), Higher Combinatorics, NATO Adv. Study Inst. Ser., Reidel, Boston 1977, S. 51 – 62
- [S2] R.P. Stanley, Hilbert functions of graded algebras, Adv. Math. **28** (1978), 57 – 83
- [S3] R.P. Stanley, On the Hilbert function of a graded Cohen-Macaulay domain, J. Pure Appl. Algebra **73** (1991), 307 – 314
- [Str] R. Strano, A characterization of complete intersection curves in \mathbb{P}^3 , Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 711 – 715
- [vL] J.H. van Lint, Introduction to coding theory, Graduate Texts in Math. **86**, Springer, New York 1982
- [Y1] K. Yanagawa, Some extensions of Castelnuovo’s lemma on zero-dimensional schemes, J. Algebra **170** (1994), 429 – 439
- [Y2] K. Yanagawa, Castelnuovo’s lemma and h-vectors of Cohen-Macaulay homogeneous domains, J. Pure Appl. Algebra **105** (1995), 107 – 116