

**Vektorbündel
und
der Satz von
Cayley-Bacharach**

DISSERTATION
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
der Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg

vorgelegt von
MARTIN KREUZER
aus
IHLERSTEIN

1989

Promotionsgesuch eingereicht am: 23. 2. 1989

Die Arbeit wurde angeleitet von Prof. Dr. Ernst Kunz.

Prüfungsausschuß:

- 1. Gutachter: Prof. Dr. Ernst Kunz
- 2. Gutachter: Prof. Dr. Günter Tamme
- Vorsitzender: Prof. Dr. Jürgen Neukirch
- weiterer Prüfer: Prof. Dr. Reinhard Mennicken

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Vereinbarungen	7
§ 1 Ein Beweis des Residuensatzes	8
§ 2 Zur Dualitätstheorie projektiver Schemata	15
§ 3 Der Residuensatz für Vektorbündel	21
§ 4 Die Cayley-Bacharach-Eigenschaft	28
§ 5 Punkte auf Kurven	38
§ 6 Punkte auf Flächen	45
§ 7 Der Koordinatenring eines projektiven Schemas	52
§ 8 Cayley-Bacharach-Charakterisierungen 0-dimensionalen arithmetischer Gorensteinschemata	61
§ 9 Anwendungen auf Zerfallungskriterien für Vektorbündel	69
§ 10 Punkte im Raum	79
Anhang A: Spuren auf Moduln über endlichdimensionalen Algebren	96
Anhang B: Aufsteigend filtrierte Algebren	99
Anhang C: Vektorbündel mit guten globalen Schnitten	103
Literaturverzeichnis	112
Notationsverzeichnis	114
Sachwortverzeichnis	118

Einleitung

“ Gegeben sei ein 0–dimensionales Unterschema Y einer d –dimensionalen projektiven Varietät V über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Wie kann man an Hand von Invarianten und geometrischen Eigenschaften der Einbettung von Y in V feststellen, ob Y als der vollständige Durchschnitt von d Hyperflächen darstellbar ist ?”

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, sich mit dieser Fragestellung in verschiedenen Situationen auseinanderzusetzen. Als Motivation hierfür diene die bekannte Antwort im Fall $V = \mathbb{P}_k^2$ (vgl. (8.10), [D], [DM1], u.s.w.):

SATZ 1: Genau dann ist ein 0–dimensionales Unterschema Y von \mathbb{P}_k^2 als vollständiger Durchschnitt zweier Kurven darstellbar, wenn Y eine symmetrische Hilbertfunktion und die Cayley-Bacharach-Eigenschaft bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a_Y)$ hat.

Hierbei ist a_Y definiert als der letzte Grad, für den die Hilbertfunktion von Y noch nicht ihren Maximalwert $\deg Y$ erreicht. Die Hilbertfunktion H_Y von Y heißt symmetrisch, wenn $H_Y(n) + H_Y(a_Y - n) = \deg Y$ ist für alle $n \in \mathbb{Z}$. Die Cayley-Bacharach-Eigenschaft von Y bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a_Y)$ bedeutet, daß jede Kurve vom Grad a_Y , die ein Unterschema $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ umfaßt, bereits ganz Y enthalten muß.

Wie einfache Beispiele zeigen (vgl. (8.14)), genügen die numerische Invariante “Hilbertfunktion” und die geometrische “Cayley-Bacharach-Eigenschaft” jedoch im Fall $V = \mathbb{P}_k^d$, $d \geq 3$ nicht mehr, um 0–dimensionale vollständige Durchschnitte zu charakterisieren. Stattdessen gilt (vgl. (8.9)):

SATZ 2: Genau dann ist ein 0–dimensionales Unterschema Y von \mathbb{P}_k^d ($d \geq 2$) ein arithmetisches Gorensteinschema (d.h. der projektive Koordinatenring von Y ist ein Gorensteinring), wenn Y eine symmetrische Hilbertfunktion und die Cayley-Bacharach-Eigenschaft bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(a_Y)$ hat.

Nach einem Resultat von Serre (vgl. [S]) fallen in Kodimension zwei die Begriffe “arithmetisches Gorensteinschema” und “vollständiger Durchschnitt” zusammen, so daß sich Satz 1 als ein Spezialfall von Satz 2 erweist.

Auf der Suche nach weiteren Bedingungen zur Charakterisierung 0–dimensionaler vollständiger Durchschnitte bietet sich uns die folgende bekannte Unterteilung des gestellten Problems in zwei Teilschritte an:

- (1) Wie kann man feststellen, ob Y das Nullstellenschema eines regulären Schnitts eines “geeigneten” Vektorbündels vom Rang d auf V ist ?
- (2) Wie erkennt man in diesem Fall die 0–dimensionalen Nullstellenschemata zerfallender Vektorbündel, das heißt die 0–dimensionalen vollständigen Durchschnitte ?

Eine Antwort auf die erste Frage wurde von P. Griffiths und J. Harris für glatte projektive Flächen V über $k = \mathbb{C}$ gegeben (vgl. [GH1] und [GH2]). Sie benützten dabei die folgende Verallgemeinerung der Cayley-Bacharach-Eigenschaft:

Ein 0-dimensionales Unterschema Y von V hat die Cayley-Bacharach-Eigenschaft bzgl. eines invertierbaren \mathcal{O}_V -Moduls $\mathcal{L} \in \text{Pic}(V)$, wenn für jeden globalen Schnitt $s \in H^0(V, \mathcal{L})$ und jedes Unterschema $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ gilt:

Enthält das Nullstellenschema $(s)_o$ von s das Schema Z , so enthält $(s)_o$ bereits ganz Y .

Später wurde das Resultat von P. Griffiths und J. Harris durch J. Brun auf reduzierte 0-dimensionale Unterschemata glatter Flächen über beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körpern ausgedehnt (vgl. [Bru]). Wie in § 6 gezeigt werden wird, gilt jedoch noch allgemeiner der folgende Satz:

SATZ 3: Ein 0-dimensionales Unterschema Y einer Gorensteinfläche V ist genau dann das Nullstellenschema eines globalen Schnitts eines lokalfreien \mathcal{O}_V -Moduls \mathcal{E} vom Rang zwei mit $\det \mathcal{E} \cong \mathcal{L} \in \text{Pic}(V)$, wenn Y ein Gorensteinschema ist, das die Cayley-Bacharach-Eigenschaft bzgl. $\omega_V \otimes \mathcal{L}$ besitzt, und für alle Punkte $P \in Y$ gilt $\text{pd}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Y,P}) < \infty$.

Die zum Beweis dieses Satzes verwendete Technik der Cayley-Bacharach-Reduktion eines 0-dimensionalen Schemas stammt von A.N. Tyurin und hat auch Anwendungen in der Theorie der $K3$ -Flächen (vgl. [T]).

In einem weiteren Fall gelingt in § 10 eine Charakterisierung der 0-dimensionalen Nullstellenschemata Y spezieller lokalfreier Moduln, nämlich der lokalfreien Modulgarben vom Rang drei mit sehr guten globalen Schnitten auf dem \mathbb{P}_k^3 . Sie lautet folgendermaßen:

SATZ 4: Genau dann ist Y das Nullstellenschema eines regulären Schnitts eines lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ -Moduls vom Rang drei mit sehr guten globalen Schnitten, wenn Y auf einer Gorensteinkurve liegt, auf der es ein subkanonisches fixpunktfreies vollständiges lineares System $|Y|$ definiert.

Dieses Resultat verbindet das Studium gewisser “guter” Rang-3-Vektorbündel auf dem \mathbb{P}_k^3 mit der Theorie der Raumkurven. Sein Beweis beruht auf der Konstruktion reflexiver Modulgarben vom Rang zwei aus Raumkurven, wie sie von R. Hartshorne beschrieben wurde (vgl. [Ha4]), und auf der Konstruktion von Rang-3-Vektorbündeln mittels reflexiver Rang-2-Moduln nach I. Coandă (vgl. [C]). Lokalfreie Modulgarben mit sehr guten globalen Schnitten zeichnen sich dabei dadurch aus, daß die Menge der globalen Schnitte, deren Nullstellenschemata eine “falsche” Kodimension besitzt, verhältnismäßig “klein” ist. Sie werden im Anhang C näher untersucht.

Was die Frage (2) betrifft, so ist es offenbar nötig, geeignete Zerfällungskriterien für Vektorbündel aufzustellen. Dies geschieht in § 9, wo verschiedene Varianten des Zerfällungskriteriums von G. Horrocks (vgl. [Ho]) präsentiert werden. Insbesondere wird gezeigt,

daß man im Fall von Rang-2-Bündeln auf dem \mathbb{P}_k^2 bzw. Rang-3-Bündeln auf dem \mathbb{P}_k^3 auf das Verschwinden gewisser Kohomologiegruppen verzichten kann, wenn man voraussetzt, daß es einen regulären globalen Schnitt gibt, dessen Nullstellenschema ein arithmetisches Gorensteinschema ist. Genauer beweisen wir den folgenden Satz:

SATZ 5: Ein lokalfreier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ -Modul \mathcal{E} vom Rang drei zerfällt genau dann in die direkte Summe dreier invertierbarer $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ -Moduln, wenn $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{E}(k)) = 0$ ist für alle $k \in \mathbb{Z}$ und es einen regulären Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}(n))$ gibt ($n \in \mathbb{Z}$), dessen Nullstellenschema Y eine symmetrische Hilbertfunktion hat und $a_Y = 3n + \deg(\det \mathcal{E}) - 4$ erfüllt.

Mit Hilfe von Satz 4 und Satz 5 kann man nun die 0-dimensionalen vollständigen Durchschnitte im Raum wie folgt charakterisieren (vgl. (10.10)):

SATZ 6: Genau dann ist ein 0-dimensionales Unterschema Y von \mathbb{P}_k^3 der vollständige Durchschnitt dreier Hyperflächen, wenn Y auf einer projektiv normalen Gorensteinkurve C ein subkanonisches fixpunktfreies vollständiges lineares System definiert (mit $\mathcal{O}_C(Y) \cong \omega_C(-e)$ und $e \in \mathbb{Z}$) und ein arithmetisches Gorensteinschema mit $a_Y = e$ darstellt.

Da hierbei Y insbesondere ein arithmetisches Gorensteinschema sein muß, haben wir so im Fall $V = \mathbb{P}_k^3$ die zu Satz 2 gewünschten Zusatzbedingungen gefunden.

Zum Beweis dieser Sätze geht man im einzelnen wie folgt vor:

Die ersten drei Abschnitte behandeln verschiedene Aspekte der Residuen- und Dualitätstheorie, wie sie später in den geometrischen Anwendungen gebraucht werden. Wir beginnen mit einem Beweis des Residuensatzes, der den klassischen Beweis des Residuensatzes auf Riemannschen Flächen von H. Hasse verallgemeinert. Dazu wird dieser Satz zuerst mit der Spurformel für Residuen auf den Fall $V = \mathbb{P}_k^d$ zurückgeführt (vgl. [K1]) und dort mit Hilfe einer auf K.G. Jacobi zurückgehenden Spurformel (vgl. [KK]) bewiesen.

Im zweiten Abschnitt wird die Dualitätstheorie projektiver Schemata wiederholt und auf den 0-dimensionalen Fall angewendet. Insbesondere gelingt eine Beschreibung der dualisierenden Garbe eines 0-dimensionalen Schemas mit Hilfe verallgemeinerter Brüche und regulärer Differentialformen auf der umgebenden Varietät. So hat man im 0-dimensionalen Fall einen guten Ersatz für die konkrete Realisierung von ω_V als Garbe regulärer Differentialformen, die nur für reduzierte Varietäten V bekannt ist (vgl. [K1] und [L1]).

Die Dualitäts- und Residuentheorie 0-dimensionaler Schemata erlauben es uns, den von J. Lipman in [L1] skizzierten Beweis des Residuensatzes für Vektorbündel im dritten Abschnitt ausführlich darzustellen, und wie in [GH2] eine teilweise Umkehrung davon anzugeben.

Nach diesen Vorbereitungen beginnt im vierten Abschnitt das Studium der Cayley-Bacharach-Eigenschaft. Diese wird mit Hilfe der Superabundanz $\omega(Y, \mathcal{L})$ eines 0-dimensionalen Schemas Y bzgl. eines invertierbaren \mathcal{O}_V -Moduls \mathcal{L}

$$\omega(Y, \mathcal{L}) := h^0(\mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{L}) - h^0(\mathcal{L}) + \deg Y$$

charakterisiert und geometrisch interpretiert. Die Superabundanz gibt ein Maß dafür an, wie weit Y davon entfernt ist, unabhängige Bedingungen an das zu \mathcal{L} gehörige vollständige Linearsystem zu stellen. So erhält man eine geometrische Formulierung des Residuensatzes für Vektorbündel (vgl. auch [GH1] und [GH2]):

Ist Y das Nullstellenschema eines regulären globalen Schnitts eines lokalfreien \mathcal{O}_V -Moduls \mathcal{E} vom Rang $d := \dim V$, so hat Y die Cayley-Bacharach-Eigenschaft bzgl. $\omega_V \otimes \det \mathcal{E}$.

Eine zentrale Rolle beim Beweis dieses Satzes und dem Studium der Cayley-Bacharach-Eigenschaft allgemein spielt dabei die folgende Tatsache (vgl. (4.14)):

Genau dann hat ein 0-dimensionales Gorensteinschema Y die Cayley-Bacharach-Eigenschaft bzgl. eines Geradenbündels $\mathcal{L} \in \text{Pic}(V)$, wenn es eine Spur auf dem $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ -Modul $H^0(Y, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)$ gibt, die auf dem Bild der kanonischen Abbildung $\alpha: H^0(V, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)$ verschwindet.

Der hierbei verwendete Begriff einer Spur auf einem Modul über einer endlichdimensionalen Algebra wird in Anhang A erläutert. Eine solche algebraische Charakterisierung der Cayley-Bacharach-Eigenschaft ist für beweistechnische Zwecke sehr vorteilhaft, wie sich auch in § 8 zeigen wird.

Weitere Sätze beschreiben Beziehungen der Cayley-Bacharach-Eigenschaft von Y bzgl. \mathcal{L} zur Superabundanz invertierbarer Faktoren von \mathcal{L} und zu Erweiterungen der Idealgarbe \mathcal{J}_Y von Y in V mit \mathcal{L}^\sim .

Diese Sätze werden in den nächsten beiden Abschnitten angewendet, um 0-dimensionale Unterschemata Y von Kurven und Flächen zu studieren. Ein wichtiger Satz im Kurvenfall ist zweifelsohne der Satz von Riemann-Roch. Dieser Satz gilt in seiner klassischen Formulierung sogar auf Gorensteinkurven C , ohne daß man sich auf Divisoren beschränken muß, deren Träger im regulären Ort von C enthalten ist, und man kann ihn auch mit den in § 4 entwickelten Techniken beweisen. Durch die bekannte geometrische Version erhält der Satz von Riemann-Roch eine anschauliche Bedeutung, die sich mit Hilfe der Superabundanz besonders gut verstehen läßt (vgl. auch [GH2]). Schließlich zeigt sich, daß die Cayley-Bacharach-Eigenschaft von Y bzgl. ω_C nichts anderes bedeutet, als daß $\mathcal{O}_C(Y)$ von globalen Schnitten erzeugt wird.

Im Flächenfall (vgl. § 6) läßt sich das Verhältnis der Superabundanz zu Erweiterungen erheblich präzisieren:

Ist V eine Gorensteinfläche, ist $\mathcal{L} \in \text{Pic}(V)$, und ist Y ein 0-dimensionales Gorensteinschema auf V mit $\omega(Y, \mathcal{L} \otimes \omega_V) \neq 0$ und $\text{pd}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Y,P}) < \infty$ für alle $P \in Y$, so gibt es ein Unterschema $Z \subseteq Y$, das die Cayley-Bacharach-Eigenschaft bzgl. $\mathcal{L} \otimes \omega_V$ besitzt (genannt die

Cayley-Bacharach-Reduktion von Y) und eine Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{J}_Z \rightarrow 0$$

mit einem lokalfreien \mathcal{O}_V -Modul \mathcal{E} vom Rang zwei.

Hieraus folgt sofort Satz 3, also die Cayley-Bacharach-Charakterisierung 0-dimensionaler Nullstellenschemata auf Gorensteinflächen.

Im siebten Abschnitt wird mit der Untersuchung 0-dimensionaler Unterschemata projektiver Räume \mathbb{P}_k^r begonnen. Dazu wird zuerst der projektive Koordinatenring eingeführt und mit den affinen Koordinatenringen auf geeigneten affinen Räumen $\mathbb{A}_k^r \subseteq \mathbb{P}_k^r$ verglichen. Nach der Wahl geeigneter Koordinaten ergibt sich, daß der projektive Koordinatenring die Rees-Algebra eines affinen Koordinatenrings bzgl. der von der Gradfiltrierung induzierten Filtrierung darstellt. Näheres über filtrierte Algebren, ihre Rees-Algebren, ihre graduierten Ringe u.s.w. findet der Leser dabei in Anhang B.

Jetzt ist man in der Lage, die Invariante a_Y einer Einbettung eines 0-dimensionalen Schemas Y in den \mathbb{P}_k^r zu definieren und zu studieren. Insbesondere besagt die Cayley-Bacharach-Eigenschaft von Y bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)$ etwas über das Verhältnis von a_Y mit den Invarianten a_Z der Unterschemata $Z \subseteq Y$, womit man eine Brücke zu den Arbeiten [GW] und [W] von S. Goto und K. Watanabe erhält.

Die Fortführung dieser Untersuchungen im achten Abschnitt führt schließlich zur Cayley-Bacharach-Charakterisierung 0-dimensionaler arithmetischer Gorensteinschemata (vgl. Satz 2). Zum Beweis dieser Charakterisierung geht man folgenderweise vor:

Wie sich aus den Sätzen aus § 4 und § 7 ergibt, ist die Cayley-Bacharach-Eigenschaft von Y bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)$ äquivalent mit der Existenz einer bzgl. der Gradfiltrierung \mathcal{F} "guten" Spur σ eines geeigneten affinen Koordinatenrings S von Y . Die Spur σ induziert eine homogene Linearform auf dem graduierten Ring von S bzgl. \mathcal{F} (vgl. Anhang B), und mit Hilfe der Symmetrie der Hilbertfunktion von Y zeigt man, daß auch diese Linearform eine Spur darstellt. Da der projektive Koordinatenring von Y die Rees-Algebra von S bzgl. \mathcal{F} ist (vgl. § 7), folgt die Behauptung.

Im Fall 0-dimensionaler Unterschemata der Ebene erhält man hieraus wie gesagt die bekannte Charakterisierung 0-dimensionaler vollständiger Durchschnitte (vgl. Satz 1), deren praktische Anwendbarkeit an einigen Beispielen demonstriert wird.

Der neunte Abschnitt stellt die Hilfsmittel bereit, um Antworten auf die obige Frage (2) zu finden, und beschäftigt sich mit Zerfällungskriterien für Vektorbündel. Mit Hilfe der graduierten Version der Formel von Auslander-Buchsbaum und einiger Grundtatsachen der Kohomologietheorie wird das Zerfällungskriterium von G. Horrocks auf arithmetischen Cohen-Macaulay-Varietäten V formuliert und bewiesen. Im Fall $V = \mathbb{P}_k^2$ bzw. $V = \mathbb{P}_k^3$ gelingt es uns, ohne das Verschwinden gewisser Kohomologiegruppen auszukommen, wenn wir wie in Satz 3 voraussetzen, daß es ein 0-dimensionales Nullstellenschema eines globalen

Schnitts des gegebenen Vektorbündels gibt, das ein arithmetisches Gorensteinschema mit der “richtigen” Invariante a_Y darstellt.

Der Beweis von Satz 3 besteht in der Ausnutzung der Charakterisierung 0–dimensionaler arithmetischer Gorensteinschemata (vgl. Satz 2) und der Zurückführung auf das Zerfällungskriterium von G. Horrocks mittels einiger kohomologischer Berechnungen. Wie sich herausstellt, ist die Bedingung “ $a_Y = 3n + \deg(\det \mathcal{E}) - 4$ ” in diesem Satz sogar automatisch erfüllt, wenn wir n genügend groß wählen können.

Mit diesem Rüstzeug und den in Anhang C bereitgestellten Tatsachen über Vektorbündel mit guten globalen Schnitten können im letzten Abschnitt die Charakterisierungen 0–dimensionaler Nullstellenschemata (vgl. Satz 4) und 0–dimensionaler vollständiger Durchschnitte (vgl. Satz 6) im Raum in Angriff genommen werden. Zum Beweis der Charakterisierung der 0–dimensionalen Nullstellenschemata Y stellt man dabei die Raumkurve C , die Y umfaßt, als Nullstellenschema einer reflexiven Modulgarbe \mathcal{F} vom Rang zwei dar (vgl. [Ha4]) und verwendet dann die Konstruktion eines Rang-3-Bündels \mathcal{E} als Erweiterung von \mathcal{J}_Y mit \mathcal{F} , wie sie in [C] eingeführt wurde.

Die Charakterisierung 0–dimensionaler vollständiger Durchschnitte folgt dann, indem man das Zerfällungskriterium von Satz 5 auf \mathcal{E} anwendet. An Hand verschiedener Beispiele werden schließlich konkrete Anwendungsmöglichkeiten beider Charakterisierungen vorgeführt.

An dieser Stelle möchte ich mich sehr herzlich bei Herrn Prof. Dr. E. Kunz bedanken, dessen Anleitung und Betreuung mich bei der Erstellung dieser Arbeit maßgeblich unterstützten. Dank gebührt auch den Herren Dipl. Math. S. Brüderle, Prof. Dr. E. Davis, Prof. Dr. A. Geramita, Dipl. Math. G. Seibert und Prof. Dr. R. Waldi für hilfreiche Diskussionen und Anregungen.

Vereinbarungen

“ Gegeben sei ein 0–dimensionales Unterschema Y einer d –dimensionalen projektiven Varietät V über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Wie kann man an Hand von Invarianten und geometrischen Eigenschaften der Einbettung von Y in V feststellen, ob Y als der vollständige Durchschnitt von d Hyperflächen darstellbar ist ?”

Sofern nicht ausdrücklich anders festgelegt bezeichnet k im folgenden stets einen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper, V eine d –dimensionale integrale projektive k –Varietät, $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^r$ den r –dimensionalen projektiven Raum über k und $Y \subseteq V$ ein 0–dimensionales Unterschema.

Was die verwendeten Notationen der algebraischen Geometrie betrifft, so verweisen wir auf [Ha1] und [K1]. Für grundlegende Schreib- und Sprechweisen der kommutativen Algebra verweisen wir auf [K2], App. A und [K3].

Im einzelnen sei noch auf nachstehende Vereinbarungen hingewiesen:

- (1) Unter einem “Punkt” verstehen wir einen abgeschlossenen Punkt eines k –Schemas bzw. einer k –Varietät V . Mit $V_{\text{abg.}}$ bezeichnen wir die Menge aller abgeschlossenen Punkte von V .
- (2) Inklusionen von Schemata sind stets idealtheoretisch gemeint.
- (3) Mit ω_V, ω_Y etc. bezeichnen wir die kanonische (dualisierende) Garbe eines projektiven k –Schemas bzw. einer projektiven k –Varietät.

Sei \mathcal{F} ein kohärenter \mathcal{O}_V –Modul und K ein endlichdimensionaler k –Vektorraum.

- (4) Mit $\mathbb{P}K$ bezeichnen wir den zu K assoziierten projektiven Raum über k .
- (5) Das \mathcal{O}_V –Dual von \mathcal{F} notieren wir mit \mathcal{F}^\vee , das heißt $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_V)$, und das k –Dual von K notieren wir mit K^* , das heißt $K^* := \text{Hom}_k(K, k)$.
- (6) Wir setzen $h^i \mathcal{F} := \dim_k H^i(V, \mathcal{F})$ für $i \geq 0$.
- (7) Ist $s \in H^0(V, \mathcal{F})$ und \mathcal{J} die Idealgarbe $\mathcal{J} := \text{im}(\mathcal{F}^\vee \xrightarrow{\tilde{s}} \mathcal{O}_V)$ von \mathcal{O}_V , so heißt das durch \mathcal{J} definierte abgeschlossene Unterschema $(s)_o$ von V das **Nullstellenschema** von s .
- (8) Ist \mathcal{F} ein lokalfreier \mathcal{O}_V –Modul vom Rang r und $s \in H^0(V, \mathcal{F})$, so heißt s ein **regulärer** Schnitt von \mathcal{F} , wenn $\text{codim}((s)_o, V) = r$ ist. Bezeichnet Y in diesem Fall das Nullstellenschema von s , so liefern der homologische und der kohomologische Koszulkomplex zu s zwei exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow \det \mathcal{F}^\vee \rightarrow \bigwedge^{r-1} \mathcal{F}^\vee \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}^\vee \xrightarrow{\tilde{s}} \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

und

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_V \xrightarrow{s} \mathcal{F} \xrightarrow{\wedge^s} \bigwedge^2 \mathcal{F} \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^{r-1} \mathcal{F} \rightarrow \det \mathcal{F} \rightarrow \det \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

(vgl. [K1], § 4).

- (9) Statt “lokalfreier \mathcal{O}_V -Modul vom Rang r ” sagen wir auch “Vektorbündel vom Rang r ”, “Rang- r -Bündel” etc. (vgl. [Ha1], II ex. (5.18)).
- (10) Wir setzen $\dim \emptyset := -\infty$.
- (11) Ist R ein kommutativer Ring mit Einselement und I ein Ideal von R , so sei $\text{ht}(I)$ die **Höhe** und $\text{Tiefe}(I)$ die **Tiefe** von I . Dabei sei $\text{ht}(R) := \infty$ und $\text{Tiefe}(R) := \infty$ vereinbart.

§1 Ein Beweis des Residuensatzes

In diesem Abschnitt führen wir einen Beweis des Residuensatzes vor, der im Fall des projektiven Raumes auf einer Verallgemeinerung einer Formel von Jacobi beruht (vgl. [KK], (4.8.c)) und im allgemeinen Fall hierauf zurückgeführt wird. Der Vorteil dieses Beweises besteht darin, daß er die üblicherweise benötigten Doppelkomplexargumente vermeidet (vgl. [L1], (8.6)). Mit dem Residuensatz stellen wir ein wichtiges Hilfsmittel für das Studium 0-dimensionalen Schemata bereit, das später auf verschiedene Weisen geometrisch interpretiert werden wird.

Die Grundlage für die nachfolgenden Resultate bildet das Skriptum [K1], dessen Notationen und Ergebnisse wir im weiteren als bekannt voraussetzen.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und sei \mathcal{V} die Kategorie der integren, d -dimensionalen, projektiven k -Varietäten zusammen mit den endlichen, surjektiven, separablen Morphismen zwischen diesen. Zu jedem $V \in \mathcal{V}$ sei ω_V die Garbe der regulären Differentialformen vom Grad d auf V . Für $V \in \mathcal{V}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(V)$ und Punkte $x \in V_{\text{abg.}}$ bezeichnen $\iota_x: H_x^d(\mathcal{F}) \rightarrow H^d(V, \mathcal{F})$ und $\iota := \bigoplus_{x \in V_{\text{abg.}}} \iota_x: \bigoplus_{x \in V_{\text{abg.}}} H_x^d(\mathcal{F}) \rightarrow H^d(V, \mathcal{F})$ die kanonischen Abbildungen von der lokalen in die globale Kohomologie.

(1.1) SATZ.

Für jedes $V \in \mathcal{V}$ und jeden abgeschlossenen Punkt $x \in V$ gibt es eine eindeutig bestimmte k -lineare Abbildung

$$\text{Res}_x: H_x^d(\omega_V) \rightarrow k$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) **(Normiertheit)** Ist $V = \mathbb{P}_k^d$, ist $x \in V$ ein abgeschlossener Punkt, und identifiziert man $\mathcal{O}_{V,x} \subseteq \widehat{\mathcal{O}_{V,x}} \cong k[[t_1, \dots, t_d]]$, so gilt für alle Elemente

$$\begin{bmatrix} f dt_1 \cdots dt_d \\ t_1^{a_1}, \dots, t_d^{a_d} \end{bmatrix} \in H_x^d(\omega_V)$$

mit $a_i \in \mathbb{N}_+$ und $f = \sum_{(\nu)} \alpha_\nu t_1^{\nu_1} \cdots t_d^{\nu_d}$, $\alpha_\nu \in k$ die Gleichung:

$$\text{Res}_x \left(\begin{bmatrix} f dt_1 \cdots dt_d \\ t_1^{a_1}, \dots, t_d^{a_d} \end{bmatrix} \right) = \alpha_{a_1-1 \dots a_d-1}.$$

- (b) **(Spurformel für Residuen)** Ist $\pi: V \rightarrow W$ ein Morphismus in \mathcal{V} , ist $x \in W$ ein abgeschlossener Punkt mit $\pi^{-1}(x) = \{v_1, \dots, v_s\}$, und ist

$H_x^d(\sigma): H_x^d(\pi_*\omega_V) \rightarrow H_x^d(\omega_W)$ die von der kanonischen Spur $\sigma: \text{Rat}(V) \rightarrow \text{Rat}(W)$ induzierte Abbildung, so ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i=1}^s H_{v_i}^d(\omega_V) & \xrightarrow{\sim} & H_{\pi^{-1}(x)}^d(\omega_V) & \xrightarrow{\sim} & H_x^d(\pi_*\omega_V) & \xrightarrow{H_x^d(\sigma)} & H_x^d(\omega_W) \\ & & \searrow \sum_{i=1}^s \text{Res}_{v_i} & & & & \swarrow \text{Res}_x \\ & & k & \xlongequal{\quad\quad\quad} & k & & \end{array}$$

BEWEIS:

Für die Familie der Residuenabbildungen Res_x gibt es verschiedene Konstruktionen, z.B. [L2], Appendix A mit Hilfe von Hochschild–Homologie oder [K1], § 9 mit Hilfe separierender Parametersysteme. **q.e.d.**

(1.2) SATZ. **(Residuensatz)**

Zu jedem $V \in \mathcal{V}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\int_V: H^d(V, \omega_V) \rightarrow k$, die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{x \in V_{\text{abg.}}} H_x^d(\omega_V) & \xrightarrow{\wr} & H^d(V, \omega_V) \\ \sum_{x \in V_{\text{abg.}}} \text{Res}_x \searrow & & \swarrow \int_V \\ & k & \end{array}$$

Der Beweis dieses Satzes wird mittels Lemma (1.4) zurückgeführt auf den Fall $V = \mathbb{P}_k^d$.

(1.3) LEMMA.

Sei $\pi: V \rightarrow W$ ein Morphismus in \mathcal{V} , sei $x \in W$ ein abgeschlossener Punkt, und sei $\mathcal{F} \in \text{Coh}(V)$. Dann hat man ein kommutatives Diagramm kanonischer Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} H_{\pi^{-1}(x)}^d(\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^d(V, \mathcal{F}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H_x^d(\pi_*\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^d(W, \pi_*\mathcal{F}) \end{array}$$

BEWEIS:

Man bilde das zu dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{\pi^{-1}(x)}^o(\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^o(V, \mathcal{F}) \\ \parallel & & \parallel \\ H_x^o(\pi_*\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^o(W, \pi_*\mathcal{F}) \end{array}$$

gehörige Diagramm universeller δ -Funktoren. **q.e.d.**

(1.4) LEMMA.

Es genügt, den Residuensatz (1.2) im Fall $V = \mathbb{P} := \mathbb{P}_k^d$ zu beweisen. Ist $\int_{\mathbb{P}}$ schon konstruiert, so ergibt sich $\int_V = \int_{\mathbb{P}} \circ H^d(\sigma)$, wobei $H^d(\sigma): H^d(V, \omega_V) \rightarrow H^d(\mathbb{P}, \omega_{\mathbb{P}})$ durch die kanonische Spur induziert wird.

BEWEIS:

Zu $V \in \mathcal{V}$ wähle eine separable noethersche Normalisierung $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}$. Sei $x \in \mathbb{P}$ ein abgeschlossener Punkt mit $\pi^{-1}(x) = \{v_1, \dots, v_s\}$. Betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigoplus_{i=1}^s H_{v_i}^d(\omega_V) \simeq & H_{\pi^{-1}(x)}^d(\omega_V) & \longrightarrow & H^d(V, \omega_V) & \longrightarrow & & \\
\downarrow \sum_{i=1}^s \text{Res}_{v_i} & \downarrow \iota & & \downarrow \iota & & & \\
& H_x^d(\pi_*\omega_V) & \longrightarrow & H^d(\mathbb{P}, \pi_*\omega_V) & & & \\
& \downarrow H_x^d(\sigma) & & \downarrow H^d(\sigma) & & & \\
& H_x^d(\omega_{\mathbb{P}}) & \longrightarrow & H^d(\mathbb{P}, \omega_{\mathbb{P}}) & & & \\
& \downarrow \text{Res}_x & & \downarrow \int_{\mathbb{P}} & & & \\
& k & \xlongequal{\quad} & k & & & \\
& & & & & & \int_V
\end{array}$$

Hierin kommutiert (1) nach der Spurformel für Residuen, (2) nach Lemma (1.3) und (3) auf Grund der Funktorialität der kanonischen Abbildung von der lokalen in die globale Kohomologie. Ist nun der Residuensatz für den projektiven Raum gezeigt, das heißt Diagramm (4) ist kommutativ, so definiere die Abbildung $\int_V: H^d(V, \omega_V) \rightarrow k$ dadurch, daß sie das Diagramm (5) kommutativ macht.

Um schließlich die Eindeutigkeit von \int_V zu zeigen, genügt es zu beweisen, daß die kanonische Abbildung

$$\iota: \bigoplus_{x \in V_{\text{abg.}}} H_x^d(\omega_V) \rightarrow H^d(V, \omega_V)$$

surjektiv ist. Dazu betrachte die kanonische Lokal–Global–Sequenz (vgl. [K1],(1.11)):

$$\bigoplus_{i=1}^s H_{v_i}^d(\omega_V) \simeq H_{\pi^{-1}(x)}^d(\omega_V) \xrightarrow{\iota'} H^d(V, \omega_V) \rightarrow H^d(V \setminus \pi^{-1}(x), \omega_V) \rightarrow 0$$

Da $\mathbb{P} \setminus \{x\}$ eine Überdeckung durch d offene affine Mengen besitzt und π affin ist, gilt dies auch für $V \setminus \pi^{-1}(x)$, woraus mittels Berechnung durch Čechkohomologie sofort das Verschwinden

$$H^d(V \setminus \pi^{-1}(x), \omega_V) = 0$$

folgt. Also ist ι' und damit erst recht ι surjektiv. **q.e.d.**

Zum Beweis des Residuensatzes für den \mathbb{P}_k^d ändern wir unsere Situation ein wenig. Im folgenden sei $V = \mathbb{P}_k^d$, sei $S := k[X_0, \dots, X_d]$ der projektive Koordinatenring von V , sei $Y \subseteq V$ ein 0–dimensionales abgeschlossenes Unterschema von V , und sei $I \subseteq S$ ein Y definierendes Ideal. Dann schreibe kurz Ω_V^d für $\Omega_{V|k}^d$ und bezeichne mit $I^* \subseteq S$ das saturierte Ideal von Y , das heißt

$$I^* = \{s \in S : \forall i \in \{0, \dots, d\} \exists n \in \mathbb{N} : x_i^n \cdot s \in I\}$$

(1.5) SATZ. **(Der Residuensatz für den \mathbb{P}_k^d)**

Es gibt eine eindeutig bestimmte k -lineare Abbildung $\int_V: H^d(V, \Omega_V^d) \rightarrow k$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} H_Y^d(\Omega_V^d) & \xrightarrow{\iota} & H^d(V, \Omega_V^d) \\ \sum_{P \in Y} \text{Res}_P \swarrow & & \searrow \int_V \\ & k & \end{array}$$

BEWEIS:

Die Eindeutigkeit von \int_V folgt wie im Beweis von Lemma (1.4), sobald die Existenz gezeigt ist. Dazu wiederum ist nur $\ker \iota \subseteq \ker (\sum_{P \in Y} \text{Res}_P)$ zu beweisen. Dies geschieht wie folgt:

Wegen $\dim Y = 0$ hat I^* die Höhe d , und weil S ein graduerter Cohen-Macaulay-Ring ist, gibt es eine homogene reguläre Folge $\{F_1, \dots, F_d\}$ in I^* . Sei $Y' \subseteq V$ der durch $Y' = \mathcal{V}(F_1) \cap \dots \cap \mathcal{V}(F_d)$ definierte 0-dimensionale vollständige Durchschnitt. Dann ist Y ein abgeschlossenes Unterschema von Y' , und es ergibt sich ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & H_Y^d(\Omega_V^d) & & \\ & \swarrow \Sigma_{P \in Y} \text{Res}_P & & \searrow \iota & \\ & k & & & H^d(V, \Omega_V^d) \\ & \nwarrow \Sigma_{P \in Y'} \text{Res}_P & & \nearrow \iota' & \\ & & H_{Y'}^d(\Omega_V^d) & & \end{array}$$

$\downarrow i$

Hierbei ist i die kanonische Inklusionsabbildung

$$i: H_Y^d(\Omega_V^d) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{P \in Y} H_P^d(\Omega_V^d) \hookrightarrow \bigoplus_{P \in Y'} H_P^d(\Omega_V^d) \xrightarrow{\sim} H_{Y'}^d(\Omega_V^d)$$

Also genügt es zu beweisen, daß $\ker \iota' \subseteq \ker (\sum_{P \in Y'} \text{Res}_P)$ gilt. Auf Grund der Exaktheit der kanonischen Lokal-Global-Sequenz

$$\dots \rightarrow H^{d-1}(V \setminus Y', \Omega_V^d) \xrightarrow{\delta} H_{Y'}^d(\Omega_V^d) \xrightarrow{\iota'} H^d(V, \Omega_V^d) \rightarrow 0$$

ist dies äquivalent mit der Bedingung $\sum_{P \in Y'} \text{Res}_P(\delta(x)) = 0$ für alle $x \in H^{d-1}(V \setminus Y', \Omega_V^d)$.

Jetzt berechnen wir $H^{d-1}(V \setminus Y', \Omega_V^d)$ mittels Čechkohomologie. Die Menge $\mathfrak{U} := \{D_+(F_1), \dots, D_+(F_d)\}$ bildet eine offene affine Überdeckung von $V \setminus Y'$. Bezeichnet $\partial: C^{d-2}(\mathfrak{U}, \Omega_V^d) \rightarrow C^{d-1}(\mathfrak{U}, \Omega_V^d)$ die Differentiation im Čechkomplex zu \mathfrak{U} , so ergeben sich die Isomorphismen

$$H^{d-1}(V \setminus Y', \Omega_V^d) \cong \check{H}^{d-1}(\mathfrak{U}, \Omega_V^d) \cong C^{d-1}(\mathfrak{U}, \Omega_V^d) / \text{im } \partial$$

Nun berechnet man:

$$\begin{aligned} C^{d-1}(\mathfrak{U}, \Omega_V^d) &= \Omega_V^d(D_+(F_1) \cap \dots \cap D_+(F_d)) = \Omega_V^d(D_+(F_1 \cdots F_d)) = \\ &= \widetilde{\Omega_S^{d+1}}(D_+(F_1 \cdots F_d)) = (\Omega_S^{d+1})_{(F_1 \cdots F_d)} \end{aligned}$$

Somit schreibt sich jedes Element $x \in H^{d-1}(V \setminus Y', \Omega_V^d)$ als Restklasse eines Bruches der Form

$$\frac{G dX_o \cdots dX_d}{(F_1 \cdots F_d)^\nu} \in C^{d-1}(\mathfrak{U}, \Omega_V^d)$$

mit $\nu \in \mathbb{N}_+$ und $G \in S$ homogen vom Grad $\nu(\sum_{i=1}^d \deg F_i) - d - 1$.

Im folgenden sei o.E. angenommen, daß die Hyperebene $\mathcal{V}(X_o) \subseteq V$ den 0-dimensionalen vollständigen Durchschnitt $Y' \subseteq V$ nicht trifft. Durch die Dehomogenisierung $X_o \mapsto 1$ gehe F_i in $f_i \in k[X_1, \dots, X_d]$ über ($i=1, \dots, d$) und G in $g \in k[X_1, \dots, X_d]$.

Wir benötigen die folgenden beiden Lemmata:

(1.6) LEMMA.

Wie oben schreibe $x \in H^{d-1}(V \setminus Y', \Omega_V^d)$ als Restklasse eines Elements $\frac{G dX_o \cdots dX_d}{(F_1 \cdots F_d)^\nu} \in C^{d-1}(\mathfrak{U}, \Omega_V^d)$. Dann gilt:

$$\delta(x) = \left(\left[\begin{array}{c} g dX_1 \cdots dX_d \\ f_1^\nu, \dots, f_d^\nu \end{array} \right]_P \right)_{P \in Y'} \in \bigoplus_{P \in Y'} H_P^d(\Omega_V^d) \cong H_{Y'}^d(\Omega_V^d)$$

BEWEIS:

Da die lokale Kohomologie nur von Umgebungen von Y' abhängt, und weil die Menge $\mathfrak{U}' := \{D(f_1), \dots, D(f_d)\}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{A}_k^d = V \setminus \mathcal{V}(X_o)$ bildet, ist δ die Komposition

$$\check{H}^{d-1}(\mathfrak{U}, \Omega_V^d) \xrightarrow{\rho} \check{H}^{d-1}(\mathfrak{U}', \Omega_V^d|_{\mathbb{A}_k^d}) \xrightarrow{\sigma} H_{Y'}^d(\Omega_V^d)$$

wobei ρ von der Restriktionsabbildung induziert wird. Der verbindende Homomorphismus σ der Lokal-Global-Sequenz in \mathbb{A}_k^d ist ein Isomorphismus gemäß [K1], (4.10). Nun ist $\rho(x)$ offenbar die Restklasse von

$$\frac{g dX_1 \cdots dX_d}{(f_1 \cdots f_d)^\nu} \in C^{d-1}(\mathfrak{U}', \Omega_V^d|_{\mathbb{A}_k^d}) \quad \text{in} \quad \check{H}^{d-1}(\mathfrak{U}', \Omega_V^d|_{\mathbb{A}_k^d}).$$

Diese wiederum wird von σ abgebildet auf das Tupel der lokalen Kohomologieklassen

$\left[\begin{array}{c} g dX_1 \cdots dX_d \\ f_1^\nu, \dots, f_d^\nu \end{array} \right]_P \in H_P^d(\Omega_V^d)$, wie in [K1], S.51 gezeigt wird. Hieraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Die Algebra $R = k[X_1, \dots, X_d]/(f_1^\nu, \dots, f_d^\nu)$ ist ein endlicher vollständiger Durchschnitt über k (vgl. [KK], (1.11)). Sei $\tau: R \rightarrow k$ die zu dieser Präsentation gemäß [K2], (F20)

assozierte Spur. Wegen $R \cong \prod_{P \in Y'} R_P$ erfüllen die zu den Präsentationen

$R_P \cong k[X_1, \dots, X_d]_{\mathfrak{m}_P} / (f_1^\nu, \dots, f_d^\nu)$ assoziierten Spuren $\tau_P: R_P \rightarrow k$ nach [K2], (F30) die Beziehung

$$\tau(\mathfrak{r}) = \sum_{P \in Y'} \tau_P(\mathfrak{r}_P) \quad \text{für alle } \mathfrak{r} = (\mathfrak{r}_P)_{P \in Y'} \in R.$$

(1.7) LEMMA.

Für $P \in Y'$ und ein Element $g \in \mathcal{O}_{V,P}$ mit Restklasse \bar{g} in R_P gilt:

$$\tau_P(\bar{g}) = \text{Res}_P \left(\left[\begin{array}{c} g dX_1 \cdots dX_d \\ f_1^\nu, \dots, f_d^\nu \end{array} \right]_P \right)$$

BEWEIS:

Seien $P = (p_1, \dots, p_d)$ die affinen Koordinaten von P in $\mathbb{A}_k^d = V \setminus \mathcal{V}(X_o)$. Dann ist $\mathfrak{m}_P = (X_1 - p_1, \dots, X_d - p_d)$ und man hat eine Identifikation

$$\mathcal{O}_{V,P} \subseteq \widehat{\mathcal{O}_{V,P}} \cong k[[t_1, \dots, t_d]]$$

mit $t_i := X_i - p_i$ für $i = 1, \dots, d$. Da $\{f_1^\nu, \dots, f_d^\nu\}$ ein Parametersystem von $k[X_1, \dots, X_d]_{\mathfrak{m}_P}$ bildet, gibt es ein $\sigma \in \mathbb{N}_+$ mit $(t_1^\sigma, \dots, t_d^\sigma) = ((X_1 - p_1)^\sigma, \dots, (X_d - p_d)^\sigma) \subseteq (f_1^\nu, \dots, f_d^\nu)$.

Für $i = 1, \dots, d$ schreibe $t_i^\sigma = \sum_{j=1}^d a_{ij} f_j^\nu$ mit $a_{ij} \in \mathcal{O}_{V,P}$ und setze $\Delta = \det(a_{ij})$. Dann gilt gemäß [K1], (4.14) für alle Elemente $g \in \mathcal{O}_{V,P}$ mit Restklasse \bar{g} in $\mathcal{O}_{Y,P}$ die Formel:

$$\text{Res}_P \left(\left[\begin{array}{c} g dX_1 \cdots dX_d \\ f_1^\nu, \dots, f_d^\nu \end{array} \right] \right) = \text{Res}_P \left(\left[\begin{array}{c} g dt_1 \cdots dt_d \\ f_1^\nu, \dots, f_d^\nu \end{array} \right] \right) = \text{Res}_P \left(\left[\begin{array}{c} \Delta g dt_1 \cdots dt_d \\ t_1^\sigma, \dots, t_d^\sigma \end{array} \right] \right)$$

Bezeichnet τ'_P die zu der Präsentation $k[X_1, \dots, X_d]_{\mathfrak{m}_P} / (t_1^\sigma, \dots, t_d^\sigma)$ assoziierte Spur, so gilt gemäß [K2], (F29) ebenfalls

$$\tau_P(\bar{g}) = \tau'_P(\overline{\Delta g}).$$

Nun entwickle das Element $\Delta g \in k[[t_1, \dots, t_d]]$ als Potenzreihe

$$\Delta g = \sum_{(\nu)} \alpha_\nu t_1^{\nu_1} \cdots t_d^{\nu_d} \quad \text{mit } \alpha_\nu \in k$$

und erhalte auf Grund der Normiertheit der Residuenabbildungen die Gleichung

$$\text{Res}_P \left(\left[\begin{array}{c} \Delta g dt_1 \cdots dt_d \\ t_1^\sigma, \dots, t_d^\sigma \end{array} \right] \right) = \alpha_{\sigma-1 \dots \sigma-1}.$$

Analog wie in [K2], (F22b) ergibt sich auch

$$\tau'_P(\overline{\Delta g}) = \alpha_{\sigma-1 \dots \sigma-1}. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Jetzt folgt die Behauptung des Satzes aus der Spurformel [KK], (4.6.a), welche eine Formel von Jacobi ([KK], (4.8.c)) verallgemeinert. Schreibe ein vorgegebenes Element $x \in H^{d-1}(V \setminus Y', \Omega_V^d)$ als Restklasse eines Bruches $\frac{G dX_o \cdots dX_d}{(F_1 \cdots F_d)^\nu} \in C^{d-1}(\mathfrak{A}, \Omega_V^d)$ mit $\nu \in \mathbb{N}_+$ und $G \in S$ homogen vom Grad $\nu(\sum_{i=1}^d \deg F_i) - d - 1$. Sei g die Dehomogenisierung von G nach X_o und \bar{g} die Restklasse von g in R . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{P \in Y'} \text{Res}_P(\delta(x)) &= \sum_{P \in Y'} \text{Res}_P \left(\left[\begin{array}{c} g dX_1 \cdots dX_d \\ f_1^\nu, \dots, f_d^\nu \end{array} \right]_P \right) && \text{nach (1.6)} \\ &= \sum_{P \in Y'} \tau_P(\bar{g}) && \text{nach (1.7)} \\ &= \tau(\bar{g}) \end{aligned}$$

Das Element $\tau(\bar{g})$ verschwindet wegen $\deg g \leq \sum_{i=1}^d \deg f_i^\nu - d - 1$ gemäß [KK], (4.6.a).

q.e.d.

§2 Zur Dualitätstheorie projektiver Schemata

Nachdem wir kurz die Dualitätstheorie projektiver Varietäten wiederholt haben, wenden wir diese an, um zu zeigen, daß die Garbe ω_V der regulären Differentialformen auf V zusammen mit der im Residuensatz konstruierten Abbildung \int_V ein dualisierendes Paar für jede projektive Varietät V bildet. Wir interpretieren den Residuensatz als eine Aussage über die Kompatibilität von lokaler und globaler Dualität. Dann geben wir eine explizite Beschreibung der dualisierenden Garbe ω_Y eines 0-dimensionalen Schemas $Y \subseteq V$, das nicht reduziert zu sein braucht, durch einen ausgezeichneten Untermodul $H^0(Y, \omega_Y)$ von $H_Y^d(\omega_V)$. Die Spurabbildung $\int_Y: H^0(Y, \omega_Y) \rightarrow k$ ergibt sich dann einfach als die Einschränkung von $\sum_{P \in Y} \text{Res}_P: H_Y^d(\omega_V) \rightarrow k$ auf $H^0(Y, \omega_Y)$.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und sei V eine d -dimensionale integrale projektive k -Varietät. Die folgenden Hauptergebnisse der Dualitätstheorie projektiver Varietäten werden in [K1], § 9 – § 11 bewiesen.

(2.1) **SATZ. (Lokaler Dualitätssatz)**

(a) Für alle $\mathcal{F} \in \text{Coh}(V)$ und alle abgeschlossenen Punkte $P \in V$ ist die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{F}_P}: \text{Hom}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{F}_P, \omega_{V,P})^\wedge &\longrightarrow \text{Hom}_k(H_P^d(\mathcal{F}), k) \\ l &\longmapsto \text{Res}_P \circ H_P^d(l) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

(b) Ist P ein Cohen-Macaulay-Punkt auf V , d.h. ist $\mathcal{O}_{V,P}$ ein Cohen-Macaulay-Ring, so hat man für alle $i \in \mathbb{N}$ in \mathcal{F} funktorielle Isomorphismen

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^i(\mathcal{F}_P, \omega_{V,P})^\wedge \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(H_P^{d-i}(\mathcal{F}), k). \quad ([\mathbf{K1}], (9.10))$$

(2.2) **SATZ. (Globaler Dualitätssatz)**

Für alle $\mathcal{F} \in \text{Coh}(V)$ ist die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \delta'_\mathcal{F}: \text{Hom}_V(\mathcal{F}, \omega_V) &\longrightarrow \text{Hom}_k(H^d(V, \mathcal{F}), k) \\ l &\longmapsto \int'_V \circ H^d(V, l) \end{aligned}$$

bijektiv. Hierbei ist $\int'_V: H^d(V, \omega_V) \rightarrow k$ die Komposition

$$H^d(V, \omega_V) \hookrightarrow H_s^{d+1}(C(V), \omega_{C(V)}) \xrightarrow{\text{Res}_s} k$$

wie in [K1], (10.2).

([K1], (10.4))

(2.3) **BEMERKUNG:**

Mit anderen Worten, (ω_V, \int'_V) ist ein dualisierendes Paar für V . Hierunter versteht man eine dualisierende Garbe ω_V auf V mit einer Spurabbildung $\int'_V: H^d(V, \omega_V) \rightarrow k$ gemäß [Ha1], III § 7.

Allgemein existiert ein dualisierendes Paar (ω_V, \int'_V) für jedes projektive Schema $V \subseteq \mathbb{P}_k^n$ (vgl. [Ha1], III (7.5)), wobei $\omega_V \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_\mathbb{P}^n}^{n-d}(\mathcal{O}_V, \Omega_\mathbb{P}^n)$ ist. Im nichtreduzierten Fall scheint aber eine konkrete Realisierung von ω_V als Garbe von Differentialformen nicht möglich zu sein.

(2.4) KOROLLAR. **(Vollständige Dualität)**

(a) Für alle $\mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(V)$ und alle $i \in \mathbb{N}$ hat man eine kanonische, in \mathcal{F} funktorielle k -lineare Abbildung

$$\delta_{\mathcal{F}}^i: \text{Ext}_V^i(\mathcal{F}, \omega_V) \longrightarrow \text{Hom}_k(H^{d-i}(V, \mathcal{F}), k).$$

(b) Ist V eine Cohen-Macaulay-Varietät, so ist $\delta_{\mathcal{F}}^i$ für alle $\mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(V)$ und alle $i \in \mathbb{N}$ ein Isomorphismus. ([K1], (11.16))

(c) Ist V eine Cohen-Macaulay-Varietät und \mathcal{F} ein lokalfreier \mathcal{O}_V -Modul, so gilt für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$H^i(V, \mathcal{F}) \cong H^{d-i}(V, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_V)^* \quad ([K1], (11.17))$$

(2.5) KOROLLAR.

Es gilt: $H^d(V, \omega_V) \cong k$

BEWEIS: (Vgl. [AK], I (2.10))

Sei η der generische Punkt von V , und sei $K := \mathcal{O}_{V, \eta}$. Dann ist die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}_V(\omega_V, \omega_V) &\longrightarrow \text{Hom}_K(\omega_{V, \eta}, \omega_{V, \eta}) \\ f &\longmapsto f_\eta \end{aligned}$$

injektiv, denn ist $f_\eta = 0$, so gilt $\eta \notin \text{Supp}(\text{im } f)$, also $\dim(\text{Supp}(\text{im } f)) < d$. Gemäß [Ha1], II ex.(1.19.c) und III (2.10) gilt $H^d(V, \text{im } f) \cong H^d(\text{Supp}(\text{im } f), \text{im } f|_{\text{Supp}(\text{im } f)})$, und nach dem Grothendieckschen Verschwindungssatz (vgl. [Ha1], III (2.7)) ist $H^d(V, \text{im } f) = 0$. Nach (2.2) folgt somit $\text{Hom}_V(\text{im } f, \omega_V) = 0$, was wegen $\text{im } f \hookrightarrow \omega_V$ nur für $f = 0$ möglich ist.

Andererseits ist $\eta \in V$ ein regulärer Punkt. Dies liefert $\omega_{V, \eta} \cong K$ und folglich ergibt sich $\text{Hom}_K(\omega_{V, \eta}, \omega_{V, \eta}) \cong K$. Aber nach dem Serreschen Endlichkeitssatz ist $\text{Hom}_V(\omega_V, \omega_V)$ eine endlichdimensionale k -Algebra, und daher muß $\text{Hom}_V(\omega_V, \omega_V) \cong k$ sein, da k algebraisch abgeschlossen ist in K . Eine nochmalige Anwendung von (2.2) zeigt jetzt $H^d(V, \omega_V) \cong k$. **q.e.d.**

(2.6) KOROLLAR.

Auch (ω_V, \int_V) ist ein dualisierendes Paar für V . Das heißt, für alle $\mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(V)$ ist die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{F}}: \text{Hom}_V(\mathcal{F}, \omega_V) &\longrightarrow \text{Hom}_k(H^d(V, \mathcal{F}), k) \\ l &\longmapsto \int_V \circ H^d(V, l) \end{aligned}$$

bijektiv.

BEWEIS:

Wegen $\int_V \neq 0$ und $\int'_V \neq 0$ sowie $H^d(V, \omega_V) \cong k$ gibt es einen k -Automorphismus

$$\beta: \text{Hom}_k(H^d(V, \omega_V), k) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(H^d(V, \omega_V), k)$$

mit $\beta(\int'_V) = \int_V$. Nach dem Dualitätssatz (2.2) gibt es einen \mathcal{O}_V -Endomorphismus $\alpha: \omega_V \rightarrow \omega_V$ mit $\delta'_{\omega_V}(\alpha) = \int_V$. Betrachte dann das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_V(\omega_V, \omega_V) & \xrightarrow[\delta'_{\omega_V}]{\sim} & \mathrm{Hom}_k(H^d(V, \omega_V), k) \\ \mathrm{Hom}(\alpha, \omega_V) \downarrow & & \downarrow \beta \\ \mathrm{Hom}_V(\omega_V, \omega_V) & \xrightarrow[\delta'_{\omega_V}]{\sim} & \mathrm{Hom}_k(H^d(V, \omega_V), k) \end{array}$$

Wegen $\mathrm{Hom}_V(\omega_V, \omega_V) \cong H^d(V, \omega_V)^* \cong k$ und wegen

$$\beta \circ \delta'_{\omega_V}(\mathrm{id}) = \beta(\int'_V) = \int_V = \delta'_{\omega_V}(\alpha) = \delta'_{\omega_V} \circ \mathrm{Hom}_V(\alpha, \omega_V)(\mathrm{id})$$

ist dieses Diagramm kommutativ. Also folgt aus der Bijektivität von β , daß auch α ein Isomorphismus ist. Für alle $\mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(V)$ und $l \in \mathrm{Hom}_V(\mathcal{F}, \omega_V)$ gilt somit

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{F}}(l) &= \int_V \circ H^d(V, l) = \delta'_{\omega_V}(\alpha) \circ H^d(V, l) \\ &= \int'_V \circ H^d(V, \alpha) \circ H^d(V, l) = \int'_V \circ H^d(V, \alpha \circ l) \\ &= \delta'_{\mathcal{F}}(\alpha \circ l) = \delta'_{\mathcal{F}} \circ \mathrm{Hom}_V(\mathcal{F}, \alpha)(l) \end{aligned}$$

und daher ist mit $\delta'_{\mathcal{F}}$ auch $\delta_{\mathcal{F}}: \mathrm{Hom}_V(\mathcal{F}, \omega_V) \rightarrow \mathrm{Hom}_k(H^d(V, \mathcal{F}), k)$ bijektiv. **q.e.d.**

(2.7) KOROLLAR. **(Kompatibilität von lokaler und globaler Dualität)**

(a) Für alle $\mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(V)$ und alle abgeschlossenen Punkte $P \in V$ ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_V(\mathcal{F}, \omega_V) & \xrightarrow[\delta_{\mathcal{F}}]{\sim} & \mathrm{Hom}_k(H^d(V, \mathcal{F}), k) \\ \downarrow \mathrm{kan.} & & \downarrow \iota_x^* \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{F}_P, \omega_{V,P}) \widehat{\phantom{\mathcal{F}_P}} & \xrightarrow[\delta_{\mathcal{F}_P}]{\sim} & \mathrm{Hom}_k(H_P^d(\mathcal{F}), k) \end{array}$$

(b) Ist $\int_V: H^d(V, \omega_V) \rightarrow k$ eine k -lineare Abbildung mit der Eigenschaft, daß die wie in (2.6) konstruierte zugehörige Abbildung $\delta_{\mathcal{F}}: \mathrm{Hom}_V(\mathcal{F}, \omega_V) \rightarrow \mathrm{Hom}_k(H^d(V, \mathcal{F}), k)$ für alle $\mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(V)$ und alle $P \in V$ das Diagramm (*) kommutativ macht, so erfüllt diese Abbildung \int_V die Behauptung des Residuensatzes.

BEWEIS:

“(a)” Die Behauptung $\int_V \circ H^d(V, l) \circ \iota_P = \mathrm{Res}_P \circ H_P^d(l)$ für $l \in \mathrm{Hom}_V(\mathcal{F}, \omega_V)$ folgt wegen der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H_P^d(\mathcal{F}) & \xrightarrow{H_P^d(l)} & H_P^d(\omega_V) \\ \downarrow \iota_P & & \downarrow \iota_P \\ H^d(V, \mathcal{F}) & \xrightarrow{H^d(V, l)} & H^d(V, \omega_V) \end{array}$$

aus $\int_V \circ \iota_P = \text{Res}_P$, was im Residuensatz (1.2) gezeigt wurde.

“(b)” Wählt man in (*) $\mathcal{F} = \omega_V$ und $l = \text{id}_{\omega_V}$, so gilt $\int_V \circ \iota_P = \text{Res}_P$ für alle $P \in V$.
q.e.d.

(2.8) BEMERKUNG:

In [K1], (10.7) wird gezeigt, daß der Residuensatz (1.2) auch mit der Abbildung \int'_V an Stelle von \int_V gilt. Es ist daher $\int'_V = \int_V$.

Jetzt sei $Y \subseteq V$ ein 0-dimensionales Unterschema mit Idealgarbe $\mathcal{J}_Y \subseteq \mathcal{O}_V$, so daß $\mathcal{O}_{V,P}$ für alle Punkte $P \in Y$ ein Cohen-Macaulay-Ring ist.

(2.9) DEFINITION:

Für jeden Punkt $P \in Y$ definieren wir

$$\omega_{Y,P} := 0_{H_P^d(\omega_V)} : \mathcal{J}_{Y,P} := \{\xi \in H_P^d(\omega_V) : \mathcal{J}_{Y,P} \cdot \xi = 0\}.$$

Außerdem sei $\text{Res}_P^Y : \omega_{Y,P} \rightarrow k$ die Einschränkung von $\text{Res}_P : H_P^d(\omega_V) \rightarrow k$ auf $\omega_{Y,P}$.

(2.10) BEMERKUNG:

- (a) Gemäß seiner Definition hängt $\omega_{Y,P}$ von der Einbettung $Y \subseteq V$ ab.
(b) Sei $P \in Y$ und $t = \{t_1, \dots, t_d\}$ eine $\mathcal{O}_{V,P}$ -reguläre Folge in $\mathcal{J}_{Y,P}$. (Eine solche existiert, da $\mathcal{O}_{V,P}$ ein Cohen-Macaulay-Ring und $\mathcal{J}_{Y,P}$ ein $\mathfrak{m}_{V,P}$ -primäres Ideal ist.)
Dann gilt:

$$\begin{aligned} \omega_{Y,P} &= \left\{ \begin{bmatrix} w \\ t \end{bmatrix} \in H_P^d(\omega_V) : \mathcal{J}_{Y,P} \cdot \begin{bmatrix} w \\ t \end{bmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} w \\ t \end{bmatrix} \in H_P^d(\omega_V) : \mathcal{J}_{Y,P} \cdot w \subseteq (t) \cdot \omega_{V,P} \right\} \end{aligned}$$

BEWEIS:

“(b)” Auf Grund des lokalen Dualitätssatzes (2.1.b) verschwindet $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^i(\mathcal{O}_{V,P}/(t), \omega_{V,P})$ für alle $i = 0, \dots, d-1$, das heißt t ist eine $\omega_{V,P}$ -reguläre Folge. Daher folgt die zweite Beschreibung von $\omega_{Y,P}$ aus der ersten und der Gleichheitsregel [K1], (4.16).
Nach Definition gilt:

$$\omega_{Y,P} = \left\{ \begin{bmatrix} w \\ t^a \end{bmatrix} \in H_P^d(\omega_V) : a \in \mathbb{N}_+, \mathcal{J}_{Y,P} \cdot \begin{bmatrix} w \\ t^a \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

Für $\begin{bmatrix} w \\ t^a \end{bmatrix} \in \omega_{Y,P}$ haben wir also insbesondere $(t) \cdot w \subseteq (t^a) \cdot \omega_{V,P}$, woraus nach [K2], (E20) folgt, daß ein $w' \in \omega_{V,P}$ existiert mit

$$w \equiv t_1^{a-1} \dots t_d^{a-1} \cdot w' \pmod{(t^a) \cdot \omega_{V,P}}.$$

Damit liefert die Erweiterungsregel [K1], (4.14) die Gleichheit $\begin{bmatrix} w \\ t^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w' \\ t \end{bmatrix}$, so daß wir die erste Behauptung erhalten.
q.e.d.

(2.11) SATZ. **(Lokaler Dualitätssatz auf Y)**

Das Paar $(\omega_{Y,P}, \text{Res}_P^Y)$ repräsentiert den Funktor $\text{Hom}_k(\mathcal{F}_P, k)$ für endlich erzeugte $\mathcal{O}_{Y,P}$ -Moduln \mathcal{F}_P .

BEWEIS:

Nach dem lokalen Dualitätssatz (2.1) und [K1], (11.18) hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi: H_P^d(\omega_V) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(\widehat{\mathcal{O}_{V,P}}, k) \\ \xi &\longmapsto (r \mapsto \text{Res}_P(r \cdot \xi)). \end{aligned}$$

Dieser ist offensichtlich sogar ein $\widehat{\mathcal{O}_{V,P}}$ -Isomorphismus. Nach Definition von Res_P^Y kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H_P^d(\omega_V) & \xrightarrow[\Phi]{\sim} & \text{Hom}_k(\widehat{\mathcal{O}_{V,P}}, k) \\ \uparrow & & \uparrow \text{kan.} \\ \omega_{Y,P} & \xrightarrow{\Psi} & \text{Hom}_k(\mathcal{O}_{Y,P}, k) \\ w & \longmapsto & (r \mapsto \text{Res}_P^Y(r \cdot w)) \end{array}$$

Da in der unteren Zeile jeweils genau diejenigen Elemente stehen, die von $\mathcal{J}_{Y,P}$ annulliert werden, ist Ψ ein $\mathcal{O}_{Y,P}$ -Isomorphismus. Indem man eine Präsentation des endlichen $\mathcal{O}_{Y,P}$ -Moduls \mathcal{F}_P wählt, sieht man, daß auch die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y,P}}(\mathcal{F}_P, \omega_{Y,P}) &\longrightarrow \text{Hom}_k(\mathcal{F}_P, k) \\ l &\longmapsto \text{Res}_P^Y \circ l \end{aligned}$$

ein in \mathcal{F}_P funktorieller Isomorphismus ist.

q.e.d.

(2.12) DEFINITION:

Sei ω_Y die zu dem $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ -Modul $\bigoplus_{P \in Y} \omega_{Y,P}$ assoziierte Garbe auf Y , und sei

$$\begin{aligned} \int_Y: H^0(Y, \omega_Y) &\cong \bigoplus_{P \in Y} \omega_{Y,P} \longrightarrow k \\ (w_P)_{P \in Y} &\longmapsto \sum_{P \in Y} \text{Res}_P^Y(w_P). \end{aligned}$$

(2.13) SATZ. **(Globaler Dualitätssatz auf Y)**

Das Paar (ω_Y, \int_Y) ist ein dualisierendes Paar für Y , d.h. für alle kohärenten \mathcal{O}_Y -Moduln \mathcal{F} ist die Paarung

$$\begin{aligned} \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, \omega_Y) \times H^0(Y, \mathcal{F}) &\longrightarrow k \\ (l, f) &\longmapsto \int_Y \circ H^0(l)(f) \end{aligned}$$

nicht ausgeartet.

BEWEIS:

Dies folgt sofort aus (2.11) durch Summation über die Punkte $P \in Y$.

q.e.d.

(2.14) KOROLLAR.

Die Abbildung $\int_Y: H^0(Y, \omega_Y) \rightarrow k$ ist eine Spur auf dem $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ -Modul $H^0(Y, \omega_Y)$ (im Sinne von Anhang A).

BEWEIS:

Der nach dem Satz gegebene k -Isomorphismus

$$\begin{aligned} H^0(Y, \omega_Y) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(H^0(Y, \mathcal{O}_Y), k) \\ w &\longmapsto (r \mapsto \int_Y(w \cdot r)) =: \int_Y(w \cdot -) \end{aligned}$$

ist offensichtlich sogar ein $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ -Isomorphismus. Folglich hat man einen $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ -Isomorphismus

$$\begin{aligned} \text{Hom}_k(H^0(Y, \omega_Y), k) &\xrightarrow{\sim} H^0(Y, \mathcal{O}_Y)^{**} \xrightarrow{\sim} H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \\ \int_Y &\longmapsto (\int_Y(w \cdot -) \mapsto \int_Y(w)) \longmapsto 1 \end{aligned}$$

und dies beweist die Behauptung. **q.e.d.**

(2.15) KOROLLAR. **(Funktorialität von Res_P^Y und \int_Y)**

Sei $Y' \subseteq Y$ ein weiteres 0-dimensionales Unterschema von V . Dann gilt:

(a) Für jeden Punkt $P \in Y$ hat man eine kanonische Inklusion $\omega_{Y',P} \hookrightarrow \omega_{Y,P}$, und diese macht das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \omega_{Y',P} & \hookrightarrow & \omega_{Y,P} \\ \text{Res}_P^{Y'} \searrow & & \swarrow \text{Res}_P^Y \\ & k & \end{array}$$

(b) Man hat ein kommutatives Diagramm kanonischer Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} H^0(Y', \omega_{Y'}) & \hookrightarrow & H^0(Y, \omega_Y) \\ \int_{Y'} \searrow & & \swarrow \int_Y \\ & k & \end{array}$$

BEWEIS:

“(a)” Wähle eine $\mathcal{O}_{V,P}$ -reguläre Folge $t = \{t_1, \dots, t_d\}$ in $\mathcal{J}_{Y,P}$. Dann folgt die Behauptung aus der kanonischen Inklusion

$$\begin{aligned} \omega_{Y',P} &= \left\{ \begin{bmatrix} w \\ t \end{bmatrix} \in H_P^d(\omega_V) : \mathcal{J}_{Y',P} \cdot w \subseteq (t) \cdot \omega_{V,P} \right\} \\ &\subseteq \left\{ \begin{bmatrix} w \\ t \end{bmatrix} \in H_P^d(\omega_V) : \mathcal{J}_{Y,P} \cdot w \subseteq (t) \cdot \omega_{V,P} \right\} \\ &= \omega_{Y,P} \end{aligned}$$

und Definition (2.9).

“(b)” Dies ergibt sich wieder durch Summation über die Punkte $P \in Y$. **q.e.d.**

§ 3 Der Residuensatz für Vektorbündel

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, einen Beweis des Residuensatzes für Vektorbündel vorzustellen, der auf den in [L1], S.105–108 skizzierten zurückgeht. Dieser Satz liefert eine wichtige Relation auf dem Modul $H^0(Y, \omega_Y)$ eines 0-dimensionalen Nullstellenschemas Y , die später geometrisch interpretiert werden wird. Die als Anwendung bewiesene teilweise Umkehrung dieses Residuensatzes stammt aus [GH2], I (b).

Weiterhin sei V eine d -dimensionale integrale projektive Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k , und Y ein 0-dimensionales Unterschema von V mit Idealgarbe $\mathcal{J}_Y \subseteq \mathcal{O}_V$.

(3.1) DEFINITION:

- (a) Y heißt ein 0-dimensionaler **lokal vollständiger Durchschnitt** auf V , wenn $\mathcal{J}_{Y,P}$ für jeden Punkt $P \in Y$ von einer $\mathcal{O}_{V,P}$ -regulären Folge erzeugt wird.
- (b) Y heißt ein 0-dimensionales **Nullstellenschema**, wenn es einen lokalfreien \mathcal{O}_V -Modul \mathcal{E} vom Rang d gibt und einen regulären Schnitt $s \in H^0(V, \mathcal{E})$, so daß Y das Nullstellenschema $Y = (s)_o$ von s ist. Mit anderen Worten sei die Idealgarbe \mathcal{J}_Y gegeben als das Bild der dualen Abbildung $s^\sim: \mathcal{E}^\sim \rightarrow \mathcal{O}_V$ und werde lokal von einer regulären Folge erzeugt.
- (c) Y heißt ein 0-dimensionaler (global) **vollständiger Durchschnitt** auf V , wenn es Hyperflächen $H_1, \dots, H_d \subseteq V$ in V gibt, d.h. rein 1-kodimensionale abgeschlossene Unterschemata, deren Idealgarbe lokal von einem Element erzeugt wird, so daß gilt:

$$\mathcal{J}_Y = \mathcal{J}_{H_1} + \dots + \mathcal{J}_{H_d}$$

(3.2) BEMERKUNG:

- (a) Es gibt genau dann einen 0-dimensionalen lokal vollständigen Durchschnitt Y' auf V mit $Y \subseteq Y'$, wenn alle Punkte von Y Cohen-Macaulay-Punkte auf V sind, d.h. wenn $\mathcal{O}_{V,P}$ für alle $P \in Y$ ein Cohen-Macaulay-Ring ist.
- (b) Jedes 0-dimensionale Nullstellenschema $Y \subseteq V$ ist ein 0-dimensionaler lokal vollständiger Durchschnitt auf V .
- (c) Jeder 0-dimensionale vollständige Durchschnitt auf V ist ein 0-dimensionales Nullstellenschema.
- (d) Ist $Y \subseteq V$ das 0-dimensionale Nullstellenschema eines globalen Schnitts eines lokalfreien \mathcal{O}_V -Moduls \mathcal{E} , der in eine direkte Summe invertierbarer \mathcal{O}_V -Moduln zerfällt, so ist Y ein 0-dimensionaler vollständiger Durchschnitt auf V .

BEWEIS:

- “(a)” Da $\mathcal{J}_{Y,P}$ für jedes $P \in Y$ primär zum maximalen Ideal $\mathfrak{m}_{V,P}$ von $\mathcal{O}_{V,P}$ ist, gibt es genau dann eine reguläre Folge der Länge d in $\mathcal{J}_{Y,P}$, wenn $\mathcal{O}_{V,P}$ ein Cohen-Macaulay-Ring ist.

“(b)” Dies gilt nach Definition.

“(c)” Sei $Y = H_1 \cap \cdots \cap H_d$ mit Hyperflächen $H_1, \dots, H_d \subseteq V$, sei $D_i \in \text{Div}(V)$ der zu H_i gehörige effektive Cartier-Divisor auf V , und sei $s_i \in H^0(V, \mathcal{O}_V(D_i))$ der globale Schnitt mit $(s_i)_o = H_i$ ($i = 1, \dots, d$). Dann ist Y das Nullstellenschema des globalen Schnitts $s := (s_1, \dots, s_d) \in H^0(V, \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_V(D_i))$, denn

$$\mathcal{J}_Y = \mathcal{J}_{H_1} + \cdots + \mathcal{J}_{H_d} = \text{im} \left(\bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_V(-D_i) \xrightarrow{\tilde{s}} \mathcal{O}_V \right).$$

“(d)” Schreibe $\mathcal{E} \cong \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_V(D_i)$ mit Cartier-Divisoren $D_i \in \text{Div}(V)$, und sei $s = (s_1, \dots, s_d)$ mit $s_i \in H^0(V, \mathcal{O}_V(D_i))$ ($i = 1, \dots, d$). Dann ist $s_i \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$, da Y 0-dimensional ist, und man kann folglich o.E. annehmen, daß $H_i := (s_i)_o$ zu einem effektiven Cartier-Divisor D_i assoziiert ist ($i = 1, \dots, d$). Infolgedessen gilt

$$\mathcal{J}_Y = \text{im} \left(\bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_V(-D_i) \rightarrow \mathcal{O}_V \right) = \mathcal{J}_{H_1} + \cdots + \mathcal{J}_{H_d}$$

das heißt Y ist der vollständige Durchschnitt von H_1, \dots, H_d .

q.e.d.

Im folgenden sei Y das 0-dimensionale Nullstellenschema eines Schnitts $s \in H^0(V, \mathcal{E})$ eines lokalfreien \mathcal{O}_V -Moduls \mathcal{E} vom Rang d . Für einen Punkt $P \in Y$ wählen wir eine $\mathcal{O}_{V,P}$ -Basis $\{e_1, \dots, e_d\}$ von \mathcal{E}_P und schreiben $s = \sum_{i=1}^d t_i \cdot e_i$. Dann bildet $t := \{t_1, \dots, t_d\}$ eine reguläre Folge in $\mathcal{O}_{V,P}$, denn es gilt $\mathcal{J}_{Y,P} = (t_1, \dots, t_d) \cdot \mathcal{O}_{V,P}$.

(3.3) BEMERKUNG:

Mit diesen Bezeichnungen ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_P: \omega_{V,P} \otimes \det \mathcal{E}_P \otimes \mathcal{O}_{Y,P} &\xrightarrow{\sim} \omega_{Y,P} \\ w \otimes e_1 \wedge \cdots \wedge e_d \otimes 1 &\longmapsto \begin{bmatrix} w \\ t_1, \dots, t_d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ein kanonischer Isomorphismus von $\mathcal{O}_{Y,P}$ -Moduln. Ist ε dann die Komposition von $\bigoplus_{P \in Y} \varphi_P$ mit dem kanonischen Epimorphismus $\omega_V \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \omega_V \otimes \det \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_Y$, so liefert der Koszulkomplex zu s eine exakte Sequenz von \mathcal{O}_V -Moduln

$$0 \rightarrow \omega_V \xrightarrow{id \otimes s} \omega_V \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{id \otimes \wedge s} \omega_V \otimes \wedge^2 \mathcal{E} \rightarrow \cdots \rightarrow \omega_V \otimes \det \mathcal{E} \xrightarrow{\varepsilon} \omega_Y \rightarrow 0.$$

BEWEIS:

Weil für alle $w' \in \mathcal{J}_{Y,P} \cdot \omega_{V,P}$ die Gleichung $\begin{bmatrix} w' \\ t_1, \dots, t_d \end{bmatrix} = 0$ gilt, ist die Abbildung φ_P wohldefiniert. Nach dem lokalen Dualitätssatz (2.1.b) gilt

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^i(\mathcal{O}_{Y,P}, \omega_{V,P}) = 0 \quad \text{für alle } i = 0, \dots, d-1.$$

Daher ist t sogar eine $\omega_{V,P}$ -reguläre Folge, und die Gleichheitsregel [K1], (4.16) liefert die Bijektivität von φ_P . Nach der Transformationsformel [K1], (4.14) hängt φ_P nicht von der Wahl der Basis $\{e_1, \dots, e_d\}$ ab. **q.e.d.**

Jetzt hat man für jeden Punkt $P \in Y$ eine lokale Kohomologieklassse

$$\xi_P = \begin{bmatrix} e_1^\vee \wedge \dots \wedge e_d^\vee \\ t_1, \dots, t_d \end{bmatrix}_P \in H_P^d(\det \mathcal{E}^\vee)$$

die nach der Transformationsformel nur von s abhängt, aber nicht von der Wahl der Basis $\{e_1, \dots, e_d\}$. Außerdem sei

$$[C]_Y \in \text{Ext}_{V \setminus Y}^{d-1}(\mathcal{O}_{V \setminus Y}, \det \mathcal{E}^\vee) \cong H^{d-1}(V \setminus Y, \det \mathcal{E}^\vee)$$

die durch den Koszulkomplex

$$C: 0 \rightarrow \bigwedge^d \mathcal{E}^\vee \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{O}_V \rightarrow 0$$

definierte Erweiterung, und $\delta: H^{d-1}(V \setminus Y, \det \mathcal{E}^\vee) \rightarrow H_Y^d(\det \mathcal{E}^\vee)$ sei der verbindende Homomorphismus der Lokal-Global-Sequenz zu $Y \subseteq V$.

(3.4) LEMMA.

Es gilt: $\delta([C]_Y) = (\xi_P)_{P \in Y} \in H_Y^d(\det \mathcal{E}^\vee)$

BEWEIS:

Für kohärente \mathcal{O}_V -Moduln \mathcal{F} hat man ein kommutatives Diagramm kanonischer Abbildungen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}_V(\mathcal{O}_Y, \mathcal{F}) & \rightarrow & \text{Hom}_V(\mathcal{O}_V, \mathcal{F}) & \rightarrow & \text{Hom}_V(\mathcal{J}_Y, \mathcal{F}) \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \text{Restr.} \\ 0 & \rightarrow & H_Y^0(\mathcal{F}) & \rightarrow & H^0(V, \mathcal{F}) & \rightarrow & \text{Hom}_{V \setminus Y}(\mathcal{O}_{V \setminus Y}, \mathcal{F}) \simeq H^0(V \setminus Y, \mathcal{F}) \end{array}$$

Bildet man das zugehörige Diagramm universeller δ -Funktoren, und wählt man $\mathcal{F} = \det \mathcal{E}^\vee$, so erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ext}_V^{d-1}(\mathcal{J}_Y, \det \mathcal{E}^\vee) & \xrightarrow{\delta'} & \text{Ext}_V^d(\mathcal{O}_Y, \det \mathcal{E}^\vee) & & \\ \downarrow i & & \downarrow j & & \\ H^{d-1}(V \setminus Y, \det \mathcal{E}^\vee) & \xrightarrow{\sim} & \text{Ext}_{V \setminus Y}^{d-1}(\mathcal{O}_{V \setminus Y}, \det \mathcal{E}^\vee) & \xrightarrow{\delta} & H_Y^d(\det \mathcal{E}^\vee) \end{array}$$

Hierbei ordnet i jeder Erweiterung $0 \rightarrow \det \mathcal{E}^\sim \rightarrow \mathcal{F}_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{J}_Y \rightarrow 0$ ihre Einschränkung auf $V \setminus Y$ zu, δ' ist der verbindende Homomorphismus der langen exakten Ext-Sequenz zu $0 \rightarrow \mathcal{J}_Y \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$, und j wird von dem zu

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_V(\mathcal{O}_Y, \det \mathcal{E}^\sim) &\cong \{(s_P)_{P \in Y} \in \bigoplus_{P \in Y} \det \mathcal{E}_{\check{P}} : \forall P \in Y : \mathcal{J}_{Y,P} \cdot s_P = 0\} \\ &\subseteq \{(s_P)_{P \in Y} \in \bigoplus_{P \in Y} \det \mathcal{E}_{\check{P}} : \forall P \in Y \exists n_P \in \mathbb{N} : \mathcal{J}_{Y,P}^{n_P} \cdot s_P = 0\} \\ &= H_Y^0(\det \mathcal{E}_{\check{P}}) \end{aligned}$$

gehörigen Homomorphismus universeller δ -Funktoen induziert. Offenbar ist $[C]_Y$ dann das Bild der Erweiterung

$$0 \rightarrow \det \mathcal{E}^\sim \rightarrow \bigwedge^{d-1} \mathcal{E}^\sim \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{E}^\sim \xrightarrow{s^\sim} \mathcal{J}_Y \rightarrow 0$$

unter i. Bedenkt man jetzt die Beschreibung von δ' mittels Erweiterungen, und betrachtet man den Isomorphismus $\mathrm{Ext}_V^d(\mathcal{O}_Y, \det \mathcal{E}^\sim) \cong \bigoplus_{P \in Y} \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^d(\mathcal{O}_{Y,P}, \det \mathcal{E}_{\check{P}})$, so genügt es also zu zeigen: Das Bild der Erweiterung

$$[C]_P : 0 \rightarrow \det \mathcal{E}_{\check{P}} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{E}_{\check{P}} \rightarrow \mathcal{O}_{V,P} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,P} \rightarrow 0$$

unter der Abbildung

$$j_P : \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^d(\mathcal{O}_{Y,P}, \det \mathcal{E}_{\check{P}}) \rightarrow H_P^d(\det \mathcal{E}_{\check{P}})$$

ist die Kohomologieklassse ξ_P .

Hierzu betrachte diese Erweiterung als lokalfreie $\mathcal{O}_{V,P}$ -Auflösung von $\mathcal{O}_{Y,P}$ und wende auf sie den Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{V,P}}(-, \det \mathcal{E}_{\check{P}})$ an. Dann wird $[C]_P$ definitionsgemäß repräsentiert durch $\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\det \mathcal{E}_{\check{P}}, \det \mathcal{E}_{\check{P}})$. Durch die Wahl der Basis $\{e_1, \dots, e_d\}$ werden Isomorphismen

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigwedge^d \mathcal{O}_{V,P}^d & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{O}_{V,P}^d & \xrightarrow{e_i \mapsto t_i} & \mathcal{O}_{V,P} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Y,P} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \wr & & & & \downarrow \wr & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \bigwedge^d \mathcal{E}_{\check{P}} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{E}_{\check{P}} & \xrightarrow{s^\sim} & \mathcal{O}_{V,P} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Y,P} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

induziert. Für jeden endlich erzeugten $\mathcal{O}_{V,P}$ -Modul \mathcal{F}_P ergibt dies einen in \mathcal{F}_P funktoriellen Isomorphismus von Komplexen

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{V,P}}([C]_P, \mathcal{F}_P) \xrightarrow{\sim} K^\cdot(t, \mathcal{F}_P)$$

Folglich repräsentiert die Abbildung $\mathcal{O}_{V,P} \rightarrow \det \mathcal{E}_{\check{P}} \quad (1 \mapsto e_{\check{1}} \wedge \cdots \wedge e_{\check{d}})$ das Bild von $[C]_P$ unter

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^d(\mathcal{O}_{Y,P}, \det \mathcal{E}_{\check{P}}) \simeq H^d(t, \det \mathcal{E}_{\check{P}}).$$

Letzteres wird bei der kanonischen Abbildung

$$H^d(t, \det \mathcal{E}_{\check{P}}) \rightarrow H_P^d(\det \mathcal{E}_{\check{P}})$$

nach Definition von ξ_P abgebildet auf ξ_P . Nun bildet der Koszulkomplex $K^\cdot(t, \mathcal{F}_P)$ einen exakten Funktor auf der Kategorie der endlich erzeugten $\mathcal{O}_{V,P}$ -Moduln \mathcal{F}_P . Daher ist $H^\cdot(t, \mathcal{F}_P)$ ein δ -Funktoren in \mathcal{F}_P , und Φ induziert einen Isomorphismus von δ -Funktoren

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Y,P}, \mathcal{F}_P) \xrightarrow{\sim} H^\cdot(t, \mathcal{F}_P).$$

Nach [G], (2.3) ist auch $H^\cdot(t, \mathcal{F}_P) \rightarrow H_P^\cdot(\mathcal{F}_P)$ ein Homomorphismus von δ -Funktoren, so daß wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Y,P}, \mathcal{F}_P) & \longrightarrow & H^\cdot(t, \mathcal{F}_P) \\ & \searrow & \swarrow \\ & H_P^\cdot(\mathcal{F}_P) & \end{array}$$

von δ -Funktoren erhalten. Wählen wir insbesondere $\mathcal{F}_P = \det \mathcal{E}_{\check{P}}$, so faktorisiert j_P also in der angegebenen Weise über $H^d(t, \det \mathcal{E}_{\check{P}})$, und die Behauptung $j_P([C]_P) = \xi_P$ folgt.

q.e.d.

(3.5) SATZ. **(Der Residuensatz für Vektorbündel)**

Sei $\alpha := H^o(V, \varepsilon): H^o(V, \omega_V \otimes \det \mathcal{E}) \rightarrow H^o(V, \omega_Y)$ die gemäß Bemerkung (3.3) konstruierte Abbildung. Dann gilt für alle $\psi \in H^o(V, \omega_V \otimes \det \mathcal{E})$:

$$\sum_{P \in Y} \mathrm{Res}_P^Y(\alpha(\psi)) = 0$$

BEWEIS: (Vgl. [L1], S.105–108)

Es genügt, eine k -lineare Abbildung $\beta: H^o(V, \omega_V \otimes \det \mathcal{E}) \rightarrow H^{d-1}(V \setminus Y, \omega_V)$ so zu konstruieren, daß das Diagramm

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} H^o(V, \omega_V \otimes \det \mathcal{E}) & \xrightarrow{\alpha} & H^o(V, \omega_Y) \\ \downarrow \beta & & \downarrow i \\ H^{d-1}(V \setminus Y, \omega_V) & \xrightarrow{\delta} & H_Y^d(\omega_V) \end{array}$$

kommutiert. Hierbei stammt die Abbildung $\tilde{\delta}$ aus der Lokal-Global-Sequenz zu $Y \subseteq V$. Gelingt dies nämlich, so liefert der Residuensatz (1.2)

$$\sum_{P \in Y} \text{Res}_P^Y(\alpha(\psi)) = \sum_{P \in Y} \text{Res}_P(i\alpha(\psi)) = \sum_{P \in Y} \text{Res}_P(\tilde{\delta}\beta(\psi)) = 0.$$

Zur Definition von β interpretiere den globalen Schnitt $\psi \in H^0(V, \omega_V \otimes \det \mathcal{E})$ als \mathcal{O}_V -Homomorphismus $\psi: \det \mathcal{E}^\vee \rightarrow \omega_V$ und setze

$$\beta(\psi) := H^{d-1}(V \setminus Y, \psi)([C]_Y).$$

Um zu beweisen, daß β die Behauptung erfüllt, setzen wir $w_P := \psi_P(e_1^\vee \wedge \cdots \wedge e_d^\vee) \in \omega_{V,P}$ für alle $P \in Y$. Dann folgt mit den Bezeichnungen von (3.4):

$$H_P^d(\psi)(\xi_P) = H_P^d(\psi) \left(\left[\begin{array}{c} e_1^\vee \wedge \cdots \wedge e_d^\vee \\ t_1, \dots, t_d \end{array} \right]_P \right) = \left[\begin{array}{c} w_P \\ t_1, \dots, t_d \end{array} \right]_P \in H_P^d(\omega_V)$$

Wegen der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H^{d-1}(V \setminus Y, \det \mathcal{E}^\vee) & \xrightarrow{\delta} & H_Y^d(\det \mathcal{E}^\vee) \\ H^{d-1}(V \setminus Y, \psi) \downarrow & & \downarrow H_Y^d(\psi) \\ H^{d-1}(V \setminus Y, \omega_V) & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & H_Y^d(\omega_V) \end{array}$$

ergibt sich alsdann:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}\beta(\psi) &= \tilde{\delta} \circ H^{d-1}(V \setminus Y, \psi)([C]_Y) = H_Y^d(\psi) \circ \delta([C]_Y) \\ &= H_Y^d(\psi) \left(\left(\left[\begin{array}{c} e_1^\vee \wedge \cdots \wedge e_d^\vee \\ t_1, \dots, t_d \end{array} \right]_P \right)_{P \in Y} \right) \quad (\text{nach Lemma (3.4)}) \\ &= \left(\left[\begin{array}{c} w_P \\ t_1, \dots, t_d \end{array} \right]_P \right)_{P \in Y} \end{aligned}$$

Offenbar identifiziert die kanonische Injektion $\omega_{V,P} \otimes \det \mathcal{E}_P \otimes \mathcal{O}_{Y,P} \xrightarrow{\varphi_P} \omega_{Y,P} \xrightarrow{i_P} H_P^d(\omega_V)$ das Bild von $\psi_P = w_P \otimes e_1 \wedge \cdots \wedge e_d \in \omega_{V,P} \otimes \det \mathcal{E}_P$ in $\omega_{V,P} \otimes \det \mathcal{E}_P \otimes \mathcal{O}_{Y,P}$ mit $\left[\begin{array}{c} w_P \\ t_1, \dots, t_d \end{array} \right]_P \in H_P^d(\omega_V)$. Also gilt auch $i\alpha(\psi) = \left(\left[\begin{array}{c} w_P \\ t_1, \dots, t_d \end{array} \right]_P \right)_{P \in Y} \in H_Y^d(\omega_V)$.

q.e.d.

(3.6) KOROLLAR.

Sei γ die Komposition $\gamma: H^0(V, \omega_Y) \xrightarrow{i} H_Y^d(\omega_V) \xrightarrow{\iota} H^d(V, \omega_V)$, wobei ι die kanonische Abbildung von der lokalen in die globale Kohomologie darstellt.

(a) Es gilt: $\gamma \circ \alpha = 0$

(b) **(Umkehrung des Residuensatzes)**

Ist die Sequenz $H^0(V, \omega_V \otimes \det \mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha} H^0(V, \omega_Y) \xrightarrow{\gamma} H^d(V, \omega_V)$ exakt, und ist $(w_P)_{P \in Y} \in H^0(V, \omega_Y)$ vorgegeben, so gilt: Genau dann ist $\sum_{P \in Y} \text{Res}_P^Y(w_P) = 0$, wenn es ein Element $\psi \in H^0(V, \omega_V \otimes \det \mathcal{E})$ gibt mit $\alpha(\psi) = (w_P)_{P \in Y}$.

BEWEIS:

“(a)” Nach den Residuensätzen (1.2) und (3.5) gilt für alle $\psi \in H^0(V, \omega_V \otimes \det \mathcal{E})$:

$$\int_V \circ \gamma \circ \alpha(\psi) = \left(\sum_{P \in Y} \text{Res}_P \right) \circ i \circ \alpha(\psi) = \left(\sum_{P \in Y} \text{Res}_P^Y \right) \circ \alpha(\psi) = 0$$

Nun folgt die Behauptung aus Korollar (2.5), wo bewiesen wurde, daß \int_V ein Isomorphismus ist.

“(b)” Aus $\sum_{P \in Y} \text{Res}_P^Y(w_P) = 0$ folgt $\sum_{P \in Y} \text{Res}_P(i_P(w_P)) = 0$ und wegen der Bijektivität von \int_V somit auch $\gamma((w_P)_{P \in Y}) = \iota \circ i((w_P)_{P \in Y}) = 0$. Auf Grund der vorausgesetzten Exaktheit ist also $(w_P)_{P \in Y} \in \text{im } \alpha$. **q.e.d.**

(3.7) BEMERKUNG:

(a) Ist $H^i(V, \omega_V \otimes \bigwedge^{d-i} \mathcal{E}) = 0$ für $i = 1, \dots, d-1$, so ist die Sequenz $H^0(V, \omega_V \otimes \det \mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha} H^0(V, \omega_Y) \xrightarrow{\gamma} H^d(V, \omega_V)$ exakt.

(b) Ist $\text{Char } k = 0$, ist V regulär, und ist $\mathcal{E} \cong \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_V(D_i)$ mit amplen effektiven Cartier-Divisoren $D_i \in \text{Div}(V)$, so gilt $H^i(V, \omega_V \otimes \bigwedge^j \mathcal{E}) = 0$ für alle $i, j > 0$.

BEWEIS:

“(a)” Wegen $\text{Res}_P^Y \neq 0$ für $P \in Y$ ist $\gamma \neq 0$ und also $\text{im } \alpha \subseteq \ker \gamma \subsetneq H^0(V, \omega_Y)$. Folglich ist nur $\dim_k \text{coker } \alpha \leq 1$ zu zeigen, um $\text{coker } \alpha \cong k \cong H^d(V, \omega_V)$ zu erhalten. Hierzu spaltet man den Koszulkomplex

$$0 \rightarrow \omega_V \rightarrow \omega_V \otimes \mathcal{E} \rightarrow \dots \rightarrow \omega_V \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow \omega_Y \rightarrow 0$$

in kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_1 & \longrightarrow & \omega_V \otimes \bigwedge^d \mathcal{E} & \longrightarrow & \omega_Y & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_2 & \longrightarrow & \omega_V \otimes \bigwedge^{d-1} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{K}_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \longrightarrow & \omega_V & \longrightarrow & \omega_V \otimes \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{K}_{d-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

auf und erhält nach Voraussetzung eine Kette von Injektionen

$$\operatorname{coker} \alpha \subseteq H^1(V, \mathcal{K}_1) \subseteq \dots \subseteq H^{d-1}(V, \mathcal{K}_{d-1}) \subseteq H^d(V, \omega_V).$$

Hieraus folgt die Behauptung.

“(b)” Nach dem Kodairaschen Verschwindungssatz ([GH1], S.154) ist $H^i(V, \mathcal{L}^{-1}) = 0$ für jedes ample $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}(V)$ und alle $i < d$. Also folgt für $i > 0$ und $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq d$ nach der vollständigen Dualität (2.4):

$$H^i(V, \omega_V \otimes \mathcal{O}_V(D_{n_1} + \dots + D_{n_r})) \cong H^{d-i}(V, \mathcal{O}_V(-D_{n_1} - \dots - D_{n_r}))^* = 0$$

Dies liefert das Gewünschte durch Bildung direkter Summen.

q.e.d.

§4 Die Cayley-Bacharach-Eigenschaft

Nachfolgend definieren und untersuchen wir die wichtigsten Eigenschaften, die ein 0-dimensionales Unterschema Y einer projektiven Varietät V in Bezug auf einen invertierbaren \mathcal{O}_V -Modul \mathcal{L} haben kann, z.B. seine Superabundanz, die Anzahl der unabhängigen Bedingungen, die Y an \mathcal{L} stellt, die Cayley-Bacharach-Eigenschaft und die strenge Cayley-Bacharach-Eigenschaft. Wir interpretieren diese geometrisch, charakterisieren die Cayley-Bacharach-Eigenschaft mit Hilfe von Spuren und studieren, was der Residuensatz für Vektorbündel in dieser Sprache ergibt. Abschließend stellen wir weitere allgemeine Sätze über die Superabundanz und die Cayley-Bacharach-Eigenschaft für spätere Anwendungen bereit.

Die Basis für diesen Abschnitt bilden die in [GH2], I (c) entwickelten Ideen. Die dortigen Ergebnisse werden auf der Grundlage von § 1–§ 3 bewiesen und verallgemeinert.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei V eine d -dimensionale integrale projektive k -Varietät, und sei $Y \subseteq V$ ein 0-dimensionales Unterschema mit Idealgarbe $\mathcal{J}_Y \subseteq \mathcal{O}_V$. Sei $\mathcal{L} \in \text{Pic}(V)$ ein invertierbarer \mathcal{O}_V -Modul, und α bezeichne die kanonische Abbildung $\alpha: H^0(V, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)$.

(4.1) DEFINITION:

Die Zahl $\omega(Y, \mathcal{L}) := h^0(\mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{L}) - h^0(\mathcal{L}) + \deg Y$ heißt die **Superabundanz** von Y bzgl. \mathcal{L} .

(4.2) REGELN:

(a) $\omega(Y, \mathcal{L}) = \dim_k \text{coker } \alpha = h^1(\mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{L}) - h^1(\mathcal{L})$

Insbesondere gilt stets $0 \leq \omega(Y, \mathcal{L}) \leq \deg Y$.

(b) Ist $Z \subseteq Y$ ein Unterschema mit $\deg Z = \deg Y - 1$, und ist i die kanonische Injektion $i: H^0(V, \mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{L}) \hookrightarrow H^0(V, \mathcal{J}_Z \cdot \mathcal{L})$, so gilt:

$$\omega(Z, \mathcal{L}) = \omega(Y, \mathcal{L}) + \begin{cases} -1 & \text{falls } i \text{ bijektiv ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) \mathcal{L} wird in einem abgeschlossenen Punkt $P \in V$ genau dann von globalen Schnitten erzeugt, wenn $\omega(P, \mathcal{L}) = 0$ ist.

BEWEIS:

“(a)” Die folgt sofort aus der Dimensionsbilanz der langen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(V, \mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{L}) \rightarrow H^0(V, \mathcal{L}) \xrightarrow{\alpha} H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y) \rightarrow H^1(V, \mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{L}) \rightarrow H^1(V, \mathcal{L}) \rightarrow 0$$

“(b)” Für jedes Unterschema $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ betrachte die beiden folgenden kommutativen Diagramme mit exakten Zeilen:

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(V, \mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{L}) & \longrightarrow & H^0(V, \mathcal{L}) & \xrightarrow{\alpha} & \text{im } \alpha \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i & & \parallel & & \downarrow \varepsilon' \\ 0 & \longrightarrow & H^0(V, \mathcal{J}_Z \cdot \mathcal{L}) & \longrightarrow & H^0(V, \mathcal{L}) & \xrightarrow{\alpha'} & \text{im } \alpha' \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} \alpha & \longrightarrow & H^o(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y) & \longrightarrow & \operatorname{coker} \alpha \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon'' \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} \alpha' & \longrightarrow & H^o(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Z) & \longrightarrow & \operatorname{coker} \alpha' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Nach dem Schlangenlemma für (1) ist $\ker \varepsilon' \cong \operatorname{coker} i$ und nach dem Schlangenlemma für (2) ist $\ker \varepsilon'' \cong \ker \varepsilon / \ker \varepsilon'$. Wegen $\ker \varepsilon \cong k$ folgt somit:

$$\begin{aligned} \omega(Y, \mathcal{L}) - \omega(Z, \mathcal{L}) &= \dim_k \operatorname{coker} \alpha - \dim_k \operatorname{coker} \alpha' \\ &= \dim_k \ker \varepsilon'' = 1 - \dim_k \ker \varepsilon' \\ &= 1 - \dim_k \operatorname{coker} i \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

“(c)” Nach Definition ist $\omega(P, \mathcal{L}) = 0$ genau dann, wenn die kanonische Abbildung

$$H^o(V, \mathcal{J}_P \cdot \mathcal{L}) \rightarrow H^o(V, \mathcal{L})$$

q.e.d.

(4.3) BEMERKUNG: **(Geometrische Interpretation der Superabundanz)**

Wir setzen zusätzlich voraus, daß \mathcal{L} in den Punkten von Y von globalen Schnitten erzeugt wird. Sei $r := h^o(\mathcal{L}) - 1$, und sei $\{s_0, \dots, s_r\}$ eine k -Basis von $H^o(V, \mathcal{L})$. Dann ist die rationale Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma: V &\longrightarrow \mathbb{P} \\ P &\longmapsto (s_0(P) : \dots : s_r(P)) \end{aligned}$$

insbesondere in den Punkten von Y definiert, wobei wir $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^r$ setzen. Für ein Unterschema $Z \subseteq Y$ sei $\{Z\}_\sigma$ der Durchschnitt aller Hyperebenen $H = (h)_o \subseteq \mathbb{P}$ mit $h \in H^o(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$, deren Schnitt mit $\sigma(V)$ die Punkte von $\sigma(Z)$ idealtheoretisch enthält, das heißt für die der mit σ zurückgezogene Schnitt $\sigma^*(h)$ in $H^o(V, \mathcal{J}_Z \cdot \mathcal{L})$ liegt. Dann gilt:

$$\dim\{Z\}_\sigma = r - h^o(\mathcal{J}_Z \cdot \mathcal{L}) = \deg Z - 1 - \omega(Z, \mathcal{L})$$

Die Superabundanz $\omega(Z, \mathcal{L})$ gibt für reduzierte Z also ein Maß dafür, wie weit die Punkte von $\sigma(Z)$ davon entfernt sind, einen linearen Raum maximaler Dimension aufzuspannen.

Lineare Unterräume $\{Z\}_\sigma \subseteq \mathbb{P}$ mit $\dim\{Z\}_\sigma \leq \deg Z - 2$ stellen anschaulich gewisse **multisekante Ebenenschnitte** von $\sigma(V)$ dar; besteht Z nur aus einem Punkt, so ist dieser eine Art **Wendepunkt** von $\sigma(V)$.

(4.4) DEFINITION:

- (a) Y stellt **unabhängige Bedingungen** an \mathcal{L} , wenn $\omega(Y, \mathcal{L}) = 0$ ist.
- (b) Y hat die **Cayley-Bacharach-Eigenschaft (CBE)** bzgl. \mathcal{L} , wenn für jedes Unterschema $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ und für jeden globalen Schnitt $s \in H^o(V, \mathcal{L})$ mit $Z \subseteq (s)_o$ gilt: $Y \subseteq (s)_o$.

(4.5) BEMERKUNG:

- (a) Y stellt genau dann unabhängige Bedingungen an \mathcal{L} , wenn \mathcal{L} in den Punkten von Y von globalen Schnitten erzeugt wird und $\dim\{Y\}_\sigma = \deg Y - 1$ gilt.

Letzteres bedeutet für reduzierte Y , daß die Punkte von $\sigma(Y)$ einen linearen Raum maximaler Dimension aufspannen.

- (b) Ist Y ein 0-dimensionales Unterschema des projektiven Raumes, und ist $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ mit $n \in \mathbb{Z}$, so sagt man statt “ Y hat die CBE bzgl. \mathcal{L} ” auch “ Y hat die CBE vom Grad n ” (vgl. [DM1], S.255). Der klassische Satz von Cayley-Bacharach lautet dann:

“Ist $Y \subseteq \mathbb{P}_k^d$ der 0-dimensionale vollständige Durchschnitt der Hyperflächen $H_1, \dots, H_d \subseteq \mathbb{P}_k^d$, so hat Y die CBE vom Grad $\sum_{i=1}^d \deg H_i - d - 1$.”

Eine Verallgemeinerung hiervon und verwandter Resultate (z.B. [GH1], S.677) wird gegen Ende dieses Abschnitts bewiesen werden.

- (c) **(Geometrische Interpretation der CBE)**

Ist \mathcal{L} sehr ampel und $\sigma: V \hookrightarrow \mathbb{P}$ eine wie in (4.3) konstruierte zugehörige Einbettung, so hat Y die CBE bzgl. \mathcal{L} genau dann, wenn $\sigma(Y)$ die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ hat. Verwendet man (4.2) und (4.3), so folgt, daß Y genau dann die CBE bzgl. \mathcal{L} hat, wenn für alle Unterschemata $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ gilt:

$$\dim\{Z\}_\sigma = \dim\{Y\}_\sigma$$

Für reduzierte Y bedeutet dies, daß jeder Punkt von $\sigma(Y)$ “überflüssig” ist in dem Sinne, daß die restlichen Punkte von $\sigma(Y)$ denselben linearen Raum aufspannen.

(4.6) BEMERKUNG:

- (a) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(1) Y hat die CBE bzgl. \mathcal{L} .

(2) Für jedes Unterschema $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ ist die kanonische Inklusion $i: H^0(V, \mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{L}) \hookrightarrow H^0(V, \mathcal{J}_Z \cdot \mathcal{L})$ bijektiv.

(3) Für jedes Unterschema $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ gilt:

$$\omega(Z, \mathcal{L}) = \omega(Y, \mathcal{L}) - 1$$

(4) Für jedes echte Unterschema $Z \subseteq Y$ gilt $\omega(Z, \mathcal{L}) < \omega(Y, \mathcal{L})$.

- (b) Hat Y die CBE bzgl. \mathcal{L} , so stellt Y keine unabhängigen Bedingungen an \mathcal{L} .

(c) Ist $H^0(V, \mathcal{L}) = 0$, so hat Y die CBE bzgl. \mathcal{L} .

(d) Ist $\omega(Y, \mathcal{L}) > 0$, so gibt es ein Unterschema $Z \subseteq Y$ mit $\omega(Z, \mathcal{L}) = \omega(Y, \mathcal{L})$, das die CBE bzgl. \mathcal{L} besitzt.

BEWEIS:

“(a)” Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus der Tatsache, daß die globalen Schnitte $s \in H^0(V, \mathcal{L})$ mit $Y \subseteq (s)_o$ bzw. $Z \subseteq (s)_o$ gerade die globalen Schnitte von $\mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{L}$ bzw. $\mathcal{J}_Z \cdot \mathcal{L}$ sind. Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus Bemerkung (4.2.b).

Für die Äquivalenz von (3) und (4) ist wegen (4.2.b) nur zu zeigen, daß jedes echte Unterschema $Z \subseteq Y$ in einem Unterschema $Z' \subseteq Y$ mit $\deg Z' = \deg Y - 1$ enthalten ist. Auf jeden Fall gibt es einen Punkt $P \in Y$, wo das Ideal von Z in $\mathcal{O}_{Y,P}$ nicht verschwindet. Dieses Ideal enthält dann ein Sockelelement s_P von $\mathcal{O}_{Y,P}$, und das durch das Bild von s_P in $H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \cong \prod_{P \in Y} \mathcal{O}_{Y,P}$ definierte affine Unterschema $Z' \subseteq Y$ erfüllt die Behauptung.

“(b)” Wegen (3) ist insbesondere $\omega(Y, \mathcal{L}) \geq 1$.

“(c)” Nach Voraussetzung ist (3) erfüllt:

$$\omega(Z, \mathcal{L}) = h^0(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Z) = h^0(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y) - 1 = \omega(Y, \mathcal{L}) - 1$$

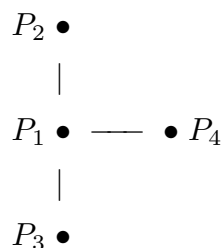
“(d)” Für jedes Unterschema $Z \subseteq Y$ sei I_Z das Ideal von Z in $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$. Da dieser Ring noethersch ist, enthält die Menge aller Ideale I_Z mit $Z \subseteq Y$ und $\omega(Z, \mathcal{L}) = \omega(Y, \mathcal{L})$ ein maximales Element. Das zugehörige Unterschema $Z \subseteq Y$ erfüllt dann $\omega(Z', \mathcal{L}) < \omega(Z, \mathcal{L})$ für alle echten Unterschemata $Z' \subseteq Z$, und nach (a) folgt, daß Z die CBE bzgl. \mathcal{L} hat. **q.e.d.**

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Umkehrung von Bemerkung (4.6.b) nicht gilt.

(4.7) BEISPIEL:

Sei $V = \mathbb{P}_k^3$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_V(1)$, und sei Y das reduzierte Unterschema $Y = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ von V mit $P_1 = (0 : 0 : 0 : 1)$, $P_2 = (0 : 1 : 0 : 1)$, $P_3 = (0 : -1 : 0 : 1)$ sowie $P_4 = (1 : 0 : 0 : 1)$.

Skizze:



Offenbar ist dann $h^0(\mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{L}) = 1 > h^0(\mathcal{L}) - \deg Y = 0$, das heißt Y stellt keine unabhängigen Bedingungen an \mathcal{L} . Aber für $Z = \{P_1, P_2, P_3\} \subseteq Y$ gilt $h^0(\mathcal{J}_Z \cdot \mathcal{L}) = 2$, das heißt Y hat nicht die CBE bzgl. \mathcal{L} .

(4.8) DEFINITION:

- (a) Y stellt **fast unabhängige Bedingungen** an \mathcal{L} , wenn $\omega(Y, \mathcal{L}) = 1$ ist, und für jedes Unterschema $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ gilt $\omega(Z, \mathcal{L}) = 0$.
- (b) Y hat die **strenge CBE** bzgl. \mathcal{L} , wenn Y die CBE bzgl. \mathcal{L} hat, aber kein Unterschema $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ hat die CBE bzgl. \mathcal{L} .

(4.9) BEMERKUNG:

- (a) Y stellt genau dann fast unabhängige Bedingungen an \mathcal{L} , wenn Y die CBE bzgl. \mathcal{L} hat und es gilt $\omega(Y, \mathcal{L}) = 1$.
- (b) Y hat genau dann die strenge CBE bzgl. \mathcal{L} , wenn für alle Unterschemata $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ gilt:
- (1) $\omega(Z, \mathcal{L}) = \omega(Y, \mathcal{L}) - 1$
 - (2) Es gibt ein Unterschema $Z' \subseteq Z$ mit $\deg Z' = \deg Z - 1$ und $\omega(Z', \mathcal{L}) = \omega(Z, \mathcal{L})$.
- (c) Stellt Y fast unabhängige Bedingungen an \mathcal{L} , so hat Y die strenge CBE bzgl. \mathcal{L} .

BEWEIS:

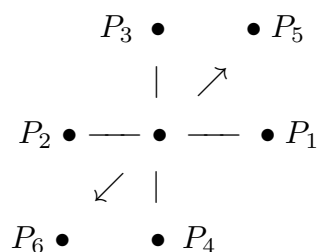
Dies folgt sofort aus den Definitionen und Bemerkung (4.6.a). **q.e.d.**

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Umkehrung von Bemerkung (4.9.c) nicht gilt.

(4.10) BEISPIEL:

Sei $V = \mathbb{P}_k^4$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_V(1)$, und sei Y das reduzierte Unterschema $Y = \{P_1, \dots, P_6\}$ von V mit $P_1 = (1 : 0 : 0 : 0 : 1)$, $P_2 = (-1 : 0 : 0 : 0 : 1)$, $P_3 = (0 : 1 : 0 : 0 : 1)$, $P_4 = (0 : -1 : 0 : 0 : 1)$, $P_5 = (0 : 0 : 1 : 0 : 1)$ sowie $P_6 = (0 : 0 : -1 : 0 : 1)$.

Skizze:



Dann ist $h^0(\mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{L}) = 0$ und $\omega(Y, \mathcal{L}) = 2$, das heißt Y stellt nicht fast unabhängige Bedingungen an \mathcal{L} . Andererseits sei $Z_i := Y \setminus \{P_i\}$ für $i = 1, \dots, 6$. Dann ist $h^0(\mathcal{J}_{Z_i}, \mathcal{L}) = 0$ und $\omega(Z_i, \mathcal{L}) = 1$ für alle i , das heißt Y hat die CBE bzgl. \mathcal{L} . Für $Z'_i := Z_i \setminus \{P_{i+\varepsilon}\}$, $\varepsilon := (-1)^{i+1}$ gilt aber $h^0(\mathcal{J}_{Z'_i}, \mathcal{L}) = 1$ und $\omega(Z'_i, \mathcal{L}) = 1$, das heißt Y hat sogar die strenge CBE bzgl. \mathcal{L} .

Im folgenden identifizieren wir $H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y) \cong \bigoplus_{P \in Y} \mathcal{L}_P \otimes \mathcal{O}_{Y,P}$. Für jeden Punkt $P \in Y$ bezeichnen wir das Bild des wie in Anhang A definierten Sockels $\mathfrak{S}(\mathcal{L}_P \otimes \mathcal{O}_{Y,P})$ in $H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)$ mit $\tilde{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}_P \otimes \mathcal{O}_{Y,P})$.

(4.11) BEMERKUNG:

Die Unterschemata $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ entsprechen eineindeutig den (über k) 1-dimensionalen Idealen von $H^0(V, \mathcal{O}_Y)$. Jedes dieser Ideale ist in einem der Sockel $\tilde{\mathfrak{S}}(\mathcal{O}_{Y,P})$ enthalten. Wegen $\mathcal{L}_P \cong \mathcal{O}_{V,P}$ entsprechen die Unterschemata $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ folglich eineindeutig den 1-dimensionalen $H^0(V, \mathcal{O}_Y)$ -Untermoduln der Sockeln $\tilde{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}_P \otimes \mathcal{O}_{Y,P})$, $P \in Y$.

(4.12) LEMMA.

Y hat genau dann die CBE bzgl. \mathcal{L} , wenn für alle $P \in Y$ gilt:

$$\text{im } \alpha \cap \tilde{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}_P \otimes \mathcal{O}_{Y,P}) = 0$$

BEWEIS:

Für ein Unterschema $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ betrachte das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(V, \mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{L}) & \longrightarrow & H^0(V, \mathcal{L}) & \xrightarrow{\alpha} & H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y) \\ & & \downarrow i_Z & & \parallel & & \downarrow \varepsilon_Z \\ 0 & \longrightarrow & H^0(V, \mathcal{J}_Z \cdot \mathcal{L}) & \longrightarrow & H^0(V, \mathcal{L}) & \xrightarrow{\alpha'} & H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Z) \end{array}$$

Nach dem Schlangenlemma gilt $\text{coker } i_Z \cong \text{im } \alpha \cap \ker \varepsilon_Z$, und nach den Bemerkungen (4.6.a) und (4.11) folgt hieraus die Behauptung. **q.e.d.**

(4.13) KOROLLAR.

Stellt Y fast unabhängige Bedingungen an \mathcal{L} , so ist Y ein Gorensteinschema. (Letzteres bedeutet, daß die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{Y,P}$ für alle $P \in Y$ Gorensteinringe sind.)

BEWEIS:

Wäre $\dim_k \tilde{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}_P \otimes \mathcal{O}_{Y,P}) = \dim_k \mathfrak{S}(\mathcal{O}_{Y,P}) \geq 2$ für ein $P \in Y$, so wäre nach dem Lemma $\omega(Y, \mathcal{L}) = \text{codim im } \alpha \geq 2$, weil Y gemäß Bemerkung (4.9) die CBE bzgl. \mathcal{L} besitzt. Dies widerspräche aber der Bedingung $\omega(Y, \mathcal{L}) = 1$. **q.e.d.**

(4.14) SATZ.

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- (a) Y ist ein Gorensteinschema und hat die CBE bzgl. \mathcal{L} .
- (b) Es gibt es eine Spur $\sigma: H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y) \rightarrow k$ auf dem $H^0(V, \mathcal{O}_Y)$ -Modul $H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)$ mit $\text{im } \alpha \subseteq \ker \sigma$. (Zum Begriff einer Spur vergleiche Definition (A1).)

BEWEIS:

“(a) \implies (b)” Nach dem Lemma hat $\tilde{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}_P \otimes \mathcal{O}_{Y,P})$ für alle $P \in Y$ ein 1-dimensionales Bild im Restklassenvektorraum $H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)/\text{im } \alpha$. Da k unendlich viele Elemente hat, gibt es einen 1-kodimensionalen Untervektorraum $\overline{W} \subseteq H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)/\text{im } \alpha$, der keines dieser Bilder trifft. Das Urbild W von \overline{W} in $H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)$ ist folglich ebenfalls 1-kodimensional und erfüllt $W \cap \tilde{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}_P \otimes \mathcal{O}_{Y,P}) = 0$ für alle $P \in Y$. Nach Satz (A5) ist damit die Projektion längs W auf ein beliebig gewähltes Komplement von W in $H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)$ eine Spur σ auf $H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)$. Nach Konstruktion gilt $\text{im } \alpha \subseteq \ker \sigma$.

“(b) \implies (a)” Wegen $H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y) \cong H^0(V, \mathcal{O}_Y)$ gibt es auch eine Spur auf $H^0(V, \mathcal{O}_Y)$. Daher ist $H^0(V, \mathcal{O}_Y) \cong \prod_{P \in Y} \mathcal{O}_{Y,P}$ ein Gorensteinring (vgl. Satz (A4)), das heißt Y

ist ein Gorensteinschema. Nach Satz (A5) ist $\sigma(\tilde{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}_P \otimes \mathcal{O}_{Y,P})) \neq 0$ für alle $P \in Y$. Wegen $\text{im } \alpha \subseteq \ker \sigma$ muß somit $\text{im } \alpha \cap \tilde{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}_P \otimes \mathcal{O}_{Y,P}) = 0$ sein für alle $P \in Y$, und die Behauptung folgt aus dem Lemma. **q.e.d.**

(4.15) SATZ.

Sei V ein Gorensteinschema, \mathcal{E} ein lokalfreier \mathcal{O}_V -Modul vom Rang d , und sei $Y \subseteq V$ das 0-dimensionale Nullstellenschema eines globalen Schnitts von \mathcal{E} . Dann hat Y die CBE bzgl. $\omega_V \otimes \det \mathcal{E}$.

BEWEIS:

Die Abbildung $\alpha: H^0(V, \omega_V \otimes \det \mathcal{E}) \rightarrow H^0(V, \omega_V \otimes \det \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_Y)$ identifiziert sich gemäß Bemerkung (3.3) mit der kanonischen Abbildung $\alpha: H^0(V, \omega_V \otimes \det \mathcal{E}) \rightarrow H^0(V, \omega_Y)$ aus Satz (3.5). Nach Korollar (2.14) ist die Abbildung $\int_Y = \sum_{P \in Y} \text{Res}_P^Y: H^0(V, \omega_Y) \rightarrow k$ eine Spur auf dem $H^0(V, \mathcal{O}_Y)$ -Modul $H^0(V, \omega_Y)$. Der Residuensatz für Vektorbündel (3.5) besagt, daß diese Spur auf dem Bild von α verschwindet. Damit folgt die Behauptung aus Satz (4.14). **q.e.d.**

(4.16) KOROLLAR.

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(a) Es gilt die Umkehrung des Residuensatzes:

Für $(w_P)_{P \in Y} \in H^0(V, \omega_Y)$ ist $\sum_{P \in Y} \text{Res}_P(w_P) = 0$ genau dann, wenn $(w_P)_{P \in Y} \in \text{im } \alpha$ ist.

(b) Y stellt fast unabhängige Bedingungen an $\omega_V \otimes \det \mathcal{E}$.

(c) $\omega(Y, \omega_V \otimes \det \mathcal{E}) = 1$

BEWEIS:

Wegen der Surjektivität der Abbildung $\gamma: H^0(V, \omega_Y) \rightarrow H^d(V, \omega_V)$ aus Korollar (3.6) und nach diesem Korollar gilt die Umkehrung des Residuensatzes genau dann, wenn die Sequenz

$$H^0(V, \omega_V \otimes \det \mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha} H^0(V, \omega_Y) \xrightarrow{\gamma} H^d(V, \omega_V) \rightarrow 0$$

exakt ist. Wegen $\int_Y = \int_V \circ \gamma$ (vgl. (1.2) und (2.12)) ist $\gamma \neq 0$ und nach (3.6) ist $\gamma \circ \alpha = 0$. Daher ist die Exaktheit dieser Sequenz äquivalent damit, daß gilt:

$$\omega(Y, \omega_V \otimes \det \mathcal{E}) = \dim_k \text{coker } \alpha = h^d(\omega_V) = 1$$

Nach Bemerkung (4.9.a) ist letzteres äquivalent damit, daß Y fast unabhängige Bedingungen an $\omega_V \otimes \det \mathcal{E}$ stellt. **q.e.d.**

(4.17) KOROLLAR.

Sei $Y = H_1 \cap \cdots \cap H_d \subseteq V$ der 0-dimensionale vollständige Durchschnitt der Hyperflächen $H_1, \dots, H_d \subseteq V$ auf V . Sei $D_i \in \text{Div}(V)$ der zu H_i gehörige effektive Cartier-Divisor auf V ($i = 1, \dots, d$). Dann hat Y die CBE bzgl. $\omega_V(D_1 + \cdots + D_d)$.

Im Fall $V = \mathbb{P}_k^d$ ergibt sich hieraus und aus $\omega_{\mathbb{P}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d-1)$, daß Y die CBE vom Grad $\sum_{i=1}^d \deg D_i - d - 1$ besitzt, also der klassische Satz von Cayley-Bacharach.

BEWEIS:

Spezialisiere den Satz auf den Fall $\mathcal{E} \cong \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_V(D_i)$. **q.e.d.**

(4.18) SATZ.

Seien $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \text{Pic}(V)$ mit $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$. Ist Y ein Gorensteinschema, das die CBE bzgl. \mathcal{L} besitzt, so gilt:

$$\omega(Y, \mathcal{L}_1) + \omega(Y, \mathcal{L}_2) \geq \deg Y$$

BEWEIS:

Bette $H^0(V, \mathcal{L}_1)$ und $H^0(V, \mathcal{L}_2)$ in den Körper der rationalen Funktionen auf V ein. Dann induziert die Multiplikation einen $H^0(V, \mathcal{O}_Y)$ -Isomorphismus

$$\mu: H^0(V, \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{O}_Y) \otimes_{H^0(V, \mathcal{O}_Y)} H^0(V, \mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{O}_Y) \rightarrow H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y).$$

Bezeichnen $\alpha_i: H^0(V, \mathcal{L}_i) \rightarrow H^0(V, \mathcal{L}_i \otimes \mathcal{O}_Y)$ die kanonischen Abbildungen ($i = 1, 2$), so ist hierbei $\mu(\text{im } \alpha_1 \otimes \text{im } \alpha_2) \subseteq \text{im } \alpha$. Nach (4.14) gibt es eine Spur $\sigma: H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y) \rightarrow k$ mit $\text{im } \alpha \subseteq \ker \sigma$. Für $i = 1, 2$ wähle $H^0(V, \mathcal{O}_Y)$ -Basen l_i von $H^0(V, \mathcal{L}_i \otimes \mathcal{O}_Y)$ und erhalte eine $H^0(V, \mathcal{O}_Y)$ -Basis $l := \mu(l_1 \otimes l_2)$ von $H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)$. Sei $r := \dim_k(\text{im } \alpha_1)$ und $s := \dim_k(\text{im } \alpha_2)$. Wähle k -linear unabhängige Elemente $a_1, \dots, a_r \in H^0(V, \mathcal{O}_Y)$ (bzw. $b_1, \dots, b_s \in H^0(V, \mathcal{O}_Y)$), so daß $\{a_1 \cdot l_1, \dots, a_r \cdot l_1\}$ (bzw. $\{b_1 \cdot l_2, \dots, b_s \cdot l_2\}$) eine k -Basis von $\text{im } \alpha_1$ (bzw. $\text{im } \alpha_2$) darstellt.

Jetzt erfüllt der k -Untervektorraum $W := \langle b_1 \cdot l, \dots, b_s \cdot l \rangle$ von $H^0(V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)$ wegen

$$(a_i \sigma)(b_j l) = \sigma(a_i b_j l) = \sigma(\mu(a_i l_1 \otimes b_j l_2)) \in \sigma(\mu(\text{im } \alpha_1 \otimes \text{im } \alpha_2)) \subseteq \sigma(\text{im } \alpha) = 0$$

($i = 1, \dots, r$ und $j = 1, \dots, s$) mindestens die r linear unabhängigen Relationen $(a_i \sigma)(W) = 0$. Mithin muß $s \leq \deg Y - r$ sein, also

$$\omega(Y, \mathcal{L}_1) + \omega(Y, \mathcal{L}_2) = 2 \deg Y - r - s \geq \deg Y.$$

q.e.d.

(4.19) SATZ.

Sei V eine Gorensteinvarietät der Dimension $d \geq 2$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) Y ist ein Gorensteinschema und hat die CBE bzgl. $\omega_V \otimes \mathcal{L}$.
- (b) Es gibt ein Element $e \in \text{Ext}_V^{d-1}(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee)$, dessen Bild $e_P \in \text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^{d-1}(\mathcal{J}_{Y,P}, \mathcal{L}_P^\vee)$ für jeden Punkt $P \in Y$ eine $\mathcal{O}_{Y,P}$ -Basis ist.

BEWEIS:

Nach (4.14) ist (a) äquivalent damit, daß es eine Spur $\sigma: H^o(V, \omega_V \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y) \rightarrow k$ gibt mit $\text{im } \alpha \subseteq \ker \sigma$, wobei α die Abbildung $\alpha: H^o(V, \omega_V \otimes \mathcal{L}) \rightarrow H^o(V, \omega_V \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)$ bezeichnet. Verwendet man nun die vollständige Dualität (2.4) sowie [K1], (11.9), so ergibt sich ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ext}_V^d(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^\vee) & \xrightarrow{\sim} & \text{Ext}_V^d(\omega_V \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y, \omega_V) & \xrightarrow{\sim} & H^o(Y, \omega_V \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)^* \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \text{kan.} & & \downarrow \alpha^* \\ H^d(V, \mathcal{L}^\vee) & \xrightarrow{\sim} & \text{Ext}_V^d(\omega_V \otimes \mathcal{L}, \omega_V) & \xrightarrow{\sim} & H^o(V, \omega_V \otimes \mathcal{L})^* \end{array}$$

Hierin ist φ die Komposition $\varphi: \text{Ext}_V^d(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^\vee) \xrightarrow{\text{kan.}} \text{Ext}_V^d(\mathcal{O}_V, \mathcal{L}^\vee) \simeq H^d(V, \mathcal{L}^\vee)$.

Folglich gibt es eine $H^o(V, \mathcal{O}_Y)$ -Basis \tilde{e} von $\text{Ext}_V^d(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^\vee)$ mit $\varphi(\tilde{e}) = 0$ genau dann, wenn es eine $H^o(V, \mathcal{O}_Y)$ -Basis σ von $H^o(Y, \omega_V \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y)^*$ gibt mit $\alpha^*(\sigma) = 0$, d.h. wenn (a) erfüllt ist.

Betrachte jetzt das von der langen exakten Ext-Sequenz zu $0 \rightarrow \mathcal{J}_Y \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$ und den Eckenmorphisimen der Spektralsequenz $H^p(V, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^q(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \implies \text{Ext}_V^n(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ induzierte kommutative Diagramm mit exakter Zeile:

$$\begin{array}{ccccc} H^{d-1}(V, \mathcal{L}^\vee) & \longrightarrow & \text{Ext}_V^{d-1}(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}_V^d(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^\vee) & \xrightarrow{\varphi} & H^d(V, \mathcal{L}^\vee) \\ & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \\ (*) & & H^o(V, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^{d-1}(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee)) & & H^o(V, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^d(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^\vee)) & & \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\ & & \bigoplus_{P \in Y} \text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^{d-1}(\mathcal{J}_{Y,P}, \mathcal{L}_P^\vee) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{P \in Y} \text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^d(\mathcal{O}_{Y,P}, \mathcal{L}_P^\vee) & & \end{array}$$

Die Abbildung δ ist dabei wegen $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^i(\mathcal{O}_{V,P}, \mathcal{L}_P^\vee) = 0$ für $i > 0$ ein Isomorphismus ($d \geq 2$). Wie man sieht, gibt es eine $H^o(V, \mathcal{O}_Y)$ -Basis \tilde{e} von $\text{Ext}_V^d(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^\vee)$ mit $\varphi(\tilde{e}) = 0$ genau dann, wenn (b) erfüllt ist. **q.e.d.**

(4.20) KOROLLAR.

Gilt zusätzlich zu (4.19.a) noch $h^1(\mathcal{J}_Y \cdot (\omega_V \otimes \mathcal{L})) = 1$, so ist das Element $e \in \text{Ext}_V^{d-1}(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee)$ aus (4.19.b) bis auf einen skalaren Faktor eindeutig.

BEWEIS:

Auf Grund der CBE von Y bzgl. $\omega_V \otimes \mathcal{L}$ gilt

$$\omega(Y, \omega_V \otimes \mathcal{L}) = h^1(\mathcal{J}_Y \cdot (\omega_V \otimes \mathcal{L})) - h^1(\omega_V \otimes \mathcal{L}) \geq 1,$$

woraus $h^1(\omega_V \otimes \mathcal{L}) = 0$ und $\omega(Y, \omega_V \otimes \mathcal{L}) = 1$ folgt. Die Spur $\sigma: H^0(V, \omega_V \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y) \rightarrow k$ ist also durch die Bedingung im $\alpha \subseteq \ker \sigma$ bis auf einen skalaren Faktor eindeutig festgelegt. Nun gilt nach dem Serreschen Dualitätssatz:

$$H^{d-1}(V, \mathcal{L}^\vee) \cong H^{d-1}(V, \omega_V \otimes \mathcal{L}) = 0$$

Deshalb ist mit $\tilde{e} \in \text{Ext}_V^d(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^\vee)$ auch das Element $e \in \text{Ext}_V^{d-1}(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee)$ bis auf einen skalaren Faktor eindeutig, wie man an Hand von Diagramm (*) erkennt. **q.e.d.**

(4.21) BEMERKUNG:

Gilt $H^0(V, \omega_V \otimes \mathcal{L}) = 0$, und ist Y ein Gorensteinschema, so treffen die Bedingungen des Satzes zu, denn nach Bemerkung (4.6.c) hat Y die CBE bzgl. $\omega_V \otimes \mathcal{L}$.

§ 5 Punkte auf Kurven

Jetzt wollen wir die in § 4 erzielten Ergebnisse auf den Fall von Gorensteinkurven anwenden. Insbesondere erhalten wir eine Herleitung des Satzes von Riemann-Roch für Gorensteinkurven. Die gemäß Bemerkung (4.3) gewonnene geometrische Interpretation dieses Satzes stimmt für spezielle Divisoren auf regulären Kurven mit der klassischen überein. Schließlich geben wir noch eine Cayley-Bacharach-Charakterisierung global erzeugter invertierbarer Moduln auf Gorensteinkurven, die in § 10 angewandt werden wird.

Sei V eine integrale projektive Gorensteinkurve vom geometrischen Geschlecht $g = h^0(\omega_V)$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Sei $D \in \text{Div}(V)$ ein Cartier-Divisor, und sei K ein kanonischer Divisor auf V , das heißt $\mathcal{O}_V(K) \cong \omega_V$. Was die Begriffe lineares System, kanonischer Morphismus u.s.w. in dieser Situation betrifft, so verweisen wir auf [Ha2], § 1. Die Ideen zu den Resultaten dieses Abschnitts stammen aus [GH2], I (d).

(5.1) BEMERKUNG:

(a) Das geometrische Geschlecht von V stimmt mit dem **arithmetischen Geschlecht**

$$p_a(V) := 1 - \chi(\mathcal{O}_V) = h^1(\mathcal{O}_V)$$

überein.

(b) Bezeichnet \bar{V} die Normalisierung von V und

$$\delta(V) := \sum_{P \in \text{Sing } V} \dim_k \overline{\mathcal{O}_{V,P}} / \mathcal{O}_{V,P}$$

den **Singularitätsgrad** von V , so gilt:

$$p_a(V) = p_a(\bar{V}) + \delta(V)$$

BEWEIS:

“(a)” Dies folgt aus (2.2), wenn man $\mathcal{F} = \mathcal{O}_V$ wählt.

“(b)” Vgl. [K1], (11.19).

q.e.d.

(5.2) BEMERKUNG:

Genau dann ist $\mathcal{O}_V(D)$ sehr ampel, wenn $\omega(Y, \mathcal{O}_V(D)) = 0$ ist für alle 0-dimensionalen Unterschemata $Y \subseteq V$ mit $\deg Y = 2$.

BEWEIS:

Letztere Bedingung ist wegen der Exaktheit der kanonischen Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(V, \mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{O}_V(D)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(D)) \xrightarrow{\alpha} H^0(V, \mathcal{O}_V(D) \otimes \mathcal{O}_Y) \rightarrow \text{coker } \alpha \rightarrow 0$$

äquivalent mit $h^0(\mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{O}_V(D)) = h^0(\mathcal{O}_V(D)) - 2$ für alle 0-dimensionalen Unterschemata $Y \subseteq V$ mit $\deg Y = 2$. Mittels [Ha2], (1.5) folgt hieraus die Behauptung. **q.e.d.**

(5.3) LEMMA.

Sei $D \in \text{Div}(V)$ ein effektiver Cartier-Divisor, und sei Y das zu D assoziierte abgeschlossene Unterschema von V . Dann gilt:

- (a) Y ist das Nullstellenschema eines globalen Schnitts von $\mathcal{O}_V(D)$.
Insbesondere ist Y also ein lokal vollständiger Durchschnitt auf V .
- (b) Y stellt fast unabhängige Bedingungen an $\mathcal{O}_V(K + D)$.
Insbesondere hat Y also die CBE bzgl. $\mathcal{O}_V(K + D)$.
- (c) $h^0(\mathcal{O}_V(K + D)) = \deg D + g - 1$ und $h^1(\mathcal{O}_V(K + D)) = 0$.

BEWEIS:

“(a)” Dies ist klar.

“(b)” Nach (a) und Satz (4.15) hat Y die CBE bzgl. $\mathcal{O}_V(K + D)$. Mittels Regel (4.2.a) und Korollar (2.5) folgt:

$$\omega(Y, \mathcal{O}_V(K + D)) = h^1(\mathcal{O}_V(K)) - h^1(\mathcal{O}_V(K + D)) = 1 - h^1(\mathcal{O}_V(K + D))$$

Nach Bemerkung (4.6.b) ist $\omega(Y, \mathcal{O}_V(K + D)) > 0$. Also ist $h^1(\mathcal{O}_V(K + D)) = 0$ und $\omega(Y, \mathcal{O}_V(K + D)) = 1$. Damit ergibt sich (b) aus Bemerkung (4.9.a).

“(c)” Die Dimensionsbilanz der langen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(K)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(K + D)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(K + D) \otimes \mathcal{O}_Y) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(V, \mathcal{O}_V(K)) \rightarrow 0$$

zeigt nun $h^0(\mathcal{O}_V(K + D)) = g + \deg Y - 1 = \deg D + g - 1$.

q.e.d.

(5.4) SATZ. **(Der Satz von Riemann-Roch)**

Für jeden Cartier-Divisor $D \in \text{Div}(V)$ gilt:

$$h^0(\mathcal{O}_V(D)) - h^0(\mathcal{O}_V(K - D)) = \deg D + 1 - g$$

BEWEIS:

Schreibe $D = D_+ - D_-$ mit effektiven Cartier-Divisoren $D_+, D_- \in \text{Div}(V)$. Sei Y das zu D_+ assoziierte abgeschlossene Unterschema von V . Aus der langen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(K - D)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(K + D_-)) \xrightarrow{\alpha} H^0(V, \mathcal{O}_V(K + D_-) \otimes \mathcal{O}_Y) \rightarrow \\ \rightarrow \text{coker } \alpha \rightarrow 0$$

erhalten wir $\omega(Y, \mathcal{O}_V(K + D_-)) = h^0(\mathcal{O}_V(K - D)) - h^0(\mathcal{O}_V(K + D_-)) + \deg D_+$, und hieraus mittels des Lemmas:

$$(1) \quad \omega(Y, \mathcal{O}_V(K + D_-)) = h^0(\mathcal{O}_V(K - D)) + \deg D - g + 1$$

Aus der langen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(V, \mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{O}_V(D)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(D)) \xrightarrow{\alpha'} H^0(V, \mathcal{O}_V(D) \otimes \mathcal{O}_Y) \rightarrow \text{coker } \alpha' \rightarrow 0$$

erhalten wir wegen $H^0(V, \mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{O}_V(D)) = H^0(V, \mathcal{O}_V(-D_-)) = 0$ weiter die Gleichung

$$(2) \quad \omega(Y, \mathcal{O}_V(D)) = -h^0(\mathcal{O}_V(D)) + \deg D_+$$

Da Y nach dem Lemma ein Gorensteinschema ist, das die CBE bzgl. $\mathcal{O}_V(K + D_+)$ hat, können wir nun Satz (4.18) mit $\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_V(K + D_-)$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{O}_V(D)$ und $\mathcal{L} = \mathcal{O}_V(K + D_+)$ anwenden und aus (1) und (2) folgern:

$$(3) \quad \omega(Y, \mathcal{L}_1) + \omega(Y, \mathcal{L}_2) - \deg D_+ = h^0(\mathcal{O}_V(K - D)) - h^0(\mathcal{O}_V(D)) + \deg D - g + 1 \geq 0$$

Weil D beliebig war, gilt diese Ungleichung auch für $D' = K - D$, was

$$(4) \quad h^0(\mathcal{O}_V(D)) - h^0(\mathcal{O}_V(K - D)) + \deg K - \deg D - g + 1 \geq 0$$

ergibt. Aus (3) folgt $h^0(\mathcal{O}_V(D)) - h^0(\mathcal{O}_V(K - D)) \leq \deg D + 1 - g$, und aus (4) folgt $h^0(\mathcal{O}_V(D)) - h^0(\mathcal{O}_V(K - D)) \geq \deg D - \deg K + g - 1$. Also bleibt zum Beweis des Satzes nur noch $\deg K = 2g - 2$ zu zeigen.

Für $g = 0$ liefert der Vergleich des Geschlechts von V mit dem seiner Normalisierung (vgl. Bemerkung (5.1.b)), daß V regulär und somit isomorph zu \mathbb{P}_k^1 ist. Also gilt wie behauptet:

$$\deg K = \deg \omega_V = \deg \mathcal{O}_V(-2) = -2$$

Für $g \geq 1$ ist K effektiv und man hat eine lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(K)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(K) \otimes \mathcal{O}_Z) \rightarrow H^1(V, \mathcal{O}_V) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(V, \mathcal{O}_V(K)) \rightarrow 0$$

wobei Z das zu K assoziierte 0-dimensionale Unterschema von V bezeichnet. Nun gilt neben $h^0(\mathcal{O}_V) = 1$ und $h^0(\mathcal{O}_V(K)) = g$ auch $h^1(\mathcal{O}_V(K)) = 1$ (vgl. (2.5)) und $h^1(\mathcal{O}_V) = g$ (vgl. (5.1.a)). Daher folgt die gesuchte Beziehung $\deg K = 2g - 2$ aus der Dimensionsbilanz obiger Sequenz. **q.e.d.**

(5.5) KOROLLAR. **(Geometrischer Riemann-Roch)**

Sei $D \in \text{Div}(V)$ ein effektiver Cartier-Divisor, und sei Y das zu D assoziierte abgeschlossene Unterschema von V . Dann gilt:

- (a) $\omega(Y, \mathcal{O}_V(K)) = h^0(\mathcal{O}_V(D)) - 1$
- (b) Gilt $g \geq 2$, so ist der wie in (4.3) zu ω_V konstruierte kanonische Morphismus $\kappa: V \rightarrow \mathbb{P}_k^{g-1}$ wohldefiniert, und es gilt:

$$\{Y\}_\kappa = \deg D - h^0(\mathcal{O}_V(D))$$

Für reguläre Kurven V kann man dies auch so ausdrücken:

Variiert der Divisor $D = P_1 + \dots + P_d$ ($P_i \neq P_j$ für $i \neq j$) in einem linearen System der Dimension n , so spannen die kanonischen Bilder $\kappa(P_1), \dots, \kappa(P_d)$ einen \mathbb{P}_k^{d-n-1} in \mathbb{P}_k^{g-1} auf.

- (c) Ist zusätzlich D nichtspeziell (d.h. $h^0(\mathcal{O}_V(K - D)) = 0$), so ist $\{Y\}_\kappa = g - 1$.

Für reguläre V und reduzierte Y bedeutet dies, daß die kanonischen Bilder der Punkte von Y den ganzen \mathbb{P}_k^{g-1} aufspannen.

BEWEIS:

“(a)” Die lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(V, \mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{O}_V(K)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(K)) \xrightarrow{\alpha} H^0(V, \mathcal{O}_V(K) \otimes \mathcal{O}_Y) \rightarrow \text{coker } \alpha \rightarrow 0$$

liefert die Dimensionsbilanz $h^0(\mathcal{O}_V(K - D)) - g + \deg D = \omega(Y, \mathcal{O}_V(K))$, woraufhin der Satz die Behauptung zeigt.

“(b)” Die Wohldefiniertheit von κ folgt aus [Ha2], (1.6). Wir verwenden die Sprechweisen und Ergebnisse von Bemerkung (4.3) und erhalten nach (a):

$$\{Y\}_\kappa = \deg Y - 1 - \omega(Y, \mathcal{O}_V(K)) = \deg D - h^0(\mathcal{O}_V(D))$$

“(c)” Aus $0 = h^0(\mathcal{O}_V(K - D)) = h^0(\mathcal{O}_V(D)) - \deg D + g - 1$ folgt $\{Y\}_\kappa = g - 1$. **q.e.d.**

(5.6) KOROLLAR.

Sei $D \in \text{Div}(V)$ ein effektiver Cartier-Divisor, und sei Y das zu D assoziierte abgeschlossene Unterschema von V . Dann gilt:

(a) $\omega(Y, \mathcal{O}_V(D)) = \deg D - h^0(\mathcal{O}_V(D)) + 1$

(b) $\omega(Y, \mathcal{O}_V(D)) = 0$ genau dann, wenn $g = 0$ oder $D = 0$ ist.

(c) Die rationalen Kurven sind die einzigen Gorensteinkurven in \mathbb{P}_k^n , die keine multisekanten Hyperebenenschnitte besitzen.

BEWEIS:

“(a)” Dies folgt aus der Dimensionsbilanz der langen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(V, \mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{O}_V(D)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(D)) \xrightarrow{\alpha} H^0(V, \mathcal{O}_V(D) \otimes \mathcal{O}_Y) \rightarrow \text{coker } \alpha \rightarrow 0.$$

“(b)” Ist $g \neq 0$ und $D \neq 0$, so gilt für jeden Punkt $P \in Y$ nach [Ha2], (1.6.a) und (4.2.c) die Gleichung $\omega(P, \mathcal{O}_V(K)) = 0$. Mittels (5.5.a) und (4.2.b) schließt man hieraus

$$h^0(\mathcal{O}_V(D)) - 1 = \omega(Y, \mathcal{O}_V(K)) < \deg Y = \deg D.$$

“(c)” Sei $D \in \text{Div}(V)$ der sehr ample effektive Divisor, der die Einbettung $\sigma: V \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$ ($n = h^0(\mathcal{O}_V(D)) - 1$) vermittelt. Dann folgt für $g \neq 0$ gemäß (b):

$$\{Y\}_\sigma = \deg Y - 1 - \omega(Y, \mathcal{O}_V(D)) \leq \deg Y - 2$$

Daher ist das zu D assoziierte abgeschlossene Unterschema $Y \subseteq V$ der Schnitt einer multisekanten Hyperebene mit V .

Andererseits erfüllen im Fall $g = 0$ alle Hyperebenenschnitte $Y \subseteq V$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \omega(Y, \mathcal{O}_V(D)) &= h^0(\mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{O}_V(D)) - h^0(\mathcal{O}_V(D)) + \deg Y \\ &= \max\{0, \deg D - \deg Y + 1\} - (\deg D + 1) + \deg Y \end{aligned}$$

Es folgt: $\{Y\}_\sigma = \deg Y - 1 - \omega(Y, \mathcal{O}_V(D)) = \min\{\deg D, \deg Y - 1\} = \min\{n, \deg Y - 1\}$.

Also besitzen rationale Kurven keine multisekanten Hyperebenenschnitte. **q.e.d.**

Schließlich charakterisieren wir noch die invertierbaren \mathcal{O}_V -Moduln, die von globalen Schnitten erzeugt werden, durch eine Cayley-Bacharach Eigenschaft eines ihrer Nullstelschemata.

(5.7) SATZ. **(Die Cayley-Bacharach-Charakterisierung global erzeugter invertierbarer Moduln auf Gorensteinkurven)**

Sei $D \in \text{Div}(V)$ ein effektiver Cartier-Divisor, und sei Y das zu D assoziierte abgeschlossene Unterschema von V , das durch den globalen Schnitt $u \in H^0(V, \mathcal{O}_V(D))$ definiert werde. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) Es gibt einen weiteren globalen Schnitt $v \in H^0(V, \mathcal{O}_V(D))$, dessen Nullstellenschema $(v)_o$ mit Y keinen Punkt gemeinsam hat.
- (b) Es gibt einen weiteren globalen Schnitt $v \in H^0(V, \mathcal{O}_V(D))$, so daß u und v die Garbe $\mathcal{O}_V(D)$ in jedem Punkt erzeugen.
- (c) Die Garbe $\mathcal{O}_V(D)$ wird von zwei globalen Schnitten erzeugt.
- (d) Die Garbe $\mathcal{O}_V(D)$ wird von globalen Schnitten erzeugt.
- (e) Für alle Punkte $P \in V$ ist $\omega(P, \mathcal{O}_V(D)) = 0$.
- (f) Für alle Punkte $P \in V$ ist $h^0 \mathcal{O}_V(D - P) = h^0 \mathcal{O}_V(D) - 1$.
- (g) Für alle Unterschemata $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ ist $\omega(Z, \omega_V) = \omega(Y, \omega_V) - 1$.
- (h) Y hat die CBE bzgl. ω_V .

BEWEIS:

“(a) \iff (b) \implies (c) \implies (d)” Dies ist klar.

“(d) \implies (e)” Vgl. Regel (4.2.c).

“(e) \implies (f)” Für jeden Punkt $P \in V$ ist nach Definition $\omega(P, \mathcal{O}_V(D)) = 0$ äquivalent damit, daß die kanonische Abbildung

$$H^0(V, \mathcal{O}_V(D - P)) \simeq H^0(V, \mathcal{J}_P \cdot \mathcal{O}_V(D)) \xrightarrow{i} H^0(V, \mathcal{O}_V(D))$$

nicht surjektiv ist. Wegen $\text{coker } i \subseteq H^0(P, \mathcal{O}_V(D) \otimes \mathcal{O}_P) \cong k$ bedeutet dies $h^0 \mathcal{O}_V(D - P) = h^0 \mathcal{O}_V(D) - 1$.

“(f) \implies (g)” Sei $P \in Y$ der eindeutig bestimmte Punkt, an dem sich Z von Y unterscheidet, d.h. an dem $\mathcal{J}_{Y,P} \subsetneq \mathcal{J}_{Z,P}$ gilt. Sei D' der zu Z assoziierte Cartier-Divisor auf V . Dann ist $D' \sim D - P$, und nach (5.5.a) folgt:

$$\begin{aligned} \omega(Z, \omega_V) &= h^0 \mathcal{O}_V(D') - 1 = h^0 \mathcal{O}_V(D - P) - 1 \\ &= h^0 \mathcal{O}_V(D) - 2 = \omega(Y, \mathcal{O}_V) - 1 \end{aligned}$$

“(g) \implies (h)” Vgl. Regel (4.2.b).

“(h) \implies (b)” Wenn wir die lange exakte Kohomologiesequenz zu der kanonischen exakten Sequenz

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_V \xrightarrow{u} \mathcal{O}_V(D) \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_V(D) \otimes \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

bilden, erhalten wir durch Anwendung der Dualitätssätze (2.4.c) und (2.13) das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(V, \mathcal{O}_V) & \xrightarrow{H^0 u} & H^0(V, \mathcal{O}_V(D)) & \xrightarrow{H^0 \beta} & H^0(Y, \mathcal{O}_V(D) \otimes \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{\partial_1} \\
(2) & & \wr_1 \downarrow \wr & & \wr_2 \downarrow \wr & & \wr_3 \downarrow \wr & \\
0 & \longrightarrow & H^1(V, \omega_V)^* & \xrightarrow{\varphi_1} & H^1(V, \omega_V(-D))^* & \xrightarrow{\varphi_2} & H^0(Y, \mathcal{O}_V(-D) \otimes \omega_Y)^* & \xrightarrow{\varphi_3} \\
& & & & \xrightarrow{\partial_1} & H^1(V, \mathcal{O}_V) & \xrightarrow{H^1 u} & H^1(V, \mathcal{O}_V(D)) & \longrightarrow 0 \\
& & & & & \wr_4 \downarrow \wr & & \wr_5 \downarrow \wr & \\
& & & & \xrightarrow{\varphi_3} & H^0(V, \omega_V)^* & \xrightarrow{\varphi_4} & H^0(V, \omega_V(-D))^* & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Andererseits liefert Tensorieren der Sequenz (1) mit $\omega_V(-D)$ die exakte Sequenz

$$(3) \quad 0 \rightarrow \omega_V(-D) \xrightarrow{\tilde{u}} \omega_V \xrightarrow{\alpha} \omega_V \otimes \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

wobei α der kanonische Epimorphismus ist. Das k -Dual der langen exakten Kohomologiesequenz zu (3) lautet:

$$\begin{array}{ccccccc}
(4) & 0 \rightarrow & H^1(V, \omega_V)^* & \xrightarrow{(H^1 \tilde{u})^*} & H^1(V, \omega_V(-D))^* & \xrightarrow{\partial_2^*} & H^0(Y, \omega_V \otimes \mathcal{O}_Y)^* \rightarrow \\
& & & & \xrightarrow{(H^0 \alpha)^*} & H^0(V, \omega_V)^* & \xrightarrow{(H^0 \tilde{u})^*} & H^0(V, \omega_V(-D))^* \rightarrow 0
\end{array}$$

Wir behaupten nun $\varphi_1 = (H^1 \tilde{u})^*$ und $\varphi_4 = (H^0 \tilde{u})^*$. Aus der expliziten Beschreibung des globalen Dualitätssatzes in § 2 folgt, daß der Schnitt $1 \in H^0(V, \mathcal{O}_V)$ bei $\wr_2 \circ (H^0 u)$ folgendermaßen abgebildet wird:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(V, \mathcal{O}_V) & \xrightarrow{H^0 u} & H^0(V, \mathcal{O}_V(D)) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\omega_V(-D), \omega_V) & \xrightarrow{\sim} & H^1(V, \omega_V(-D))^* \\
1 & \longmapsto & u & \longmapsto & \tilde{u} & \longmapsto & \int_V \circ (H^1 \tilde{u})
\end{array}$$

Ebenso ist $\wr_1(1) = \int_V$. Da \int_V eine k -Basis von $H^1(V, \omega_V)^*$ darstellt, zeigt $\varphi_1(\int_V) = \int_V \circ (H^1 \tilde{u})$ nun die Behauptung $\varphi_1 = (H^1 \tilde{u})^*$. Die Behauptung $\varphi_4 = (H^0 \tilde{u})^*$ folgt analog.

Somit unterscheidet sich die untere Zeile des Diagramms (2) nur um einen Isomorphismus $\psi: H^0(Y, \mathcal{O}_V(-D) \otimes \omega_Y)^* \xrightarrow{\sim} H^0(Y, \omega_V \otimes \mathcal{O}_Y)^*$ von der Sequenz (4), und wir erhalten ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
H^0(Y, \mathcal{O}_V(D) \otimes \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{\partial_1} & H^1(V, \mathcal{O}_V) \\
\wr_3 \downarrow \wr & & \wr_4 \downarrow \wr \\
(5) \quad H^0(Y, \mathcal{O}_V(-D) \otimes \omega_Y)^* & \xrightarrow{\varphi_3} & H^0(V, \omega_V)^* \\
\psi \downarrow \wr & & \parallel \\
H^0(Y, \omega_V \otimes \mathcal{O}_Y)^* & \xrightarrow{(H^0 \alpha)^*} & H^0(V, \omega_V)^*
\end{array}$$

Wegen $Y = (u)_o$ ist Y ein Gorensteinschema (vgl. (3.2.b)). Nach der Voraussetzung und Satz (4.14) gibt es daher eine Spur σ auf dem $H^o(Y, \mathcal{O}_Y)$ -Modul $H^o(Y, \omega_V \otimes \mathcal{O}_Y)$, die auf dem Bild der kanonischen Abbildung $H^o\alpha: H^o(V, \omega_V) \rightarrow H^o(Y, \omega_V \otimes \mathcal{O}_Y)$ verschwindet, d.h. die im Kern von $(H^o\alpha)^*$ liegt. Mittels Diagramm (5) folgt hieraus, daß es einen Schnitt $\bar{v} \in H^o(Y, \mathcal{O}_V(D) \otimes \mathcal{O}_Y)$ gibt, der eine $H^o(Y, \mathcal{O}_Y)$ -Basis von $H^o(Y, \mathcal{O}_V(D) \otimes \mathcal{O}_Y)$ darstellt und im Kern von ∂_1 liegt. Also ist \bar{v} das Bild eines Schnitts $v \in H^o(V, \mathcal{O}_V(D))$ unter $H^o\beta$, und v erzeugt die Garbe $\mathcal{O}_V(D)$ in den Punkten von Y . Mithin erzeugen u und v die Garbe $\mathcal{O}_V(D)$ in allen Punkten von V . **q.e.d.**

§ 6 Punkte auf Flächen

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, den Satz (4.15) für Gorensteinflächen V teilweise umzukehren und so zu einer Cayley-Bacharach-Charakterisierung 0-dimensionaler Nullstellschemata zu gelangen. In Spezialfällen wurde dies schon in [GH2], (1.33) und [Bru], (1.8) erreicht.

Dazu bedienen wir uns der in [T], § 1 eingeführten Technik der Cayley-Bacharach-Reduktion eines 0-dimensionalen Schemas. Genauer zeigen wir, daß es zu jedem 0-dimensionalen Unterschema $Y \subseteq V$ mit $\omega(Y, \mathcal{L} \otimes \omega_V) \neq 0$ für ein $\mathcal{L} \in \text{Pic}(V)$ und mit $\text{pd}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Y,P}) < \infty$ für alle $P \in Y$ ein Unterschema $Z \subseteq Y$ gibt, so daß Z das Nullstellschema eines regulären globalen Schnitts eines Rang-2-Vektorbündels \mathcal{E} auf V mit $\det \mathcal{E} \cong \mathcal{L}$ ist.

Ist Y hierbei ein Gorensteinschema, das die CBE bzgl. $\mathcal{L} \otimes \omega_V$ besitzt, so kann man $Z = Y$ wählen. Insbesondere folgt, daß jedes 0-dimensionale Gorensteinschema $Y \subseteq V$ mit $\text{pd}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Y,P}) < \infty$ für alle $P \in Y$ als Nullstellschema auf V realisierbar ist.

Sei V eine integrale projektive Gorensteinfläche über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Sei $Y \subseteq V$ ein 0-dimensionales Unterschema mit Idealgarbe $\mathcal{J}_Y \subseteq \mathcal{O}_V$, und sei $\mathcal{L} \in \text{Pic}(V)$ ein invertierbarer \mathcal{O}_V -Modul.

(6.1) SATZ.

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- (a) $\omega(Y, \mathcal{L} \otimes \omega_V) \neq 0$
- (b) *Es gibt eine Erweiterung $0 \rightarrow \mathcal{L}^\vee \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}_Y \rightarrow 0$ mit einem torsionsfreien kohärenten \mathcal{O}_V -Modul \mathcal{F} und einen Punkt $P \in Y$, so daß die lokalisierte Erweiterung $0 \rightarrow \mathcal{L}_P^\vee \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{J}_{Y,P} \rightarrow 0$ nicht aufspaltet.*

BEWEIS:

Nach Bemerkung (4.2.a) ist (a) äquivalent damit, daß die kanonische Injektion $H^1(V, \mathcal{L} \otimes \omega_V)^* \hookrightarrow H^1(V, \mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{L} \otimes \omega_V)^*$ nicht surjektiv ist. Die vollständige Dualität (2.4) und die Rechenregel [K1], (11.9) liefern

$$H^1(V, \mathcal{L} \otimes \omega_V)^* \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{L} \otimes \omega_V, \omega_V) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{O}_V, \mathcal{L}^\vee)$$

und $H^1(V, \mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{L} \otimes \omega_V)^* \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{L} \otimes \omega_V, \omega_V) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee),$

so daß (a) äquivalent ist mit der Nicht-Surjektivität der kanonischen Abbildung $\alpha: \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{O}_V, \mathcal{L}^\vee) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee)$. Betrachtet man die lange exakte Ext-Sequenz

$$0 = \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^\vee) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{O}_V, \mathcal{L}^\vee) \xrightarrow{\alpha} \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee) \xrightarrow{\beta} \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^\vee) \rightarrow \dots$$

so bedeutet dies, daß es ein $e \in \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee)$ gibt mit $\beta(e) \neq 0$. Verwendet man weiter die Eckenmorphisimen der Spektralsequenz $H^p(V, \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^q(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \implies \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^n(\mathcal{F}, \mathcal{G}),$

so hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^\vee) \\
\downarrow & & \downarrow \wr \\
H^0(V, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee)) & & H^0(V, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^\vee)) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
\bigoplus_{P \in Y} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{V,P}}^1(\mathcal{J}_{Y,P}, \mathcal{L}_{\check{P}}^\vee) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{P \in Y} \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^2(\mathcal{O}_{V,P}, \mathcal{L}_{\check{P}}^\vee)
\end{array}$$

und die Bedingung $\beta(e) \neq 0$ ist äquivalent mit $(e_P)_{P \in Y} \neq 0$.

Insgesamt ist (a) also äquivalent damit, daß es ein Element $e \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee)$ gibt mit $(e_P)_{P \in Y} \neq 0$. Sei $0 \rightarrow \mathcal{L}^\vee \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}_Y \rightarrow 0$ eine Erweiterung mit einem kohärenten \mathcal{O}_V -Modul \mathcal{F} , die e repräsentiert. Weil \mathcal{L}^\vee und \mathcal{J}_Y torsionsfrei sind, ist dies auch \mathcal{F} . Für $P \in Y$ repräsentiert die lokalisierte Erweiterung $0 \rightarrow \mathcal{L}_{\check{P}}^\vee \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{J}_{Y,P} \rightarrow 0$ das Element $e_P \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^1(\mathcal{J}_{Y,P}, \mathcal{L}_{\check{P}}^\vee)$ und zerfällt genau dann, wenn $e_P = 0$ ist. Hieraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

(6.2) SATZ.

Sei $\omega(Y, \mathcal{L} \otimes \omega_V) \neq 0$, und sei

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{L}^\vee \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}_Y \rightarrow 0$$

hierzu gemäß (6.1) gewählt. Dann gibt es genau ein Unterschema $Z \subseteq Y$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist und exakte Zeilen hat:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{J}_Y & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & \downarrow \text{kan.} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{F}^{\vee\vee} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0
\end{array}$$

Das Unterschema Z heißt die **Cayley-Bacharach-Reduktion** von Y bzgl. (*).

BEWEIS:

Wie dualisieren die Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{L}^\vee \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}_Y \rightarrow 0$ und erhalten eine lange exakte Sequenz

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{J}_Y^\vee \rightarrow \mathcal{F}^\vee \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{O}_V) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_V) \rightarrow 0.$$

Wie durch Dualisieren der kanonischen Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{J}_Y \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$ folgt, ist hierbei $\mathcal{J}_Y^\vee \cong \mathcal{O}_V$. Außerdem gilt:

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{O}_V) \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_V) \cong \omega_Y \otimes \omega_{\check{V}}$$

Setze $\mathcal{C} := \text{coker}(\mathcal{F}^\sim \rightarrow \mathcal{L})$ und $\mathcal{D} := \text{coker}(\mathcal{J}_Y^\sim \rightarrow \mathcal{F}^\sim)$, und spalte (1) auf in drei kurze exakte Sequenzen:

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{F}^\sim \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow 0$$

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

$$(4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_V) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_V) \rightarrow 0$$

Wir dualisieren (2) noch einmal und erhalten die exakte Sequenz

$$(5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{D}^\sim \rightarrow \mathcal{F}^{\sim\sim} \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{D}, \mathcal{O}_V) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{F}^\sim, \mathcal{O}_V) \rightarrow 0.$$

Da V integer ist, zeigt [K2], (E3), daß \mathcal{F}^\sim ein reflexiver \mathcal{O}_V -Modul ist. Hieraus folgt Tiefe $(\mathcal{F}_P^\sim) \geq 2$ für alle $P \in V$ (vgl. [EG], (3.6)). Aus dem lokalen Dualitätssatz (2.1) und der kohomologischen Charakterisierung der Tiefe ergibt sich dann

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^1(\mathcal{F}_P^\sim, \mathcal{O}_{V,P}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^1(\mathcal{F}_P^\sim, \omega_{V,P}) \cong H_P^1(\mathcal{F}_P^\sim) = 0$$

für alle $P \in V$, also $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{F}^\sim, \mathcal{O}_V) = 0$.

Aus der langen exakten Ext-Sequenz zu (3) folgt $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{D}, \mathcal{O}_V) \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{C}, \mathcal{O}_V)$, und durch Dualisieren von (3) ergibt sich die exakte Sequenz

$$(6) \quad 0 \rightarrow \mathcal{C}^\sim \rightarrow \mathcal{L}^\sim \rightarrow \mathcal{D}^\sim \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_V) \rightarrow 0.$$

Aus (4) folgt $\text{Supp } \mathcal{C} \subseteq Y$, und somit $\mathcal{C}^\sim = 0$ und $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_V) = 0$. Also entartet (6) zu einem Isomorphismus $\mathcal{L}^\sim \cong \mathcal{D}^\sim$, und (5) lautet

$$(7) \quad 0 \rightarrow \mathcal{L}^\sim \rightarrow \mathcal{F}^{\sim\sim} \rightarrow \mathcal{O}_V \xrightarrow{\delta} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{C}, \mathcal{O}_V) \rightarrow 0.$$

Die lange exakte Ext-Sequenz zu (4) liefert einen Epimorphismus

$$(8) \quad \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_V), \mathcal{O}_V) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{C}, \mathcal{O}_V) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^3(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_V), \mathcal{O}_V) = 0.$$

Hierin ist $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_V), \mathcal{O}_V) \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^2(\omega_Y, \omega_V) \cong \mathcal{O}_Y$, da der Träger dieser Garben in Y enthalten ist, und da die lokalen Dualitätssätze auf V (vgl. (2.1)) und Y (vgl. (2.11)) für alle $P \in Y$ Isomorphismen

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^2(\omega_{Y,P}, \omega_{V,P}) \cong H_P^0(\omega_{Y,P})^* \cong \omega_{Y,P}^* \cong \mathcal{O}_{Y,P}$$

ergeben. Infolgedessen gibt es nach (8) ein Unterschema $Z \subseteq Y$ mit $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{C}, \mathcal{O}_V) \cong \mathcal{O}_Z$. Indem man δ ggf. durch einen Automorphismus von \mathcal{O}_Z abändert, kann man annehmen, daß die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^\sim \rightarrow \mathcal{F}^{\sim\sim} \rightarrow \mathcal{O}_V \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$$

exakt ist, wobei $\varepsilon: \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_Z$ den kanonischen Epimorphismus bezeichnet. Wegen der Funktorialität der kanonischen Abbildung ins Bidual kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{J}_Y & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & \downarrow \text{kan.} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{F}^{\vee\vee} & \longrightarrow & \mathcal{O}_V & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0
\end{array}$$

und die Behauptung des Satzes folgt. **q.e.d.**

(6.3) KOROLLAR. (Eigenschaften der Cayley-Bacharach-Reduktion)

In der Situation des Satzes gilt:

- (a) Ist Y ein Gorensteinschema, das die CBE bzgl. $\mathcal{L} \otimes \omega_V$ besitzt, und repräsentiert (*) das gemäß (4.19) zugehörige Element $e \in \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee)$, so ist $Z = Y$.
- (b) Gilt $\text{pd}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Z,P}) < \infty$ für alle $P \in Z$, so ist Z das Nullstellenschema eines lokalfreien \mathcal{O}_V -Moduls \mathcal{E} vom Rang zwei mit $\det \mathcal{E} \cong \mathcal{L}$.
Insbesondere ist Z dann ein 0-dimensionaler lokal vollständiger Durchschnitt auf V , der die CBE bzgl. $\mathcal{L} \otimes \omega_V$ besitzt.
- (c) Ist $\omega(Y, \mathcal{L} \otimes \omega_V) = 1$ und $\text{pd}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Z,P}) < \infty$ für alle $P \in Z$, so stellt Z fast unabhängige Bedingungen an $\mathcal{L} \otimes \omega_V$.
- (d) Gilt $h^1(\mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{L} \otimes \omega_V) = 1$ und $\text{pd}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Z,P}) < \infty$ für alle $P \in Z$, so ist Z das einzige Unterschema von Y , das ein Gorensteinschema ist und die CBE bzgl. $\mathcal{L} \otimes \omega_V$ besitzt.

BEWEIS:

“(a)” Wir tensorieren die Sequenz (1) aus dem Beweis des Satzes mit \mathcal{L}^\vee und erhalten wegen $\mathcal{J}_Y^\vee \cong \mathcal{O}_V$ (vgl. den Beweis von (6.2)) eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^\vee \rightarrow \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{L}^\vee \rightarrow \mathcal{O}_V \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee) \rightarrow 0.$$

Nach Satz (4.19) erzeugt das Tupel der Lokalisationen

$$(e_P)_{P \in Y} \in \bigoplus_{P \in Y} \text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^1(\mathcal{J}_{Y,P}, \mathcal{L}_P^\vee) \cong H^0(V, \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee))$$

von e den \mathcal{O}_V -Modul $\text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee)$. Da nach Konstruktion $\partial(1) = (e_P)_{P \in Y}$ ist, folgt somit $\text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee) = 0$, und also nach dem lokalen Dualitätssatz (2.1.b) für alle abgeschlossenen Punkte $P \in V$

$$H_P^1(\mathcal{F}_P) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^1(\mathcal{F}_P, \omega_{V,P})^* \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^1(\mathcal{F}_P, \mathcal{L}_P^\vee)^* = 0.$$

Weil \mathcal{F} torsionsfrei ist (vgl. (6.1)), gilt für alle $P \in V$ auch $H_P^0(\mathcal{F}_P) = 0$, so daß die kohomologische Charakterisierung der Tiefe zeigt, daß $\text{Tiefe}(\mathcal{F}_P) \geq 2$ ist. Nach

[EG], (3.6) ist \mathcal{F} damit ein reflexiver \mathcal{O}_V -Modul, und die Behauptung folgt aus dem Satz.

“(b)” Aus der Reflexivität des \mathcal{O}_V -Moduls \mathcal{F}^{\sim} folgt Tiefe $(\mathcal{F}_P^{\sim}) \geq 2$ für alle abgeschlossenen Punkte $P \in V$ (vgl. [EG], (3.6)). Für $P \notin Z$ liefert die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_P^{\sim} \rightarrow \mathcal{F}_P^{\sim} \rightarrow \mathcal{O}_{V,P} \rightarrow 0$$

wegen $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,P}}^1(\mathcal{O}_{V,P}, \mathcal{L}_P^{\sim}) = 0$, daß \mathcal{F}_P^{\sim} ein freier $\mathcal{O}_{V,P}$ -Modul vom Rang zwei ist. Für $P \in Z$ liefern die exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_P^{\sim} \rightarrow \mathcal{F}_P^{\sim} \rightarrow \mathcal{J}_{Z,P} \rightarrow 0$$

und

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_{Z,P} \rightarrow \mathcal{O}_{V,P} \rightarrow \mathcal{O}_{Z,P} \rightarrow 0,$$

daß mit $\mathcal{O}_{Z,P}$ auch die $\mathcal{O}_{V,P}$ -Moduln $\mathcal{J}_{Z,P}$ und \mathcal{F}_P^{\sim} eine endliche projektive Dimension besitzen. Wegen Tiefe $(\mathcal{F}_P^{\sim}) \geq 2$ zeigt die Formel von Auslander-Buchsbaum (vgl. [K3], VII (1.12)), daß \mathcal{F}_P^{\sim} ein freier $\mathcal{O}_{V,P}$ -Modul ist. Sei $\mathcal{E} := \mathcal{F}^{\sim}$. Wegen der Reflexivität von \mathcal{F}^{\sim} ist \mathcal{E} ein lokalfreier \mathcal{O}_V -Modul vom Rang zwei, und aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^{\sim} \rightarrow \mathcal{E}^{\sim} \rightarrow \mathcal{J}_Z \rightarrow 0$$

folgt, daß Z das Nullstellenschema eines globalen Schnitts $s \in H^0(V, \mathcal{E})$ ist. Insbesondere ist s regulär, also der Koszulkomplex

$$0 \rightarrow \det \mathcal{E}^{\sim} \xrightarrow{\wedge^s} \mathcal{E}^{\sim} \xrightarrow{s} \mathcal{J}_Z \rightarrow 0$$

exakt, und daher gilt $\mathcal{L}^{\sim} \cong \det \mathcal{E}^{\sim}$. Der Zusatz folgt sofort aus Bemerkung (3.2.b) und Satz (4.15)

“(c)” Nach Bemerkung (4.2.b) ist $\omega(Z, \mathcal{L} \otimes \omega_V) \leq \omega(Y, \mathcal{L} \otimes \omega_V)$. Da Z nach (b) die CBE bzgl. $\mathcal{L} \otimes \omega_V$ hat, muß $\omega(Z, \mathcal{L} \otimes \omega_V) = 1$ sein (vgl. (4.6.b)), und die Behauptung folgt aus (4.9.a).

“(d)” Sei $Z' \subseteq Y$ ein Unterschema, das ein Gorensteinschema ist und die CBE bzgl. $\mathcal{L} \otimes \omega_V$ besitzt. Aus $\omega(Z', \mathcal{L} \otimes \omega_V) \neq 0$ (vgl. (4.6.b)) und aus (4.2.a) folgt

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_{Z'}, \mathcal{L}^{\sim}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_{Z'} \otimes \mathcal{L} \otimes \omega_V, \omega_V) \cong H^1(V, \mathcal{J}_{Z'} \otimes \mathcal{L} \otimes \omega_V)^* \neq 0.$$

Wegen $\text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^{\sim}) \cong H^1(V, \mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{L} \otimes \omega_V)^* \cong k$ ist die kanonische Abbildung $\varphi: \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_{Z'}, \mathcal{L}^{\sim}) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^{\sim})$ ein Isomorphismus. Die Erweiterung

$0 \rightarrow \mathcal{L}^{\sim} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{J}_{Z'} \rightarrow 0$ repräsentiere das Urbild von $(*)$ unter φ . Dann hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^{\sim} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{J}_Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^{\sim} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{J}_{Z'} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(vgl. [T], I (1.2)). Aus der Funktorialität des kommutativen Diagramms des Satzes und aus (a) erhält man nun ein entsprechendes kommutatives Diagramm für die Cayley-Bacharach-Reduktionen von Y und Z' :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^\sim & \longrightarrow & \mathcal{F}^{\sim\sim} & \longrightarrow & \mathcal{J}_Z \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^\sim & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{J}_{Z'} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Insbesondere ist $Z' \subseteq Z$. Aus (4.2) folgt

$$1 \leq \omega(Z', \mathcal{L} \otimes \omega_V) \leq \omega(Z, \mathcal{L} \otimes \omega_V) \leq \omega(Y, \mathcal{L} \otimes \omega_V) \leq h^1(\mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{L} \otimes \omega_V) = 1$$

und hieraus mittels (4.6.a) $Z' = Z$, denn nach (b) hat auch Z die CBE bzgl. $\mathcal{L} \otimes \omega_V$.

q.e.d.

(6.4) **KOROLLAR. (Die Cayley-Bacharach-Charakterisierung 0-dimensionaler Nullstellenschemata auf Gorensteinflächen)**

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- (a) Y ist ein Gorensteinschema, das die CBE bzgl. $\omega_V \otimes \mathcal{L}$ besitzt, und für alle Punkte $P \in Y$ gilt $\text{pd}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Y,P}) < \infty$.
- (b) Es gibt einen lokalfreien \mathcal{O}_V -Modul \mathcal{E} vom Rang zwei mit $\det \mathcal{E} \cong \mathcal{L}$ und einen regulären Schnitt $s \in H^0(V, \mathcal{E})$, so daß Y das Nullstellenschema von s ist.

Gilt hierbei sogar $h^1(\mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{L} \otimes \omega_V) = 1$, so ist das Paar (\mathcal{E}, s) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

BEWEIS:

“(a) \implies (b)” Dies folgt sofort aus (6.3.a) und (6.3.b).

“(b) \implies (a)” Vgl. Satz (4.15). Die Bedingung $\text{pd}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Y,P}) < \infty$ für $P \in Y$ ist erfüllt, da Y einen lokal vollständigen Durchschnitt auf V bildet.

Beachtet man, daß das Element $e \in \text{Ext}_V^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\sim) \cong H^1(V, \mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{L} \otimes \omega_V)^* \cong k$ aus dem Beweis von (6.1) bis auf einen skalaren Faktor eindeutig bestimmt ist (vgl. auch (4.20)), so folgt der Zusatz nach Definition der Äquivalenz zweier Erweiterungen, die dieses Element e repräsentieren.

q.e.d.

(6.5) **BEMERKUNG:**

Die Bedingung $\text{pd}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Y,P}) < \infty$ für $P \in Y$ bzw. $\text{pd}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Z,P}) < \infty$ für $P \in Z$ in (6.3) und (6.4) ist automatisch erfüllt, wenn P ein regulärer Punkt auf V ist.

(6.6) **KOROLLAR.**

Sei $Y \subseteq V$ ein 0-dimensionales Gorensteinschema, und für alle Punkte $P \in Y$ gelte $\text{pd}_{\mathcal{O}_{V,P}}(\mathcal{O}_{Y,P}) < \infty$.

- (a) Ist $H^0(V, \omega_V \otimes \mathcal{L}) = 0$, so ist Y das Nullstellenschema eines regulären Schnitts eines lokalfreien \mathcal{O}_V -Moduls \mathcal{E} vom Rang zwei mit $\det \mathcal{E} \cong \mathcal{L}$.
- (b) Y ist ein 0-dimensionales Nullstellenschema auf V .

Insbesondere ist Y also ein lokal vollständiger Durchschnitt auf V .

BEWEIS:

“(a)” Nach Bemerkung (4.6.c) hat Y die CBE bzgl. $\omega_V \otimes \mathcal{L}$.

“(b)” Wähle $\mathcal{L} = \omega_{\check{V}} \otimes \mathcal{M}^\vee$ mit einem sehr amplen invertierbaren \mathcal{O}_V -Modul \mathcal{M} . Dann ist $H^0(V, \omega_V \otimes \mathcal{L}) \cong H^0(V, \mathcal{M}^\vee) = 0$ (vgl. [Ha1], III ex. (7.1)). **q.e.d.**

(6.7) BEISPIEL:

Dieses Beispiel geht auf das in [GH1], S.728 Bewiesene zurück.

- (a) Ist V eine nichtsinguläre Fläche vom geometrischen Geschlecht $g = 0$ (z.B. V rational oder V Enriques-Fläche), so ist jedes 0-dimensionale Gorensteinschema $Y \subseteq V$ das Nullstellenschema eines globalen Schnitts s eines lokalfreien \mathcal{O}_V -Moduls \mathcal{E} vom Rang zwei mit $\det \mathcal{E} \cong \mathcal{O}_V$.
- (b) Sei $V \cong \mathbb{P}_k^2$ und (\mathcal{E}, s) wie in (a). Dann ist \mathcal{E} keine Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$$

von invertierbaren \mathcal{O}_V -Moduln $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \text{Pic}(V)$, und der Schnitt s ist bis auf einen skalaren Faktor eindeutig.

BEWEIS:

“(a)” Nach Voraussetzung ist $H^0(V, \omega_V) = g = 0$. Wende also Korollar (6.6.a) an.

“(b)” Wäre \mathcal{E} eine Erweiterung zweier invertierbarer \mathcal{O}_V -Moduln $\mathcal{M} \cong \mathcal{O}_V(m)$ und $\mathcal{N} \cong \mathcal{O}_V(n)$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, so wäre $\det \mathcal{E} \cong \mathcal{O}_V(m+n) \cong \mathcal{O}_V$, also $m+n = 0$. Wegen $\text{Ext}_V^1(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \cong H^1(V, \mathcal{O}_V(m-n)) = 0$ wäre \mathcal{E} von der Form $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_V(n) \oplus \mathcal{O}_V(-n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dies ist aber unmöglich, weil nun jeder von Null verschiedene globale Schnitt von \mathcal{E} auf einer ganzen Kurve verschwände.

Zum Beweis der Eindeutigkeit von s nehmen wir an, daß $s' \in H^0(V, \mathcal{E})$ ebenfalls das Nullstellenschema Y hat. Dann ist

$$s \wedge s' \in H^0(V, \det \mathcal{E}) \cong H^0(V, \mathcal{O}_V) \cong k,$$

und hieraus folgt $s \wedge s' = 0$, da die Punkte von Y Nullstellen dieses Schnittes sind. Also ist $s = \lambda \cdot s'$ mit $\lambda \in k \setminus \{0\}$. **q.e.d.**

(6.8) BEISPIEL:

Aus (6.4) und (6.6) folgt: Ist V eine reguläre Fläche, so ist ein 0-dimensionales Unterschema $Y \subseteq V$ genau dann ein 0-dimensionales Nullstellenschema auf V , wenn Y ein Gorensteinschema ist.

Im Fall $V = \mathbb{P}_k^2$ werden wir in § 8 auch die Nullstellenschemata zerfallender \mathcal{O}_V -Moduln \mathcal{E} , d.h. die 0-dimensionalen vollständigen Durchschnitte charakterisieren.

§ 7 Der Koordinatenring eines projektiven Schemas

Um die Geometrie einer Einbettung eines projektiven Schemas V in einen projektiven Raum \mathbb{P} näher zu untersuchen, betrachten wir jetzt den zugehörigen projektiven Koordinatenring $k[V]$. Wir wählen eine “unendlich ferne” Hyperebene $H \subseteq \mathbb{P}$ und versehen $H^0(V \setminus H, \mathcal{O}_{V \setminus H})$ so mit einer aufsteigenden Filtrierung, daß $k[V]$ die Rees-Algebra und der projektive Koordinatenring von $V \cap H$ in H der graduierte Ring dieser filtrierten Algebra wird.

Für 0-dimensionale Unterschemata Y von \mathbb{P} definieren wir speziell die Invariante a_Y der Einbettung $Y \subseteq \mathbb{P}$ mit Hilfe der Hilbertfunktion von Y . Wir untersuchen die grundlegenden Eigenschaften dieser Invariante, wie z.B. ihr Verhältnis zur Superabundanz und die CBE von Y bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)$, und berechnen sie für einige Beispiele.

Im folgenden sei V ein d -dimensionales projektives Schema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k , das in einen projektiven Raum $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^r$ eingebettet ist. Sei $\mathcal{J}_V \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ die Idealgarbe von V in \mathbb{P} . Für jeden kohärenten $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul \mathcal{F} setzen wir

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}(n))$$

Dann ist $\Gamma_*(\mathcal{F})$ ein graduerter $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ -Modul. Speziell stellt $\Gamma_*(\mathcal{J}_V)$ ein homogenes Ideal von $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ dar. Jede Wahl homogener Koordinaten in \mathbb{P} liefert einen Isomorphismus $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong k[X_0, \dots, X_r]$.

(7.1) DEFINITION:

Die positiv graduierte k -Algebra

$$k[V] = \bigoplus_{n \geq 0} k[V]_n := \Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) / \Gamma_*(\mathcal{J}_V)$$

heißt der **projektive Koordinatenring** von V in \mathbb{P} . Ihr homogenes maximales Ideal $\bigoplus_{n > 0} k[V]_n$ bezeichnen wir mit \mathfrak{M} .

Die folgenden Eigenschaften des projektiven Koordinatenrings werden in der einschlägigen Literatur ([**EGA**], [**Ha1**]) bewiesen.

(7.2) BEMERKUNG:

- (a) Die k -Algebra $k[V]$ hat $k[V]_0 = k$ als homogenen Bestandteil nullten Grades und wird von endlich vielen homogenen Elementen ersten Grades erzeugt.
- (b) $\text{Proj } k[V] \cong V$
- (c) $\dim k[V] = d + 1$
- (d) $H_{\mathfrak{M}}^0 k[V] = 0$

Anders ausgedrückt: Das homogene Ideal $\Gamma_*(\mathcal{J}_V) \subseteq k[X_0, \dots, X_r]$ ist **saturiert**, d.h. für alle $f \in k[X_0, \dots, X_r]$ gilt: Gibt es für alle $i \in \{0, \dots, r\}$ eine Zahl $n_i \in \mathbb{N}$ mit $X_i^{n_i} \cdot f \in \Gamma_*(\mathcal{J}_V)$, so liegt f bereits in $\Gamma_*(\mathcal{J}_V)$.

- (e) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $k[V](n)^\sim \cong \mathcal{O}_V(n)$

- (f) Für jeden endlich erzeugten graduierten $k[V]$ -Modul M hat man eine kanonische exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{M}}^0 M \rightarrow M \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(V, \widetilde{M}(n)) \rightarrow H_{\mathfrak{M}}^1 M \rightarrow 0$$

und Isomorphismen $H_{\mathfrak{M}}^i M \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^{i-1}(V, \widetilde{M}(n))$ für $i \geq 2$.

- (g) Speziell hat man eine kanonische exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow k[V] \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(V, \mathcal{O}_V(n)) \rightarrow H_{\mathfrak{M}}^1 k[V] \rightarrow 0$$

- (h) Ist V integer, so ist $k[V]$ ein Integritätsring.

(7.3) BEMERKUNG:

- (a) Man kann die Koordinaten $\{X_0, \dots, X_r\}$ von \mathbb{P} so wählen, daß die Bilder x_i der Elemente X_i in $k[V]$ Nichtnullteiler sind ($i = 0, \dots, r$). Dies sei fortan vorausgesetzt.
 (b) Es gibt eine Zahl $n_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_o$ gilt:

$$k[V]_n \cong H^0(V, \mathcal{O}_V(n))$$

- (c) Die abgeschlossenen Unterschemata W von V entsprechen eineindeutig den saturierten homogenen Idealen I_W von $k[V]$, d.h. den homogenen Idealen, für die aus $\mathfrak{M}^n \cdot f \in I_W$ ($f \in k[V]$, $n \in \mathbb{N}$) schon $f \in I_W$ folgt. Dabei gilt $k[W] \cong k[V]/I_W$.

BEWEIS:

“(a)” Wegen (7.2.d) und der kohomologischen Charakterisierung der Tiefe (vgl. [Ha1], III ex.(3.4)) gibt es einen Nichtnullteiler von $k[V]$ in \mathfrak{M} . Daher ist $\mathfrak{M} \notin \text{Ass } k[V]$, und da \mathfrak{M} von den Elementen von $k[V]_1$ erzeugt wird, gilt für alle $\mathfrak{p} \in \text{Ass } k[V]$ somit $\mathfrak{p} \cap k[V]_1 \subsetneq k[V]_1$. Also bilden die Urbilder der $\mathfrak{p} \cap k[V]_1$ ($\mathfrak{p} \in \text{Ass } k[V]$) in $k[X_0, \dots, X_r]_1$ endlich viele echte Untervektorräume. Da k unendlich viele Elemente hat, gibt es nun eine Basis von $k[X_0, \dots, X_r]_1$, die diese meidet. Die Bilder dieser Basiselemente sind Nichtnullteiler von $k[V]$.

“(b)” Betrachte die für jedes $n \in \mathbb{Z}$ exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_V(n)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_V(n)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}, \mathcal{J}_V(n)).$$

Es gibt ein $n_o \in \mathbb{N}$, so daß $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{J}_V(n))$ für alle $n \geq n_o$ verschwindet (vgl. [Ha1], III (5.2)) und man einen Isomorphismus $k[V]_n \xrightarrow{\sim} H^0(V, \mathcal{O}_V(n))$ erhält.

- “(c)” Offenbar sind die Urbilder dieser Ideale genau die saturierten Ideale von $k[X_0, \dots, X_r]$, die $\Gamma_*(\mathcal{J}_V)$ umfassen. Letztere entsprechen nach [Ha1], II ex. (5.10) eineindeutig den abgeschlossenen Unterschemata von V . **q.e.d.**

Jetzt bezeichnen wir das saturierte homogene Ideal $\Gamma_*(\mathcal{J}_V) \subseteq k[X_o, \dots, X_r]$ mit I , die Hyperebene $\mathcal{V}(X_o) \subseteq \mathbb{P}$ mit H und den zu H komplementären r -dimensionalen affinen Raum $\mathbb{P} \setminus H$ mit \mathbb{A} . Dann ist $U := V \cap \mathbb{A}$ ein d -dimensionales affines Unterschema von \mathbb{A} und entspricht als solches einem Ideal $J \subseteq k[X_1, \dots, X_r]$. Hierbei seien die Koordinaten $\{X_1, \dots, X_r\}$ von \mathbb{A} gegeben durch die Isomorphismen

$$H^o(\mathbb{A}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}}) \cong H^o(D_+(X_o), \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong k[X_o, \dots, X_r]_{(X_o)} \xrightarrow{\iota} k[X_1, \dots, X_r].$$

$$X_o \mapsto 1$$

(7.4) BEMERKUNG:

Das Ideal $J \subseteq k[X_1, \dots, X_r]$ ist die **Dehomogenisierung** von I nach X_o , das heißt J besteht aus allen Polynomen $f(1, X_1, \dots, X_r) \in k[X_1, \dots, X_r]$, für die $f(X_o, \dots, X_r)$ in I ist.

BEWEIS:

Nach Definition ist $J = H^o(\mathbb{A}, \mathcal{J}_V|_{\mathbb{A}}) \cong H^o(D_+(X_o), \mathcal{J}_V)$, und hieraus folgt wegen $\mathcal{J}_V = \Gamma_*(\mathcal{J}_V)^\sim = \tilde{I}$, daß J das Bild von $I_{(X_o)}$ unter dem Isomorphismus ι ist. **q.e.d.**

Umgekehrt sei jetzt ein d -dimensionales affines Unterschema $U \subseteq \mathbb{A}$ gegeben, das durch ein Ideal $J \subseteq k[X_1, \dots, X_r]$ definiert wird. Es erweist sich als vorteilhaft, den **affinen Koordinatenring**

$$S := k[X_1, \dots, X_r]/J \cong H^o(U, \mathcal{O}_U)$$

von U mit einer Filtrierung zu versehen. Was die grundlegenden Eigenschaften filtrierter Algebren betrifft, so stützen wir uns auf die Ergebnisse von [KK], § 1, wobei wir allerdings von aufsteigenden Filtrierungen ausgehen. Die nötigen Modifikationen sind in Anhang B aufgeführt.

Wir definieren die Filtrierung $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von S/k als die Restklassenfiltrierung der Gradfiltrierung \mathcal{G} von $k[X_1, \dots, X_r]$ unter dem Epimorphismus $k[X_1, \dots, X_r] \twoheadrightarrow k[X_1, \dots, X_r]/J = S$ (vgl. (B6) und (B9)). Wie im Anhang B bilden wir nun die **Rees-Algebra** $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_i \cdot T^i \subseteq S[T]_T$ und den **graduerten Ring** $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ zu $(S/k, \mathcal{F})$.

Sei $J^* \subseteq k[X_o, \dots, X_r]$ die **Homogenisierung** von J , das heißt das von den Homogenisierungen

$$f^*(X_o, \dots, X_r) := X_o^{\deg f} \cdot f\left(\frac{X_1}{X_o}, \dots, \frac{X_r}{X_o}\right)$$

der Elemente $f \in J$ erzeugte Ideal. Nach (B9) und (B6) gilt

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) \cong \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(k[X_1, \dots, X_r])/J^* \cong k[X_o, \dots, X_r]/J^*$$

und nach (B3) ist X_o daher ein Nichtnullteiler von $k[X_o, \dots, X_r]/J^*$, d.h. J^* ist ein saturiertes Ideal von $k[X_o, \dots, X_r]$. Sei \bar{U} das von J^* definierte abgeschlossene Unterschema von \mathbb{P} (vgl. (7.3.c)). Wir nennen es die **projektive Abschließung** des affinen Schemas U .

(7.5) SATZ.

Die Zuordnungen $V \mapsto V \cap \mathbb{A}$ und $U \mapsto \overline{U}$ definieren eine Bijektion zwischen der Menge der d -dimensionalen projektiven Unterschemata von \mathbb{P} , die keine Komponente auf H haben, und der Menge der d -dimensionalen affinen Unterschemata von \mathbb{A} .

BEWEIS:

Sei $U \subseteq \mathbb{A}$ ein d -dimensionales affines Unterschema, das durch ein Ideal $J \subseteq k[X_1, \dots, X_r]$ definiert werde. Wegen $f^*(1, X_1, \dots, X_r) = f(X_1, \dots, X_r)$ für alle $f \in J$ ist J dann die Dehomogenisierung von J^* nach X_o , und nach (7.4) gilt somit $U = \overline{U} \cap \mathbb{A}$. Wie bereits gezeigt wurde, ist X_o ein Nichtnullteiler von $k[X_o, \dots, X_r]/J^*$, das heißt \overline{U} hat keine Komponente auf H .

Andererseits sei $V \subseteq \mathbb{P}$ ein d -dimensionales abgeschlossenes Unterschema, das keine Komponente auf H habe und durch ein saturiertes Ideal $I \subseteq k[X_o, \dots, X_r]$ definiert werde. Dann ist X_o ein Nichtnullteiler von $k[X_o, \dots, X_r]/I$, weshalb für alle Elemente $f \in I$ mit $f = X_o^i \cdot g$ ($g \in k[X_o, \dots, X_r]$, $i \in \mathbb{N}$, $X_o \nmid g$) schon $g \in I$ folgt. Aus

$$f(1, X_1, \dots, X_r)^* = g(1, X_1, \dots, X_r)^* = X_o^{\deg g} \cdot g(1, \frac{X_1}{X_o}, \dots, \frac{X_r}{X_o}) = g$$

ergibt sich daher, daß I die Homogenisierung seiner Dehomogenisierung ist, das heißt $V = \overline{V \cap \mathbb{A}}$. **q.e.d.**

(7.6) BEMERKUNG:

Die Bijektion des Satzes ist inklusionserhaltend. Sind $U' \subseteq U$ zwei d -dimensionale affine Unterschemata von \mathbb{A} , so gilt $k[\overline{U}'] = k[\overline{U}]/\overline{I}'$, wenn \overline{I}' das Bild des saturierten Ideals I' von U' in $k[\overline{U}]$ bezeichnet. Ist U reduziert (bzw. integer), so ist auch \overline{U} reduziert (bzw. integer).

BEWEIS:

Die ersten beiden Aussagen gelten nach Konstruktion. Die dritte wird in [K3], I (5.17) bewiesen. **q.e.d.**

(7.7) KOROLLAR.

Seien V und U jetzt wieder wie vor (7.4).

(a) Es gilt: $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) \cong k[V]$

Hierbei wird der Nichtnullteiler $T \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)$ auf den Nichtnullteiler $x_o \in k[V]$ abgebildet (vgl. (7.3.a)).

(b) Es gilt: $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S) \cong k[V]/x_o \cdot k[V]$

Ist dabei Tiefe $k[V] \geq 2$, so ist $k[V]/x_o \cdot k[V]$ der projektive Koordinatenring von $V \cap H$ auf H .

BEWEIS:

“(a)” Nach (B9), (B6) und (7.5) gilt:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) \cong \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(k[X_1, \dots, X_r])/J^* \cong k[X_o, \dots, X_r]/I = k[V]$$

“(b)” Nach (B8) und (a) gilt $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S) \cong \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)/T \cdot \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) \cong k[V]/x_o \cdot k[V]$.

Ist Tiefe $k[V] \geq 2$, so ist Tiefe $(k[V]/x_o \cdot k[V]) \geq 1$, d.h. $H_{\bar{\mathfrak{M}}}^o(k[V]/x_o \cdot k[V]) = 0$, wenn $\bar{\mathfrak{M}}$ das Bild von \mathfrak{M} in $k[V]/x_o \cdot k[V]$ darstellt. Bezeichnen wir das Bild von I unter dem Epimorphismus $k[X_o, \dots, X_r] \rightarrow k[X_1, \dots, X_r]$ ($X_o \mapsto 0$) mit \bar{I} , so gilt also

$$k[V]/x_o \cdot k[V] \cong k[X_1, \dots, X_r]/\bar{I}$$

und \bar{I} ist ein homogenes saturiertes Ideal von $k[H] = k[X_1, \dots, X_r]$. Weil $I + (X_o)$ das Unterschema $Y \cap H \subseteq \mathbb{P}$ definiert, wird das Unterschema $Y \cap H$ von H durch \bar{I} definiert. **q.e.d.**

Von jetzt ab sei Y ein 0-dimensionales abgeschlossenes Unterschema von \mathbb{P} mit Idealgarbe $\mathcal{J}_Y \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$. Ferner sei $k[Y]$ der projektive Koordinatenring von Y und \mathfrak{m} sein homogenes maximales Ideal. Dann ist Y **arithmetisch Cohen-Macaulay** in \mathbb{P} , d.h. $k[Y]$ ist ein Cohen-Macaulay-Ring, denn nach (7.2) gilt Tiefe $k[Y] \geq 1 = \dim k[Y]$. Nach wie vor seien die Koordinaten $\{X_o, \dots, X_r\}$ so gewählt, daß ihre Restklassen $\{x_o, \dots, x_r\}$ Nichtnullteiler von $k[Y]$ sind.

(7.8) DEFINITION:

- (a) Die Abbildung $H_Y: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ ($n \mapsto \dim_k k[Y]_n$) heißt die **Hilbertfunktion** von Y in \mathbb{P} .
- (b) Die Invariante \mathbf{a}_Y der Einbettung $Y \subseteq \mathbb{P}$ ist gegeben als

$$a_Y := \max \{n \in \mathbb{Z} : H_Y(n) \neq \deg Y\}.$$

Nach Bemerkung (7.3.b) ist $H_Y(n) = \deg Y$ für große n . Wegen $H_Y(n) = 0 < \deg Y$ für $n < 0$ ist a_Y also wohldefiniert und es gilt $a_Y \geq -1$.

(7.9) SATZ. **(Eigenschaften von \mathbf{a}_Y)**

- (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$H_Y(n) = \sum_{i=0}^n \dim_k (k[Y]/x_o \cdot k[Y])_i$$

Folglich ist die Funktion H_Y monoton wachsend.

- (b)

$$\begin{aligned} a_Y &= \max \{n \in \mathbb{Z} : \dim_k k[Y]_n < \deg Y\} \\ &= \max \{n \in \mathbb{Z} : \dim_k k[Y]_n < \dim_k k[Y]_{n+1}\} \\ &= \max \{n \in \mathbb{N} : (k[Y]/x_o \cdot k[Y])_n \neq 0\} - 1. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $a_Y = \rho(Y) - 1$, wenn man die Invariante $\rho(Y)$ der Einbettung $Y \subseteq \mathbb{P}$ wie in [KK], (2.1.a) als den (von x_o unabhängigen) maximalen Grad eines homogenen Bestandteils von $k[Y]/x_o \cdot k[Y]$ definiert.

(c)

$$\begin{aligned} H_Y(n) &= 0 && \text{für } n < 0 \\ H_Y(n) &< H_Y(n+1) && \text{für } 0 \leq n \leq a_Y \\ H_Y(n) &= \deg Y && \text{für } n > a_Y \end{aligned}$$

(d)

$$a_Y = \max \{n \in \mathbb{Z} : (H_{\mathfrak{m}}^1 k[Y])_n \neq 0\}$$

Die Invariante a_Y stimmt also mit der in [GW], (3.1.4) und [W], § 1 definierten überein.

(e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\omega(Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) = \dim_k (H_{\mathfrak{m}}^1 k[Y])_n = h^1 \mathcal{J}_Y(n)$$

$$\text{Also folgt: } a_Y = \max \{n \in \mathbb{Z} : \omega(Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) \neq 0\} = \max \{n \in \mathbb{Z} : h^1 \mathcal{J}_Y(n) \neq 0\}$$

BEWEIS:

“(a)” Dies ergibt sich, wenn man die Dimensionsbilanzen der für alle $n \in \mathbb{N}$ exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow x_o \cdot k[Y]_{n-1} \rightarrow k[Y]_n \rightarrow (k[Y]/x_o \cdot k[Y])_n \rightarrow 0$$

aufsummiert und $\dim_k x_o \cdot k[Y]_{n-1} = \dim_k k[Y]_{n-1}$ benützt.

“(b)” Folgt sofort aus (a).

“(c)” (Vgl. [GM], (1.1)) Es ist nur $H_Y(n) < H_Y(n+1)$ für $0 \leq n \leq a_Y$ zu beweisen. Sei $H_Y(n) = H_Y(n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $k[Y]_{n+1} = x_o \cdot k[Y]_n$. Da $\{x_o, \dots, x_r\} \subseteq k[Y]_1$ ein Erzeugendensystem von \mathfrak{m} bildet, ist jedes Element $f \in k[Y]_{n+2}$ von der Form

$$f = \sum_{i=0}^r x_i \cdot f_i = \sum_{i=0}^r x_i \cdot x_o \cdot f'_i$$

mit Elementen $f_o, \dots, f_r \in k[Y]_{n+1}$ und $f'_o, \dots, f'_r \in k[Y]_n$. Also ist $f \in x_o \cdot k[Y]_{n+1}$. Da f beliebig war, folgt $k[Y]_{n+2} = x_o \cdot k[Y]_{n+1}$, und somit induktiv $H_Y(m) = H_Y(n)$ für alle $m \geq n$. Für genügend große $m \in \mathbb{N}$ gilt aber $H_Y(m) = \deg Y$. Daher muß $n > a_Y$ gewesen sein.

“(d)” Die exakte Sequenz (7.2.g) liefert für alle $n \in \mathbb{Z}$ exakte Sequenzen

$$(*) \quad 0 \rightarrow k[Y]_n \rightarrow H^o(\mathbb{P}, \mathcal{O}_Y(n)) \rightarrow (H_{\mathfrak{m}}^1 k[Y])_n \rightarrow 0.$$

Also ist $(H_{\mathfrak{m}}^1 k[Y])_n \neq 0$ genau dann, wenn $\dim_k k[Y]_n < \dim_k H^o(\mathbb{P}, \mathcal{O}_Y(n)) = \deg Y$ gilt.

“(e)” Aus (*) ergeben sich für alle $n \in \mathbb{Z}$ exakte Sequenzen:

$$0 \rightarrow H^o(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(n)) \rightarrow H^o(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) \xrightarrow{\alpha} H^o(\mathbb{P}, \mathcal{O}_Y(n)) \rightarrow (H_{\mathfrak{m}}^1 k[Y])_n \rightarrow 0$$

Es folgt nach Bemerkung (4.2.a) $\omega(Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) = \dim_k \text{coker } \alpha = \dim_k (H_{\mathfrak{m}}^1 k[Y])_n$. Wegen $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) = 0$ gilt auch $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(n)) \cong \text{coker } \alpha \cong (H_{\mathfrak{m}}^1 k[Y])_n$, also $\omega(Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) = h^1 \mathcal{J}_Y(n)$. **q.e.d.**

(7.10) SATZ.

(a) Für alle Unterschemata $Z \subseteq Y$ gilt $a_Z \leq a_Y$.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) Y stellt fast unabhängige Bedingungen an $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)$.

(2) Es ist $\omega(Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) \neq 0$ und alle Unterschemata $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ erfüllen $\omega(Z, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) = 0$.

(3) Für alle Unterschemata $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ gilt $a_Z < a_Y$.

(4) Für alle echten Unterschemata $Z \subseteq Y$ gilt $a_Z < a_Y$.

Inbesondere hat Y in diesem Fall die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)$ (vgl. (4.6.a)).

BEWEIS:

“(a)” Aus $Z \subseteq Y$ folgt für die entsprechenden Idealgarben $\mathcal{J}_Y \subseteq \mathcal{J}_Z \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$, und wir erhalten einen Epimorphismus $\varepsilon: k[Y] \twoheadrightarrow k[Z]$, dessen Kern wir mit I_Z bezeichnen. Wegen $Z \subseteq Y \subseteq \mathbb{P} \setminus \mathcal{V}(X_o)$ ist das Bild $\bar{x}_o := \varepsilon(x_o)$ von x_o in $k[Z]$ wiederum ein Nichtnullteiler. Es folgt gemäß (7.9.b):

$$\begin{aligned} a_Z &= \max \{n \in \mathbb{N} : (k[Z]/\bar{x}_o \cdot k[Z])_n \neq 0\} - 1 \\ &= \max \{n \in \mathbb{N} : (k[Y]/(x_o \cdot k[Y] + I_Z))_n \neq 0\} - 1 \\ &\leq \max \{n \in \mathbb{N} : (k[Y]/x_o \cdot k[Y])_n \neq 0\} - 1 \\ &= a_Y \end{aligned}$$

“(b)” “(1) \iff (2)” Vgl. Bemerkung (4.6.) und (4.9).

“(2) \iff (3)” Nach (7.9.e) ist die Bedingung $\omega(Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) \neq 0$ in jedem Fall erfüllt. Damit ist die Bedingung $a_Z < a_Y$ für ein Unterschema $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ äquivalent mit der Bedingung $\omega(Z, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) = 0$, denn nach (a) gilt ohnehin $a_Z \leq a_Y$.

“(3) \iff (4)” Wegen (a) ist nur noch zu beweisen, daß jedes echte Unterschema Z von Y in einem Unterschema $Z' \subseteq Y$ mit $\deg Z' = \deg Y - 1$ enthalten ist, denn dann folgt $a_Z \leq a_{Z'} < a_Y$. Dies wurde im Beweis von (4.6.a) bereits gezeigt.

q.e.d.

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir die Invariante a_Y noch für einige Beispiele berechnen.

(7.11) BEISPIEL:

Ist Y der vollständige Durchschnitt der Hyperflächen $H_1, \dots, H_r \subseteq \mathbb{P}$, so gilt:

$$a_Y = \sum_{i=1}^r \deg H_i - r - 1$$

BEWEIS:

Ist $F_i \in k[X_o, \dots, X_r]$ die Gleichung von H_i ($i = 1, \dots, r$), so ist $\{F_1, \dots, F_r\}$ eine reguläre Folge in $k[X_o, \dots, X_r]$, und das Ideal (F_1, \dots, F_r) definiert Y . Als Cohen-Macaulay-Ring besitzt $k[X_o, \dots, X_r]/(F_1, \dots, F_r)$ dann einen Nichtnullteiler, und daher

ist (F_1, \dots, F_r) das saturierte Ideal von Y . Wir erhalten eine Präsentation $k[Y] \cong k[X_o, \dots, X_r]/(F_1, \dots, F_r)$, und somit eine Präsentation

$$k[Y]/x_o \cdot k[Y] \cong k[X_1, \dots, X_r]/(f_1, \dots, f_r)$$

wenn wir $f_i(X_1, \dots, X_r) := F_i(0, X_1, \dots, X_r)$ setzen für $i = 1, \dots, r$. Wäre nun $F_i = X_o \cdot F'_i$ mit $F'_i \in k[X_o, \dots, X_r]$ für ein $i \in \{1, \dots, r\}$, so wäre $F'_i \in (F_1, \dots, F_r)$, da x_o ein Nichtnullteiler von $k[Y]$ ist (vgl. (7.3.a)), und somit $F_i = X_o \cdot F'_i \in (X_o \cdot F_1, \dots, X_o \cdot F_r)$. Da dies nicht möglich ist, weil $\{F_1, \dots, F_r\}$ eine reguläre Folge bildet, folgt $X_o \nmid F_i$ und $\deg f_i = \deg F_i$. Gemäß [KK], (2.7) erhalten wir:

$$a_Y = \rho(Y) - 1 = \sum_{i=1}^r \deg f_i - r - 1 = \sum_{i=1}^r \deg F_i - r - 1 = \sum_{i=1}^r \deg H_i - r - 1$$

q.e.d.

(7.12) BEISPIEL:

Sei Y ein reduziertes Unterschema des \mathbb{P}_k^2 . Wir sagen, die Punkte von Y seien in genügend allgemeiner Lage, wenn keine drei von ihnen kollinear sind und keine sechs von ihnen auf einem Kegelschnitt liegen.

- (a) Besteht Y aus einem Punkt, so gilt $H_Y(n) = 1$ für $n \geq 0$, und somit $a_Y = -1$.
- (b) Besteht Y aus zwei Punkten, so gilt $H_Y(0) = 1$, $H_Y(n) = 2$ für $n \geq 1$, und somit $a_Y = 0$.
- (c) Besteht Y aus drei nicht kollinearen Punkten, so gilt $H_Y(0) = 1$, $H_Y(n) = 3$ für $n \geq 1$, und somit $a_Y = 0$.
- (d) Besteht Y aus vier Punkten in genügend allgemeiner Lage, so gilt $H_Y(0) = 1$, $H_Y(1) = 3$, $H_Y(n) = 4$ für $n \geq 2$, und somit $a_Y = 1$.
- (e) Besteht Y aus fünf Punkten in genügend allgemeiner Lage, so gilt $H_Y(0) = 1$, $H_Y(1) = 3$, $H_Y(n) = 5$ für $n \geq 2$, und somit $a_Y = 1$.
- (f) Besteht Y aus sechs Punkten in genügend allgemeiner Lage, so gilt $H_Y(0) = 1$, $H_Y(1) = 3$, $H_Y(n) = 6$ für $n \geq 2$, und somit $a_Y = 1$.
- (g) Besteht Y aus $m = 7$ oder 8 Punkten in genügend allgemeiner Lage, so gilt $H_Y(0) = 1$, $H_Y(1) = 3$, $H_Y(2) = 6$, $H_Y(n) = m$ für $n \geq 3$, und somit $a_Y = 2$.
- (h) Besteht Y aus neun Punkten in genügend allgemeiner Lage, so gibt es zwei Fälle:
 - (1) Ist Y der vollständige Durchschnitt zweier Kurven dritten Grades, so gilt $H_Y(0) = 1$, $H_Y(1) = 3$, $H_Y(2) = 6$, $H_Y(3) = 8$, $H_Y(n) = 9$ für $n \geq 4$, und somit $a_Y = 3$.
 - (2) Ist Y nicht der vollständige Durchschnitt zweier Kurven dritten Grades, so gilt $H_Y(0) = 1$, $H_Y(1) = 3$, $H_Y(2) = 6$, $H_Y(n) = 9$ für $n \geq 3$, und somit $a_Y = 2$.
- (i) Besteht Y aus $m \geq 3$ kollinearen Punkten, so gilt $H_Y(n) = n+1$ für $0 \leq n \leq m-2$, $H_Y(n) = m$ für $n \geq m-1$, und somit $a_Y = m-2$.

- (j) Besteht Y aus $m \geq 4$ Punkten, von denen $m - 1$ auf einer Geraden und einer außerhalb dieser Geraden liegen, so gibt es zwei Fälle:
- (1) Die Zahl m ist gerade. Dann gilt $H_Y(n) = 2n + 1$ für $0 \leq n \leq \frac{m}{2} - 1$,
 $H_Y(n) = m$ für $n \geq \frac{m}{2}$, und somit $a_Y = \frac{m}{2} - 1$.
 - (2) Die Zahl m ist ungerade. Dann gilt $H_Y(n) = 2n + 1$ für $0 \leq n \leq \frac{m-3}{2}$,
 $H_Y(n) = m$ für $n \geq \frac{m-1}{2}$, und somit $a_Y = \frac{m-3}{2}$.

§ 8 Cayley-Bacharach-Charakterisierungen 0–dimensionaler arithmetischer Gorensteinschemata

In diesem Abschnitt studieren wir die Begriffe “arithmetisches Gorensteinschema”, “symmetrische Hilbertfunktion” und die “Cayley-Bacharach-Zahl” für 0–dimensionale Unterschemata Y des projektiven Raumes \mathbb{P} . Wir zeigen, daß die CBE von Y bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)$ äquivalent ist mit der Existenz einer Spur auf $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$, die auf dem Modul \mathcal{F}_{a_Y} der in § 7 angegebenen Filtrierung verschwindet.

Als Hauptresultat charakterisieren wir arithmetische Gorensteinschemata durch die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)$ und die Symmetrie ihrer Hilbertfunktion. In der projektiven Ebene ist Y genau dann ein arithmetisches Gorensteinschema, wenn Y der vollständige Durchschnitt zweier Kurven ist. In diesem Fall werden also vollständige Durchschnitte charakterisiert (vgl. [DM1], (4.1) und [D], (3.1)). An Hand einiger Beispiele zeigen wir schließlich die Nützlichkeit dieser Charakterisierung und belegen die Notwendigkeit der gestellten Bedingungen.

Sei Y ein 0–dimensionales Unterschema des projektiven Raumes $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^r$ mit Idealgarbe $\mathcal{J}_Y \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$. O.E. seien die Koordinaten $\{X_0, \dots, X_r\}$ von \mathbb{P} so gewählt, daß die Restklasse x_i von X_i im projektiven Koordinatenring $k[Y]$ für jedes $i \in \{0, \dots, r\}$ ein Nichtnullteiler ist (vgl. (7.3.a)).

(8.1) BEMERKUNG: (Vgl. [D], § 2)

- (a) Hat Y die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, so hat Y auch die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n-1)$.
- (b) Y hat die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$.
- (c) Y hat nicht die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y + 1)$.
- (d) Gilt $\deg Y \geq 2$, so hat Y die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$.

BEWEIS:

“(a)” Wir verwenden Bemerkung (4.6.a). Sei $Z \subseteq Y$ ein Unterschema mit $\deg Z = \deg Y - 1$ und mit der Idealgarbe $\mathcal{J}_Z \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$, und sei $\varepsilon: k[Y] \rightarrow k[Z]$ der kanonische Epimorphismus. Für jedes Element $f \in k[Y]_{n-1}$ mit $\varepsilon(f) = 0$ ist $\varepsilon(x_o \cdot f) = 0$, und wegen

$$k[Y]_n = H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n))/H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(n)) = H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n))/H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Z(n)) = k[Z]_n$$

auch $x_o \cdot f = 0$. Da x_o ein Nichtnullteiler von $k[Y]$ ist, muß $f = 0$ gewesen sein, d.h. $k[Y]_{n-1} = k[Z]_{n-1}$, und somit $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(n-1)) = H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Z(n-1))$.

“(b)” Wegen $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)) = 0$ folgt die Behauptung aus Bemerkung (4.6.c).

“(c)” Nach (7.9.d) und (7.9.e) ist $\omega(Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y + 1)) = 0$, d.h. Y stellt unabhängige Bedingungen an $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y + 1)$. Aus (4.6.b) folgt nun die Behauptung.

“(d)” Weil Y und alle Unterschemata $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1$ nichtleer sind, gilt $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y) = 0$ und $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Z) = 0$, und die Behauptung folgt aus (4.6.a). **q.e.d.**

(8.2) DEFINITION:

(Vgl. [D], § 2) Die Zahl

$$c_Y := \max \{n \in \mathbb{Z} : Y \text{ hat die CBE bzgl. } \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)\}$$

heißt die **Cayley-Bacharach-Zahl** von Y .

Nach der vorhergehenden Bemerkung ist $-1 \leq c_Y \leq a_Y$, und Y hat genau dann die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$, wenn $n \leq c_Y$ ist.

(8.3) BEMERKUNG:

- (a) Ist Y das Nullstellenschema eines regulären Schnitts eines lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduls \mathcal{E} vom Rang r , so gilt $c_Y \geq \deg(\det \mathcal{E}) - r - 1$, denn nach (4.15) hat Y die CBE bzgl. $\omega_{\mathbb{P}} \otimes \det \mathcal{E}$. Zerfällt \mathcal{E} in eine direkte Summe von invertierbaren $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduln $\mathcal{E} \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d_i)$, das heißt ist Y ein vollständiger Durchschnitt, so folgt mit (7.11) und (8.1.c), daß $c_Y = \sum_{i=1}^d d_i - r - 1 = a_Y$ ist.
- (b) Ein 0-dimensionales Gorensteinschema $Y \subseteq \mathbb{P}_k^2$ ist nach (6.4) genau dann als Nullstellenschema eines regulären Schnitts eines lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduls \mathcal{E} vom Rang zwei mit $\det \mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ realisierbar, wenn $n \leq c_Y + 3$ ist.

Weil der Nichtnullteiler x_o von $k[Y]$ in keinem der (homogenen) minimalen Primideale von $k[Y]$ liegt, gilt

$$D_+(x_o) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } k[Y] : x_o \notin \mathfrak{p}\} = \text{Proj } k[Y] = Y$$

und somit $Y \subseteq \mathbb{P} \setminus \mathcal{V}(X_o)$. Wir können daher den affinen Koordinatenring $S := H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ von Y mit der in § 7 angegebenen Filtrierung $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ versehen und erhalten als Rees-Algebra $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) \cong k[Y]$ und als graduierten Ring $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S) \cong k[Y]/x_o \cdot k[Y]$ (vgl. (7.7)). Nach (7.9.b) gilt dann:

$$a_Y = \max \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{F}_n \neq \mathcal{F}_{n+1}\} = \max \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{F}_n \neq S\}$$

Im folgenden sei α die kanonische Abbildung $\alpha : H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y(a_Y))$. Da Y wie gezeigt in $\mathbb{A} := \mathbb{P} \setminus \mathcal{V}(X_o)$ enthalten ist, bildet $x_o^{a_Y} = \alpha(X_o^{a_Y})$ eine S -Basis von $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(a_Y))$. Sei β der S -Isomorphismus

$$\begin{aligned} \beta : H^0(Y, \mathcal{O}_Y(a_Y)) &\longrightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \\ f \cdot x_o^{a_Y} &\longmapsto f \end{aligned}$$

(8.4) LEMMA.

Es gilt $\text{im}(\beta \circ \alpha) = \mathcal{F}_{a_Y}$ und $\omega(Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) = \deg Y - \dim_k \mathcal{F}_{a_Y} = \deg Y - H_Y(a_Y)$.

BEWEIS:

Wir zeigen zuerst die Inklusion " \subseteq ". Wegen $Y \subseteq \mathbb{A}$ faktorisiert α wie folgt :

$$\alpha : H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) \xrightarrow{\rho} H^0(\mathbb{A}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) \xrightarrow{\alpha'} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(a_Y))$$

Hierbei ist ρ die Restriktion. Sie bildet ein Element $f \in k[X_o, \dots, X_r]_{a_Y}$ ab auf das Element $\frac{f}{1} \in H^0(\mathbb{A}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) = \{\frac{g}{X_o^i} \in k[X_o, \dots, X_r]_{X_o} : g \text{ homogen vom Grad } a_Y + i\}$. Jetzt bezeichne γ den kanonischen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \gamma : H^0(\mathbb{A}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) &\xrightarrow{\sim} k[X_o, \dots, X_r]_{(X_o)} \xrightarrow{\sim} k[X_1, \dots, X_r] = H^0(\mathbb{A}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}}) \\ \frac{g}{X_o^i} &\longmapsto \frac{g}{X_o^{i+a_Y}} \quad X_o \longmapsto 1 \end{aligned}$$

und δ den kanonischen Epimorphismus $\delta: H^0(\mathbb{A}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}}) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$. Nach Definition von β und γ erhalten wir ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbb{A}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) & \xrightarrow{\alpha'} & H^0(Y, \mathcal{O}_Y(a_Y)) \\ \gamma \downarrow \wr & & \downarrow \beta \\ H^0(\mathbb{A}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}}) & \xrightarrow{\delta} & H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \end{array}$$

Insgesamt folgern wir:

$$\begin{aligned} \text{im}(\beta \circ \alpha) &= \text{im}(\delta \circ \gamma \circ \rho) \\ &\subseteq (\delta \circ \gamma)(\{ \frac{f}{1} \in k[X_0, \dots, X_r]_{X_0} : f \in k[X_0, \dots, X_r]_{a_Y} \}) \\ &= \delta(\{ f(1, X_1, \dots, X_r) \in k[X_1, \dots, X_r] : f \in k[X_0, \dots, X_r]_{a_Y} \}) \\ &= \{ f(1, x_1, \dots, x_r) \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y) : f \in k[X_0, \dots, X_r]_{a_Y} \} \\ &= \mathcal{F}_{a_Y} \end{aligned}$$

Aus der exakten Sequenz $0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(a_Y)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) \xrightarrow{\alpha} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(a_Y))$ folgt $\dim_k(\text{im}(\beta \circ \alpha)) = \dim_k(\text{im} \alpha) = \dim_k k[Y]_{a_Y}$. Nach Korollar (7.7) und Satz (7.9.a) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dim_k k[Y]_{a_Y} &= H_Y(a_Y) = \deg Y - \dim_k(k[Y]/x_0 \cdot k[Y])_{a_Y+1} \\ &= \deg Y - \dim_k(\mathcal{F}_{a_Y+1}/\mathcal{F}_{a_Y}) = \deg Y - \dim_k(S/\mathcal{F}_{a_Y}) \\ &= \dim_k \mathcal{F}_{a_Y} \end{aligned}$$

Also gilt sogar $\text{im}(\beta \circ \alpha) = \mathcal{F}_{a_Y}$. Bemerkung (4.2.a) liefert die zweite Behauptung.

q.e.d.

(8.5) SATZ.

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- (a) Y ist ein Gorensteinschema und hat die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)$. (Letzteres bedeutet $c_Y = a_Y$.)
- (b) Es gibt eine Spur $\sigma: S \rightarrow k$ mit $\mathcal{F}_{a_Y} \subseteq \ker \sigma$.

BEWEIS:

Nach Satz (4.14) ist (a) äquivalent damit, daß es eine Spur $\sigma': H^0(Y, \mathcal{O}_Y(a_Y)) \rightarrow k$ auf dem S -Modul $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(a_Y))$ gibt mit $\text{im} \alpha \subseteq \ker \sigma'$. Wendet man jetzt den Isomorphismus β an, so folgt die Behauptung aus dem Lemma.

q.e.d.

(8.6) KOROLLAR.

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- (a) Y ist ein Gorensteinschema und stellt fast unabhängige Bedingungen an $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)$.
- (b) Es gibt eine filtrierende Spur $\sigma: S \rightarrow k$ vom Grad $-a_Y - 1$ (das heißt $\ker \sigma = \mathcal{F}_{a_Y}$).

BEWEIS:

In beiden Fällen sind die äquivalenten Bedingungen des Satzes erfüllt. Also gibt es eine Spur $\sigma: S \rightarrow k$ mit $\mathcal{F}_{a_Y} \subseteq \ker \sigma$. Auf Grund des Lemmas und nach Bemerkung (4.9.a) ist (a) äquivalent mit

$$\dim_k \mathcal{F}_{a_Y} = \deg Y - \omega(Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) = \deg Y - 1$$

und dies ist äquivalent damit, daß \mathcal{F}_{a_Y} bereits der ganze Kern von σ ist. **q.e.d.**

(8.7) DEFINITION:

- (a) Y heißt ein **arithmetisches Gorensteinschema** in \mathbb{P} , wenn $k[Y]$ ein Gorensteinschema ist.
- (b) Y hat eine **symmetrische Hilbertfunktion**, wenn für alle $n \in \{0, \dots, a_Y\}$ gilt:

$$H_Y(n) + H_Y(a_Y - n) = \deg Y$$

(8.8) BEMERKUNG:

- (a) Ist Y ein arithmetisches Gorensteinschema, so ist Y ein Gorensteinschema.
- (b) Jeder 0-dimensionale vollständige Durchschnitt in \mathbb{P} ist ein 0-dimensionales arithmetisches Gorensteinschema.
- (c) Ein 0-dimensionales Unterschema $Y \subseteq \mathbb{P}_k^2$ ist genau dann ein arithmetisches Gorensteinschema, wenn Y der vollständige Durchschnitt zweier Kurven ist.

BEWEIS:

- “(a)” Die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{Y,P}$ ($P \in Y$) sind als homogene Lokalisationen von $k[Y]$ ebenfalls Gorensteinschemata.
- “(b)” Aus der Bedingung (3.1.c) folgt, daß das Ideal $\Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$ von r Elementen erzeugt wird, die eine reguläre Folge in $k[X_0, \dots, X_r]$ bilden (vgl. [Ha1], II ex. (8.4.a) und [K3], VI (3.14)). Damit ist $k[Y] = k[X_0, \dots, X_r]/\Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$ ein vollständiger Durchschnitt, also erst recht ein Gorensteinschema.
- “(c)” Dies folgt aus (a) und einem Resultat von Serre ([S], prop. 7). **q.e.d.**

(8.9) SATZ. **(Die Cayley-Bacharach-Charakterisierung 0-dimensionaler arithmetischer Gorensteinschemata)**

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- (a) Y ist ein arithmetisches Gorensteinschema.
- (b) Y hat eine symmetrische Hilbertfunktion und stellt fast unabhängige Bedingungen an $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)$.
- (c) Y hat eine symmetrische Hilbertfunktion und die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)$.
- (d) Es gibt eine strikte Spur $\sigma: S \rightarrow k$ (im Sinne von [KK], (3.4)).

BEWEIS:

- “(a) \implies (b)” Die endliche, positiv graduierte Gorensteinalgebra $k[Y]/x_0 \cdot k[Y]$ ist nach [KK], (2.2) sogar eine Frobeniusalgebra mit einer homogenen Spur vom Grad

$-\rho(Y) = -a_Y - 1$. Nach [KK], (2.1.b) gilt dann für alle $i = 0, \dots, a_Y + 1$:

$$\dim_k(k[Y]/x_o \cdot k[Y])_i = \dim_k(k[Y]/x_o \cdot k[Y])_{a_Y+1-i}$$

Mittels Satz (7.9.a) folgt hieraus, daß Y eine symmetrische Hilbertfunktion hat. Sei $Z \subseteq Y$ ein Unterschema mit $\deg Z = \deg Y - 1$. Weil das Bild \bar{x}_o von x_o in $k[Z]$ wiederum ein Nichtnullteiler ist, gilt

$$\dim_k k[Z]/\bar{x}_o \cdot k[Z] = \deg Z = \deg Y - 1 = \dim_k k[Y]/x_o \cdot k[Y] - 1.$$

Daher ist der Kern \bar{I}_Z des kanonischen Epimorphismus $k[Y]/x_o \cdot k[Y] \twoheadrightarrow k[Z]/\bar{x}_o \cdot k[Z]$ eindimensional. Nach [KK], (2.4.b) ist \bar{I}_Z dann in $(k[Y]/x_o \cdot k[Y])_{a_Y+1}$ enthalten, und da dieser k -Vektorraum auf Grund der Symmetrie der Hilbertfunktion von Y ebenfalls eindimensional ist, stimmt er mit \bar{I}_Z überein. Also folgt gemäß (7.9.b) $a_Z < a_Y$, und Satz (7.10.b) liefert die Behauptung.

“(b) \iff (c)” Dies folgt aus Bemerkung (4.9.a), da die Symmetrie der Hilbertfunktion von Y die Beziehung $\omega(Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) = \deg Y - H_Y(a_Y) = H_Y(0) = 1$ liefert.

“(b) \implies (d)” (Einen anderen Beweis für diese Aussage erhält man aus [W], (1.3), wenn man Satz (7.10) beachtet.)

Nach [KK], (3.3) genügt es zu zeigen, daß die von der nach Korollar (8.6) gegebenen filtrierenden Spur $\sigma: S \rightarrow k$ vom Grad $-a_Y - 1$ induzierte homogene k -lineare Abbildung $\sigma^o: \text{gr}_{\mathcal{F}}(S) \rightarrow k$ ($L_{\mathcal{F}}f \mapsto \sigma(f)$) eine Spur von $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S)/k$ ist. Also genügt es nach (B11) zu zeigen, daß die homogene $k[T]$ -lineare Abbildung $\sigma^*: \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) \rightarrow k[T]$ ($f^* \cdot T^n \mapsto \sigma(f) \cdot T^n$ für $f \in S, n \in \mathbb{N}$) vom Grad $-a_Y - 1$ eine Spur von $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)/k[T]$, also eine $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)$ -Basis von $\text{Hom}_{k[T]}(\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S), k[T])$ darstellt.

Wir zeigen zuerst, daß für alle Elemente $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)$ aus $r \cdot \sigma^* = 0$ schon $r = 0$ folgt. Dazu genügt es wegen der Homogenität von σ^* und nach Bemerkung (B5.b) anzunehmen, daß es ein $f \in S$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $T^n \cdot f^* \cdot \sigma^* = 0$. Dann gilt für alle Elemente $g \in S$:

$$\begin{aligned} 0 &= (T^n \cdot f^* \cdot \sigma^*)(g^*) = \sigma^*(T^n \cdot f^* \cdot g^*) = \\ &= T^n \cdot \sigma^*(f \cdot T^{\text{ord}_{\mathcal{F}} f} \cdot g \cdot T^{\text{ord}_{\mathcal{F}} g}) = \\ &= T^n \cdot \sigma^*(f \cdot g \cdot T^{\text{ord}_{\mathcal{F}} fg} \cdot T^{\text{ord}_{\mathcal{F}} f + \text{ord}_{\mathcal{F}} g - \text{ord}_{\mathcal{F}} fg}) = \\ &= T^{n + \text{ord}_{\mathcal{F}} f + \text{ord}_{\mathcal{F}} g - \text{ord}_{\mathcal{F}} fg} \cdot \sigma(fg) \end{aligned}$$

Es folgt $(f \cdot \sigma)(g) = \sigma(fg) = 0$ für alle $g \in S$, da T ein Nichtnullteiler von $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)$ ist, und hieraus $f = 0$, da σ eine Spur von $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)/k[T]$ ist.

Also gilt $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) \cdot \sigma^* \subseteq \text{Hom}_{k[T]}(\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S), k[T])$. Wir wenden jetzt den Isomorphismus $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) \xrightarrow{\sim} k[Y]$ ($T \mapsto x_o$) aus Korollar (7.7) an und erhalten eine homogene $k[x_o]$ -lineare Abbildung $\sigma^*: k[Y] \rightarrow k[x_o]$ vom Grad $-a_Y - 1$ mit $k[Y] \cdot \sigma^* \subseteq \text{Hom}_{k[x_o]}(k[Y], k[x_o])$.

Wählen wir nun Elemente $\{b_1, \dots, b_m\}$ in S , deren Leitformen $\{L_{\mathcal{F}}b_1, \dots, L_{\mathcal{F}}b_m\}$ eine k -Basis von $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S) \cong k[Y]/x_o \cdot k[Y]$ bilden (dies geht nach (B5.a)), so stellen ihre Homogenisierungen $\{b_1^*, \dots, b_m^*\}$ eine $k[x_o]$ -Basis von $k[Y]$ dar (vgl. (B10)). Dies zeigt, daß der i -te homogene Bestandteil von $k[Y]$ als $k[x_o]$ -Modul den Rang $\dim_k(k[Y]/x_o \cdot k[Y])_i$ besitzt. Da die Projektion $\text{pr}_i: k[Y] \rightarrow k[x_o]$ ($b_j^* \mapsto \delta_{ij}$ für $j = 1, \dots, m$) eine homogene lineare Abbildung vom Grad $-\deg b_i^*$ ist ($i = 1, \dots, m$) und $\{\text{pr}_1, \dots, \text{pr}_m\}$ eine $k[x_o]$ -Basis von $\text{Hom}_{k[x_o]}(k[Y], k[x_o])$ darstellt, bildet dann $\{\text{pr}_j: \deg b_j^* = \nu\}$ eine $k[x_o]$ -Basis von $\text{Hom}_{k[x_o]}(k[Y], k[x_o])_{-\nu}$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}$. Als k -Vektorraum hat $\text{Hom}_{k[x_o]}(k[Y], k[x_o])_{-\nu}$ also die Basis $\{x_o^{\nu - \deg b_j^*} \cdot \text{pr}_j: \deg b_j^* \geq 0\}$, das heißt:

$$\dim_k(\text{Hom}_{k[x_o]}(k[Y], k[x_o]))_{-\nu} = \sum_{i=\nu}^{a_Y+1} \dim_k(k[Y]/x_o \cdot k[Y])_i$$

Wegen $\deg \sigma^* = -a_Y - 1$ ergibt sich, daß der $-\nu$ -te homogene Bestandteil des $k[x_o]$ -Moduls $k[Y] \cdot \sigma^*$ die Basis $\{b_j^* \cdot \sigma^*: \deg b_j^* = a_Y + 1 - \nu\}$ hat. Als k -Vektorraum besitzt $(k[Y] \cdot \sigma^*)_{-\nu}$ dann die Basis $\{x_o^{\nu - \deg b_j^*} \cdot b_j^* \cdot \sigma^*: \deg b_j^* \leq \nu\}$, das heißt:

$$\dim_k(k[Y] \cdot \sigma^*)_{-\nu} = \sum_{i=0}^{\nu} \dim_k(k[Y]/x_o \cdot k[Y])_i$$

Auf Grund der Symmetrie der Hilbertfunktion von Y schließen wir nun, daß für alle $\nu \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\dim_k(k[Y] \cdot \sigma^*)_{-\nu} = \dim_k(\text{Hom}_{k[x_o]}(k[Y], k[x_o]))_{-\nu}$$

Folglich ist $k[Y] \cdot \sigma^* = \text{Hom}_{k[x_o]}(k[Y], k[x_o])$, und somit ist σ^* eine homogene Spur von $k[Y]/k[x_o]$ vom Grad $-a_Y - 1$.

“(d) \implies (a)” Wegen **[KK]**, (3.1) und (B11) ist auch die von σ induzierte Abbildung $\sigma^o: \text{gr}_{\mathcal{F}}(S) \rightarrow k$ eine homogene Spur. Daher ist $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S)$ ein Gorensteinring, und nach (B3) und (B8) ist dann auch $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) \cong k[Y]$ ein Gorensteinring. **q.e.d.**

(8.10) KOROLLAR.

(Vgl. **[DM1]**, (4.1) und **[D]**, (3.1)) Sei $Y \subseteq \mathbb{P}_k^2$ ein 0-dimensionales Unterschema. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) Y ist ein vollständiger Durchschnitt.
- (b) Y hat eine symmetrische Hilbertfunktion und die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)$.

In diesem Fall ist $\Delta := \frac{1}{4}(a_Y + 3)^2 - \deg Y \geq 0$, und Y ist der vollständige Durchschnitt zweier ebener Kurven vom Grad $\frac{1}{2}(a_Y + 3) + \sqrt{\Delta}$ und $\frac{1}{2}(a_Y + 3) - \sqrt{\Delta}$.

BEWEIS:

Auf Grund des Satzes und der vorhergehenden Bemerkung ist nur der Zusatz zu beweisen. Ist Y der vollständige Durchschnitt zweier ebener Kurven der Grade d_1 und d_2 , so gilt $a_Y = d_1 + d_2 - 3$ nach (7.11) und $\deg Y = d_1 \cdot d_2$ nach dem Satz von Bézout. Hieraus folgen die Behauptungen. **q.e.d.**

(8.11) BEISPIEL:

Mit Hilfe von Korollar (8.10) kann man für die reduzierten 0-dimensionalen Unterschemata $Y \subseteq \mathbb{P}_k^2$ aus Beispiel (7.12) leicht bestimmen, ob es sich um vollständige Durchschnitte handelt.

- (a) Y ist ein Punkt: H_Y ist symmetrisch, $c_Y = -1 = a_Y$, und somit ist Y der vollständige Durchschnitt zweier Geraden, was natürlich ohnehin klar ist.
- (b) Y besteht aus zwei Punkten: H_Y ist symmetrisch, $c_Y = 0 = a_Y$, und somit ist Y der vollständige Durchschnitt einer Geraden und eines Kegelschnitts.
- (c) Y besteht aus drei nichtkollinearen Punkten: H_Y ist nicht symmetrisch, $c_Y = 0 < a_Y$, und somit ist Y kein vollständiger Durchschnitt.
- (d) Y besteht aus vier Punkten in genügend allgemeiner Lage: H_Y ist symmetrisch, $c_Y = 1 = a_Y$, und somit ist Y der vollständige Durchschnitt zweier Kegelschnitte.
- (e) Y besteht aus fünf Punkten in genügend allgemeiner Lage: H_Y ist nicht symmetrisch, $c_Y = 1 = a_Y$, und somit ist Y kein vollständiger Durchschnitt.
- (f) Y besteht aus sechs Punkten in genügend allgemeiner Lage: H_Y ist nicht symmetrisch, $c_Y = 1 = a_Y$, und somit ist Y kein vollständiger Durchschnitt.
- (g) Y besteht aus sieben oder acht Punkten in genügend allgemeiner Lage: H_Y ist nicht symmetrisch, $c_Y = 2 = a_Y$, und somit ist Y kein vollständiger Durchschnitt.
- (h) Y besteht aus neun Punkten in genügend allgemeiner Lage:
 - (1) Ist Y der vollständige Durchschnitt zweier Kurven dritten Grades, so ist H_Y symmetrisch und $c_Y = 3 = a_Y$ (vgl. (8.3.a)).
 - (2) Andernfalls ist H_Y nicht symmetrisch, $c_Y = 2 = a_Y$, und somit ist Y kein vollständiger Durchschnitt.
- (i) Y besteht aus $m \geq 3$ kollinearen Punkten: H_Y ist symmetrisch, $c_Y = m - 2 = a_Y$, und somit ist Y der vollständige Durchschnitt einer Geraden und einer Kurve m -ten Grades, was ebenfalls ohnehin klar ist.
- (j) Y besteht aus $m \geq 4$ Punkten, von denen $m - 1$ auf einer Geraden und einer außerhalb dieser Geraden liegen :
 - (1) Die Zahl m ist gerade: H_Y ist symmetrisch, $c_Y = 0 < \frac{m}{2} - 1 = a_Y$, und somit ist Y kein vollständiger Durchschnitt.
 - (2) Die Zahl m ist ungerade: H_Y ist nicht symmetrisch, $c_Y = 0 < \frac{m-3}{2} = a_Y$, und somit ist Y kein vollständiger Durchschnitt.

Die nachstehenden Beispiele zeigen, daß man die in (8.9.c) gestellten Bedingungen nicht abschwächen kann.

(8.12) BEISPIEL:

Jedes 0-dimensionale Unterschema $Y \subseteq \mathbb{P}_k^2$ mit $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S) \cong k[X_1, X_2]/(X_1X_2, X_1^4, X_2^3)$ hat wegen $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S) = k \cdot 1 + k \cdot x_1 + k \cdot x_2 + k \cdot x_1^2 + k \cdot x_2^2 + k \cdot x_1^3$ eine symmetrische Hilbertfunktion, ist aber kein arithmetisches Gorensteinschema, da $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S)$ und damit auch $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)$ wegen $\mathfrak{S}(\text{gr}_{\mathcal{F}}(S)) = k \cdot x_2^2 + k \cdot x_1^3$ kein Gorensteinring ist.

(8.13) BEISPIEL:

Nach [DM2], § 2 kann man ein reduziertes Unterschema $Y \subseteq \mathbb{P}_k^2$, bestehend aus 16 Punkten auf einer Kurve dritten Grades so wählen, daß je 15 von ihnen sonst auf keiner Kurve vom Grad ≤ 5 liegen. Dann hat Y die folgende Hilbertfunktion:

$H_Y(0) = 1$, $H_Y(1) = 3$, $H_Y(2) = 6$, $H_Y(3) = 9$, $H_Y(4) = 15 - 3 = 12$ (denn es gibt 15 linear unabhängige Formen vierten Grades, und drei davon sind Vielfache der Form dritten Grades im Ideal von Y), $H_Y(5) = 21 - 6 = 15$, und $H_Y(n) = 16$ für $n \geq 6$. Es folgt $a_Y = 5$ und $\omega(Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y)) = \deg Y - H_Y(a_Y) = 1$ (vgl. (8.4)). Auch für jedes Unterschema $Z \subseteq Y$ mit $\deg Z = \deg Y - 1 = 15$ ist $H_Z(5) = 15$, das heißt $h^0(\mathcal{J}_Z(5)) = h^0(\mathcal{J}_Y(5)) = 6$.

Also hat Y nach (4.6.a) die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(5)$, und nach Bemerkung (4.9.a) stellt Y damit sogar fast unabhängige Bedingungen an $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(4)$. Jedoch ist Y kein arithmetisches Gorensteinschema, da H_Y nicht symmetrisch ist.

Ein abschließendes Beispiel verdeutlicht, daß man kaum erwarten kann, eine ähnlich einfache Cayley-Bacharach-Charakterisierung für 0-dimensionale vollständige Durchschnitte in Kodimension ≥ 3 zu erhalten. In § 10 werden wir diese Frage jedoch für 0-dimensionale Unterschemata des projektiven Raumes \mathbb{P}_k^3 beantworten.

(8.14) BEISPIEL:

(Dieses Beispiel stammt von A. Geramita.) Sei $C := \{(t^3, t^2u, tu^2, u^3) \in \mathbb{P}_k^3 : (t, u) \in \mathbb{P}_k^1\}$ die "twisted cubic" im projektiven Raum \mathbb{P}_k^3 , das heißt die rationale Raumkurve dritten Grades. Weiter sei $Y \subseteq C$ ein reduziertes Unterschema, das aus acht Punkten besteht, die auf keiner Hyperfläche zweiten Grades außer den C umfassenden liegen. Dann lautet die Hilbertfunktion von Y :

$H_Y(0) = 1$, $H_Y(1) = 4$, $H_Y(2) = 7$, $H_Y(n) = 8$ für $n \geq 3$. Insbesondere ist die Hilbertfunktion von Y symmetrisch, und Y hat die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2)$, d.h. Y ist ein arithmetisches Gorensteinschema. Y hat sogar die Hilbertfunktion eines vollständigen Durchchnitts dreier Hyperflächen zweiten Grades, ohne jedoch ein solcher zu sein, da solche Hyperflächen mit Y nach dem Satz von Bézout ganz C enthalten müßten.

§ 9 Anwendungen auf Zerfällungskriterien für Vektorbündel

Nachdem wir zuerst eine etwas verallgemeinerte Version des Zerfällungskriteriums für Vektorbündel von G. Horrocks (vgl. [Ho], § 7 und § 9 oder [OSS], I (2.3.1)) bereitgestellt haben, verschärfen wir dieses im Fall $V = \mathbb{P}_k^2$ und $V = \mathbb{P}_k^3$. Genauer zeigen wir, daß man auf das Verschwinden gewisser Kohomologiegruppen des lokalfreien \mathcal{O}_V -Moduls \mathcal{E} verzichten kann, wenn man ein $n \in \mathbb{Z}$ und einen regulären Schnitt in $H^0(V, \mathcal{E}(n))$ findet, dessen Nullstellenschema Y eine symmetrische Hilbertfunktion hat und die Eigenschaft $a_Y = rn + \deg(\det \mathcal{E}) - r - 1$ erfüllt (mit $r = 2$ oder 3).

Schließlich beweisen wir, daß letztere Eigenschaft für das Nullstellenschema jedes regulären Schnitts $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}(n))$ automatisch zutrifft, wenn n groß genug ist. Beispielsweise zerfällt ein lokalfreier Modul \mathcal{E} vom Rang zwei auf \mathbb{P}_k^2 genau dann, wenn es einen regulären Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}_k^2, \mathcal{E}(n))$, $n \gg 0$ gibt, dessen Nullstellenschema $Y = (s)_o$ eine symmetrische Hilbertfunktion hat.

(9.1) LEMMA. **(Die graduierte Version der Formel von Auslander-Buchsbaum)**

Sei $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ ein positivgraduierter noetherscher Ring mit einem Körper $k = R_0$ als homogenem Bestandteil nullten Grades, und sei $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ ein endlich erzeugter graduierter R -Modul endlicher projektiver Dimension. Dann gilt:

$$\mathrm{pd}_R(M) + \text{Tiefe}(M) = \text{Tiefe}(R)$$

Hierbei ist $\text{Tiefe}(M)$ die Länge einer maximalen homogenen M -regulären Folge im homogenen maximalen Ideal $\mathfrak{M} := \bigoplus_{n > 0} R_n$.

BEWEIS:

Nach der üblichen Fassung der Formel von Auslander-Buchsbaum (vgl. [K3], VII (1.12)) gilt

$$\mathrm{pd}_{R_{\mathfrak{M}}}(M_{\mathfrak{M}}) + \text{Tiefe}(M_{\mathfrak{M}}) = \text{Tiefe}(R_{\mathfrak{M}}).$$

Bekanntlich gibt es eine maximale M -reguläre Folge in \mathfrak{M} , die aus homogenen Elementen besteht (vgl. [Lo], (6.4)). Wie in [K2], (C28) folgt hieraus

$$\text{Tiefe}(M) = \text{Tiefe}(M_{\mathfrak{M}}) \quad \text{und} \quad \text{Tiefe}(R) = \text{Tiefe}(R_{\mathfrak{M}}).$$

Mit Hilfe der graduierten Version des Lemmas von Nakayama (vgl. [Lo], (1.10)) konstruiert man eine homogene minimale freie Auflösung von M , d.h. eine Auflösung der Form

$$\dots \xrightarrow{\alpha_2} \bigoplus_{j=1}^{r_2} R(n_{2j}) \xrightarrow{\alpha_1} \bigoplus_{j=1}^{r_1} R(n_{1j}) \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

mit $r_i \geq 0$, $n_{ij} \in \mathbb{Z}$ ($j = 1, \dots, r_i$), mit homogenen Abbildungen α_i , ε und mit $\mathrm{im} \alpha_i \subseteq \mathfrak{M} \cdot \left(\bigoplus_{j=1}^{r_i} R(n_{ij}) \right)$ für alle $i \geq 1$. Dann ist $\mathrm{pd}_R(M) = i$ äquivalent mit $\mathrm{im} \alpha_{i+1} = 0$ (vgl. [K3], VII (1.11)), und dies ist äquivalent mit $(\mathrm{im} \alpha_i)_{\mathfrak{M}} = 0$ (vgl. [K2], (C27)). Also gilt auch $\mathrm{pd}_R(M) = \mathrm{pd}_{R_{\mathfrak{M}}}(M_{\mathfrak{M}})$. **q.e.d.**

Im folgenden sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^r$, und sei $V \subseteq \mathbb{P}$ eine d -dimensionale integrale projektive Varietät.

(9.2) SATZ. **(Das Zerfällungskriterium von G. Horrocks)**

Für jeden lokalfreien \mathcal{O}_V -Modul \mathcal{E} endlichen Rangs sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) \mathcal{E} zerfällt in eine direkte Summe invertierbarer \mathcal{O}_V -Moduln der Form $\mathcal{O}_V(n)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und V ist **arithmetisch Cohen-Macaulay**, d.h. $k[V]$ ist ein Cohen-Macaulay-Ring.
- (b) $\Gamma_*(\mathcal{E})$ ist ein $\Gamma_*(\mathcal{O}_V)$ -Modul endlicher projektiver Dimension, und für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$H^1(V, \mathcal{E}(k)) = H^2(V, \mathcal{E}(k)) = \dots = H^{d-1}(V, \mathcal{E}(k)) = 0$$

BEWEIS:

“(a) \implies (b)” Da $k[V]$ ein $(d+1)$ -dimensionaler Cohen-Macaulay-Ring ist, gilt $H_{\mathfrak{M}}^i(k[V]) = 0$ für $i = 0, \dots, d$ nach der kohomologischen Charakterisierung der Tiefe (vgl. [Ha1], III ex. (3.4)). Nach Bemerkung (7.2) folgt

$$R := \Gamma_*(\mathcal{O}_V) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(V, \mathcal{O}_V(n)) \cong k[V]$$

und $H^1(V, \tilde{\mathcal{O}}_V(k)) = \dots = H^{d-1}(V, \tilde{\mathcal{O}}_V(k)) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Weil $\Gamma_*(\mathcal{E})$ nach Voraussetzung ein **graduierter freier** $\Gamma_*(\mathcal{O}_V)$ -Modul ist, d.h. ein freier $\Gamma_*(\mathcal{O}_V)$ -Modul mit einer homogenen Basis, ergibt sich die Behauptung.

“(b) \implies (a)” Wir wollen das Lemma (9.1) auf $R := \Gamma_*(\mathcal{O}_V)$ und den graduierten R -Modul $M := \Gamma_*(\mathcal{E})$ anwenden. Dazu zeigen wir zuerst, daß M ein endlich erzeugter R -Modul ist.

Nach [Ha1], Beweis von II (5.19) gibt es einen endlich erzeugten graduierten R -Modul N mit $\tilde{N} \cong \mathcal{E}$. Sei α die zugehörige kanonische Abbildung $\alpha: N \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{E}) = M$ (vgl. [Ha1], II ex. (5.9.a)). Nach [Ha1], II ex. (5.9.b) gibt es dann ein $n_o \in \mathbb{N}$, so daß die eingeschränkte R -lineare Abbildung $\tilde{\alpha}: \bigoplus_{n \geq n_o} N_n \rightarrow \bigoplus_{n \geq n_o} M_n$ ein Isomorphismus ist. Als R -Untermodule von N ist $\bigoplus_{n \geq n_o} N_n$ wieder endlich erzeugt, und damit auch

$\bigoplus_{n \geq n_o} M_n$. Der Dualitätssatz (2.2) zeigt $M_i = H^0(V, \mathcal{E}(i)) \cong H^d(V, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_V(-i))^*$, und diese Kohomologiegruppe verschwindet für $i \ll 0$ nach dem Serreschen Endlichkeitssatz (vgl. [K1], (6.5)). Nach demselben Satz sind die endlich vielen Komponenten $M_i \neq 0$ mit $i < n_o$ sämtlich endlichdimensionale k -Vektorräume. Insgesamt ist M also ein endlich erzeugter R -Modul.

Nach Bemerkung (7.2.f) gilt für $i = 2, \dots, d$

$$H_{\mathfrak{M}}^i(M) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^{i-1}(V, \mathcal{E}(n)) = 0$$

und für $i = 0, 1$ folgt $H_{\mathfrak{M}}^i(M) = 0$ aus der Isomorphie der kanonischen Abbildung $M \rightarrow \Gamma_*(\widetilde{M})$. Nach Lemma (9.1) und der kohomologischen Charakterisierung der Tiefe folgt daher $\text{pd}_R(M) = 0$ und $\text{Tiefe}(R) = d + 1 = \dim R$. Wie im Beweis von (9.1) gezeigt wurde, ist $M \cong \bigoplus_{i=1}^s R(n_i)$ dann ein graduiert freier R -Modul, und $\mathcal{E} \cong \widetilde{M} \cong \bigoplus_{i=1}^s \mathcal{O}_V(n_i)$ zerfällt in der gewünschten Weise. **q.e.d.**

(9.3) BEMERKUNG:

Der Beweis von (9.2) zeigt, daß das Verschwinden der Kohomologiegruppen $H^i(V, \mathcal{E}(k))$ für $i = 1, \dots, d-1$ und $k \in \mathbb{Z}$ eines lokalfreien \mathcal{O}_V -Moduls \mathcal{E} endlichen Rangs äquivalent damit ist, daß der endlich erzeugte graduierte $R := \Gamma_*(\mathcal{O}_V)$ -Modul $M := \Gamma_*(\mathcal{E})$ ein maximaler Cohen-Macaulay-Modul ist.

Zum Beweis der Zerfällungseigenschaft (9.2.a) ist also von einem maximalen Cohen-Macaulay-Modul zu zeigen, daß er frei ist. Dies ist stets der Fall, wenn R regulär ist.

Eine genauere Aussage liefert der folgende Satz, dessen lokale Version in [He1], (1.1) bewiesen wurde.

(9.4) SATZ.

Sei $V \subseteq \mathbb{P}_k^r$ eine d -dimensionale integrale projektive Varietät ($d \geq 1$). Betrachte für einen lokalfreien \mathcal{O}_V -Modul \mathcal{E} endlichen Rangs die beiden folgenden Bedingungen:

- (a) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $i = 1, \dots, d-1$ gilt $H^i(V, \mathcal{E}(k)) = 0$.
- (b) \mathcal{E} zerfällt in eine direkte Summe invertierbarer \mathcal{O}_V -Moduln der Form $\mathcal{O}_V(n)$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Genau dann sind die Aussagen (a) und (b) für jeden lokalfreien \mathcal{O}_V -Modul \mathcal{E} endlichen Rangs äquivalent, wenn V ein d -dimensionaler linearer Teilraum von \mathbb{P}_k^r ist.

BEWEIS:

Ist V ein d -dimensionaler linearer Teilraum von \mathbb{P}_k^r , so ist $R := \Gamma_*(\mathcal{O}_V)$ ein $(d+1)$ -dimensionaler regulärer Ring, und folglich besitzt der endlich erzeugte graduierte R -Modul $M := \Gamma_*(\mathcal{E})$ eine endliche projektive Dimension. Nach (9.2) sind dann die Aussagen (a) und (b) äquivalent.

Umgekehrt seien jetzt (a) und (b) auf V für jedes \mathcal{E} äquivalent. Dann gilt insbesondere für $R := \Gamma_*(\mathcal{O}_V) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(V, \mathcal{O}_V(n))$ (vgl. [Ha1], III ex. (7.1)), $\mathfrak{M} := \bigoplus_{n > 0} H^0(V, \mathcal{O}_V(n))$ und $i = 2, \dots, d$ nach Bemerkung (7.2.f):

$$H_{\mathfrak{M}}^i(R) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^{i-1}(V, \mathcal{O}_V(n)) = 0$$

Für $i = 0, 1$ folgt $H_{\mathfrak{M}}^i(R) = 0$ daraus, daß die kanonische Abbildung $R \rightarrow \Gamma_*(\widetilde{R}) = \Gamma_*(\mathcal{O}_V)$ ein Isomorphismus ist. Wie die kohomologische Charakterisierung der Tiefe zeigt, ist R also ein $(d+1)$ -dimensionaler Cohen-Macaulay-Ring. Betrachte eine homogene minimale

freie Auflösung von k als R -Modul

$$(*) \quad \dots \xrightarrow{\alpha_2} \bigoplus_{j=1}^{r_2} R(n_{2j}) \xrightarrow{\alpha_1} \bigoplus_{j=1}^{r_1} R(n_{1j}) \xrightarrow{\varepsilon} k \longrightarrow 0$$

und setze $M := \text{im } \alpha_{d+1}$. Nach [K3], VII § 1, Aufgabe 7 ist M ein endlich erzeugter graduerter R -Modul mit

$$\text{Tiefe}(M) = \text{Tiefe}(M_{\mathfrak{M}}) = d + 1$$

d.h. für $\mathcal{E} := \widetilde{M}$ ist $H^i(V, \mathcal{E}(k)) = 0$ für $i = 1, \dots, d - 1$ und $k \in \mathbb{Z}$, und es gilt $M = \Gamma_*(\mathcal{E})$.

Sei $x \in V$ ein abgeschlossener Punkt. Wegen $V = \text{Proj } R$ gibt es ein homogenes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ mit $\mathcal{O}_{V,x} \cong R_{(\mathfrak{p})}$. Nun lokalisiert man die Sequenz $(*)$ homogen in \mathfrak{p} und erhält eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M_{(\mathfrak{p})} \rightarrow R_{(\mathfrak{p})}^{r_{d+1}} \rightarrow \dots \rightarrow R_{(\mathfrak{p})}^{r_1} \rightarrow 0.$$

Also ist $\mathcal{E}_x \cong M_{(\mathfrak{p})}$ ein freier $\mathcal{O}_{V,x}$ -Modul, d.h. \mathcal{E} ist ein lokalfreier \mathcal{O}_V -Modul endlichen Rangs. Nach Voraussetzung gibt es daher $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}$ mit $\mathcal{E} \cong \bigoplus_{i=1}^s \mathcal{O}_V(n_i)$, d.h. M ist ein graduiert freier R -Modul. Somit ergibt sich aus $(*)$, daß k als R -Modul eine endliche projektive Dimension besitzt, und hieraus, daß R ein regulärer Ring ist (vgl. [K3], VII (2.3)).

Da \mathfrak{M} von homogenen Elementen ersten Grades erzeugt wird, gibt es ein homogenes Parametersystem von R , das aus Elementen vom Grad eins besteht, und es gilt

$$R \cong \text{gr}_{\mathfrak{M}}(R) \cong k[X_0, \dots, X_d] \quad (\text{vgl. [K3], V (5.10)}).$$

Also ist $V \cong \mathbb{P}_k^d$ und $\mathcal{O}_V \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(n)$ mit $n \geq 1$. Da das Bild von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1)$ auf V die Eigenschaft (a) besitzt, kann nur $n = 1$ sein, d.h. V ist ein linearer Teilraum von \mathbb{P}_k^r .

q.e.d.

Im Fall $V = \mathbb{P}_k^2$ läßt sich das Zerfallungskriterium für lokalfreie Modulgarben vom Rang zwei mit Hilfe 0-dimensionaler Nullstellenschemata umformulieren. Dazu benötigen wir zunächst ein Lemma.

(9.5) LEMMA.

Sei $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^r$, und sei \mathcal{E} ein kohärenter $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul. Dann gilt für alle $i \geq 1$ und alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$\bigwedge^i(\mathcal{E}(n)) \cong (\bigwedge^i \mathcal{E})(in)$$

BEWEIS:

Sei $R := \Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = k[\mathbb{P}]$, und sei $M := \Gamma_*(\mathcal{E})$. Dann ist M ein endlich erzeugter graduerter R -Modul mit $\mathcal{E}(n) \cong \widetilde{M}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. (Dabei ist $M(n)$ der graduierte

R -Modul mit $M(n)_i = M_{i+n}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.) Ist $i \geq 1$ und $x \in R$ homogen vom Grad eins, so hat man einen kanonischen Isomorphismus von $R_{(x)}$ -Moduln

$$\begin{aligned} \bigwedge^i(M_{(x)}) &\xrightarrow{\sim} (\bigwedge^i M)_{(x)} \\ \frac{m_1}{x^{s_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{m_i}{x^{s_i}} &\longmapsto \frac{m_1 \wedge \cdots \wedge m_i}{x^{s_1 + \cdots + s_i}} \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\bigwedge^i \mathcal{E} \cong \widetilde{\bigwedge^i M}$ für alle $i \geq 1$. Schließlich liefert der kanonische Isomorphismus graduerter R -Moduln

$$\begin{aligned} \bigwedge^i(M(n)) &\xrightarrow{\sim} (\bigwedge^i M)(in) \\ m_1 \wedge \cdots \wedge m_i &\longmapsto m_1 \wedge \cdots \wedge m_i \end{aligned}$$

die Behauptung. **q.e.d.**

(9.6) SATZ.

Sei $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^2$, sei \mathcal{E} ein lokalfreier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang zwei, und sei $e := \deg(\det \mathcal{E}) - 3$.

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) \mathcal{E} zerfällt in eine direkte Summe zweier invertierbarer $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduln.
- (b) Es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ sowie einen Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}(n))$, dessen Nullstellenschema $Y = (s)_o$ ein 0-dimensionales arithmetisches Gorensteinschema ist, das nicht die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2n + e + 1)$ besitzt.
- (c) Es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ sowie einen Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}(n))$, dessen Nullstellenschema $Y = (s)_o$ 0-dimensional ist, eine symmetrische Hilbertfunktion hat und $a_Y = 2n + e$ erfüllt.
- (d) Es gilt $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{E}(k)) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS:

“(a) \implies (b)” Sei $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(b)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Wähle $n > \max\{-a, -b\}$ und $s = (s_1, s_2) \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}(n))$ so, daß die beiden Kurven $C_1 = (s_1)_o$ und $C_2 = (s_2)_o$ keine Komponente gemeinsam haben. Dann ist $Y = (s)_o = C_1 \cap C_2$ ein 0-dimensionaler vollständiger Durchschnitt, und nach (8.8.b) somit ein arithmetisches Gorensteinschema. Nach Beispiel (7.11) gilt ferner $a_Y = 2n + a + b - 3 = 2n + e$, so daß Y nach (8.1.c) nicht die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2n + e + 1)$ hat.

“(b) \implies (c)” Nach Satz (8.9) hat jedes 0-dimensionale arithmetische Gorensteinschema eine symmetrische Hilbertfunktion und erfüllt $a_Y = c_Y$. Die Bemerkung (8.3.a) und die Voraussetzung zeigen $c_Y = \deg(\det \mathcal{E}(n)) - 3 = 2n + e$.

“(c) \implies (d)” Der Koszulkomplex zu s liefert für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine kurze exakte Sequenz

$$(*) \quad 0 \rightarrow (\det \mathcal{E}^\vee)(-2n + k) \rightarrow \mathcal{E}^\vee(-n + k) \rightarrow \mathcal{J}_Y(k) \rightarrow 0$$

wenn man $(\mathcal{E}(n))^\vee \cong \mathcal{E}^\vee(-n)$ und $\det(\mathcal{E}^\vee(-n)) \cong (\det \mathcal{E}^\vee)(-2n)$ beachtet. Mit Hilfe der langen Kohomologiesequenz zu (*) und der Tatsache $h^1(\det \mathcal{E}^\vee)(-2n + k) = 0$ berechnen wir nun für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$h^1 \mathcal{E}^\vee(-n + k) = h^1 \mathcal{J}_Y(k) - h^2(\det \mathcal{E}^\vee)(-2n + k) + h^2 \mathcal{E}^\vee(-n + k) - h^2 \mathcal{J}_Y(k)$$

was wir auf Grund der langen exakten Kohomologiesequenz zur kanonischen exakten Sequenz

$$(**) \quad 0 \rightarrow \mathcal{J}_Y \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

und des von der nicht ausgearteten Paarung $\wedge: \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \rightarrow \det \mathcal{E}$ induzierten Isomorphismus $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^\vee \otimes \det \mathcal{E} \cong \mathcal{E}^\vee(e+3)$ (vgl. [Ha1], II ex. (5.16)) auch schreiben können als

$$h^1 \mathcal{E}^\vee(-n+k) = h^1 \mathcal{J}_Y(k) - h^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2n+k-e-3) + h^2 \mathcal{E}(-n+k-e-3) - h^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k).$$

Jetzt verwenden wir den Serreschen Dualitätssatz (2.4.c) an und erhalten

$$h^1 \mathcal{E}^\vee(-n+k) = h^1 \mathcal{J}_Y(k) - h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2n+e-k) + h^0 \mathcal{E}^\vee(n-k+e) - h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k-3)$$

was sich mittels der langen exakten Kohomologiesequenzen zu (*) und (**) wie folgt vereinfachen läßt:

$$\begin{aligned} h^1 \mathcal{E}^\vee(-n+k) &= h^1 \mathcal{J}_Y(k) - h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_Y - k) + h^0(\det \mathcal{E}^\vee)(-k+e) + h^0 \mathcal{J}_Y(2n+e-k) \\ &\quad - h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k-3) \\ &= h^1 \mathcal{J}_Y(k) - \dim_k k[Y]_{a_Y-k} \\ &= \deg Y - \dim_k k[Y]_k - \dim_k k[Y]_{a_Y-k} \end{aligned}$$

Da Y eine symmetrische Hilbertfunktion hat, folgt

$$h^1 \mathcal{E}(n-k-3) = h^1 \mathcal{E}^\vee(-n+k) = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

“(d) \implies (a)” Vgl. Satz (9.4).

q.e.d.

Auch im Fall $V = \mathbb{P}_k^3$ erhält man ein präziseres Zerfallungskriterium, wenn man in einem geeigneten “Twist” von \mathcal{E} einen “guten” globalen Schnitt findet.

(9.7) SATZ.

Sei $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^3$, sei \mathcal{E} ein lokalfreier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang drei, und sei $e := \deg(\det \mathcal{E}) - 4$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) \mathcal{E} zerfällt in eine direkte Summe dreier invertierbarer $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduln.
- (b) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{E}(k)) = 0$, und es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ sowie einen Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}(n))$, dessen Nullstellenschema $Y = (s)_o$ ein 0-dimensionales arithmetisches Gorensteinschema ist, das nicht die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(3n+e+1)$ besitzt.
- (c) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{E}(k)) = 0$, und es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ sowie einen Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}(n))$, dessen Nullstellenschema $Y = (s)_o$ 0-dimensional ist, eine symmetrische Hilbertfunktion hat und $a_Y = 3n+e$ erfüllt.
- (d) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{E}(k)) = H^2(\mathbb{P}, \mathcal{E}(k)) = 0$.

BEWEIS:

“(a) \implies (b)”, “(b) \implies (c)” und “(d) \implies (a)” folgen wie in (9.6).

“(c) \implies (d)” Aus dem Koszulkomplex zu s und den Isomorphismen $\bigwedge^2(\mathcal{E}^\vee(-n)) \cong \cong (\bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee)(-2n)$ und $\det(\mathcal{E}^\vee(-n)) \cong (\det \mathcal{E}^\vee)(-3n)$ erhält man für jedes $k \in \mathbb{Z}$ exakte Sequenzen

$$(*) \quad 0 \rightarrow (\det \mathcal{E}^\vee)(-3n+k) \rightarrow (\bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee)(-2n+k) \rightarrow \mathcal{K}(k) \rightarrow 0$$

und

$$(**) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K}(k) \rightarrow \mathcal{E}^\vee(-n+k) \rightarrow \mathcal{J}_Y(k) \rightarrow 0$$

wenn man $\mathcal{K} := \ker s^\vee$ setzt. Die nicht ausgeartete Paarung $\bigwedge: \mathcal{E} \otimes \bigwedge^2 \mathcal{E} \rightarrow \det \mathcal{E}$ induziert einen Isomorphismus $\bigwedge^2 \mathcal{E} \cong \mathcal{E}^\vee \otimes \det \mathcal{E} \cong \mathcal{E}^\vee(e+4)$, und analog hat man einen Isomorphismus $\bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee \cong \mathcal{E} \otimes \det \mathcal{E}^\vee \cong \mathcal{E}(-e-4)$ (vgl. [Ha1], II ex. (5.16)). Unter Verwendung der langen exakten Kohomologiesequenzen zu (*) und (**) sowie der Verschwindungseigenschaften

$$(1) \quad h^1(\det \mathcal{E}^\vee)(k) = h^2(\det \mathcal{E}^\vee)(k) = 0$$

$$(2) \quad h^2 \mathcal{J}_Y(k) = 0, \quad h^3 \mathcal{J}_Y(k) = h^3 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)$$

$$\text{(aus der langen Kohomologiesequenz zu } 0 \rightarrow \mathcal{J}_Y(k) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k) \rightarrow \mathcal{O}_Y(k) \rightarrow 0)$$

$$(3) \quad h^1(\bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee)(k) = h^1 \mathcal{E}(k-e-4) = 0$$

$$(4) \quad h^1 \mathcal{K}(k) = 0 \quad \text{(aus (**))}$$

und

$$(5) \quad h^2 \mathcal{E}^\vee(k) = h^1 \mathcal{E}(-k-4) = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

berechnen wir nun:

$$\begin{aligned} h^1 \mathcal{J}_Y(k) &= h^1 \mathcal{E}^\vee(-n+k) + h^2 \mathcal{K}(k) \\ &= h^1 \mathcal{E}^\vee(-n+k) + h^2(\bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee)(-2n+k) + h^3(\det \mathcal{E}^\vee)(-3n+k) - h^3(\bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee)(-2n+k) \\ &\quad + h^3 \mathcal{K}(k) \\ &= h^1 \mathcal{E}^\vee(-n+k) + h^2 \mathcal{E}(-2n+k-e-4) + h^3 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-3n+k-e-4) - h^3 \mathcal{E}(-2n+k-e-4) \\ &\quad + h^3 \mathcal{E}^\vee(-n+k) - h^3 \mathcal{J}_Y(k) \end{aligned}$$

Jetzt wenden wir den Serreschen Dualitätssatz (2.4.c), (2) und noch einmal die lange exakte Kohomologiesequenz zu (*) an und erhalten:

$$\begin{aligned} h^1 \mathcal{J}_Y(k) &= h^1 \mathcal{E}^\vee(-n+k) + h^1 \mathcal{E}^\vee(2n-k+e) + h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(3n-k+e) - h^0 \mathcal{E}^\vee(2n-k+e) \\ &\quad + h^0 \mathcal{E}(n-k-4) - h^3 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k) \\ &= h^1 \mathcal{E}^\vee(-n+k) + h^1 \mathcal{E}^\vee(2n-k+e) + h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(3n-k+e) - h^0 \mathcal{J}_Y(3n-k+e) \\ &\quad - h^0 \mathcal{K}(3n-k+e) + h^0 \mathcal{E}(n-k-4) - h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k-4) \end{aligned}$$

Für $k > rn + e$ gilt dann

$$\begin{aligned} h^1 \mathcal{E}^\vee(-n+k) &= 0 && \text{wegen } -n+k > (r-1)n+e \geq M_1, \\ h^2(\wedge^2 \mathcal{E}^\vee)(-2n+k) &= 0 && \text{wegen } -2n+k > (r-2)n+e \geq M_2, \\ &\vdots \\ h^{r-1}(\wedge^{r-1} \mathcal{E}^\vee)(-(r-1)n+k) &= 0 && \text{wegen } -(r-1)n+k > n+e \geq M_{r-1}. \end{aligned}$$

Aus den langen exakten Kohomologiesequenzen zu (*) folgt nun $h^1 \mathcal{J}_Y(k) = 0$ für alle $k > rn + e$. Mit Bemerkung (8.3.a) und Satz (7.9.e) erhalten wir also die folgende Ungleichungskette:

$$rn + e = \deg(\det \mathcal{E}(n)) - r - 1 \leq c_Y \leq a_Y = \max \{k \in \mathbb{N} : h^1 \mathcal{J}_Y(k) \neq 0\} \leq rn + e$$

Somit gilt $a_Y = c_Y = rn + e$ wie behauptet.

q.e.d.

(9.9) SATZ.

Sei $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^r$. Für einen lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul \mathcal{E} vom Rang r sei $a_1 \geq \dots \geq a_r$ der generische Spaltungstyp von \mathcal{E} (d.h. $\mathcal{E}|_L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r)$ für eine allgemeine Gerade $L \subseteq \mathbb{P}$, vgl. [Ha1], V ex. (2.6) und [OSS], I (2.2.3)), und sei $d(\mathcal{E}) := a_1 - a_r$. Dann gibt es ein Polynom $P_r \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ mit

$$\max \left\{ \frac{1}{r-1}(M_1 - e), \frac{1}{r-2}(M_2 - e), \dots, (M_{r-1} - e) \right\} \leq P_r(c_1(\mathcal{E}), c_2(\mathcal{E}), d(\mathcal{E}))$$

für jeden lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul \mathcal{E} vom Rang r , wenn man M_1, \dots, M_r und e wie in (9.8) definiert.

BEWEIS:

Bekanntlich gibt es ein Polynom

$$\tilde{Q}_1(X, Y, Z) = \sum_{\lambda, \mu, \nu} q_{\lambda, \mu, \nu} X^\lambda Y^\mu Z^\nu \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$$

mit $\max \{n \in \mathbb{Z} : h^i(\mathcal{E}^\vee(n)) \neq 0\} \leq \tilde{Q}_1(c_1(\mathcal{E}^\vee), c_2(\mathcal{E}^\vee), d(\mathcal{E}^\vee))$ für jeden lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul \mathcal{E} vom Rang r und alle $i \geq 1$ (vgl. [EF], (3.3.b) im komplex-analytischen Fall; der allgemeine Fall folgt ebenso, wenn man [Bro], §4 beachtet). Setze

$$Q_1(X, Y, Z) := \sum_{\lambda, \mu, \nu} q_{\lambda, \mu, \nu}^2 X^{2\lambda} Y^{2\mu} Z^{2\nu} \in \mathbb{Z}[X, Y, Z].$$

Berücksichtigt man $c_1(\mathcal{E}^\vee) = -c_1(\mathcal{E})$, $c_2(\mathcal{E}^\vee) = c_2(\mathcal{E})$ (vgl. [Ha1], App. A, §3 (C5)), $d(\mathcal{E}^\vee) = d(\mathcal{E})$ (da \mathcal{E}^\vee den generischen Spaltungstyp $-a_r \geq \dots \geq -a_1$ hat) und

$$\begin{aligned} Q_1(x, y, z) &\geq \sum_{\lambda, \mu, \nu} |q_{\lambda, \mu, \nu} x^\lambda y^\mu z^\nu| \\ &\geq \left| \sum_{\lambda, \mu, \nu} q_{\lambda, \mu, \nu} (-x)^\lambda y^\mu z^\nu \right| \\ &\geq \tilde{Q}_1(-x, y, z) \end{aligned} \quad \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{Z},$$

so folgt $\max \{n \in \mathbb{Z} : h^i(\mathcal{E}^\vee(n)) \neq 0\} \leq Q_1(c_1(\mathcal{E}), c_2(\mathcal{E}), d(\mathcal{E}))$ für alle lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduln \mathcal{E} vom Rang r und alle $i \geq 1$, also insbesondere $M_1 \leq Q_1(c_1(\mathcal{E}), c_2(\mathcal{E}), d(\mathcal{E}))$. Offensichtlich nimmt die Funktion $z \mapsto Q_1(x, y, z)$ für $z \in \mathbb{N}$ und feste $x, y \in \mathbb{Z}$ monoton zu.

Nach [OSS], S. 16 gibt es für $i \geq 1$ Polynome $R_i(X) \in \mathbb{Z}[X]$ und $S_i(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$ mit $c_1(\wedge^i \mathcal{E}) = R_i(c_1(\mathcal{E}))$ und $c_2(\wedge^i \mathcal{E}) = S_i(c_1(\mathcal{E}), c_2(\mathcal{E}))$ für alle lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduln \mathcal{E} vom Rang r .

Wegen $(\wedge^i \mathcal{E})|_L \cong \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_{j_1} + \dots + a_{j_i})$ und $ia_r \leq a_{j_1} + \dots + a_{j_i} \leq ia_1$ gilt $d(\wedge^i \mathcal{E}) \leq i \cdot d(\mathcal{E})$. Definiert man $Q_i(X, Y, Z) := Q_1(R_i(X), S_i(X, Y), iZ)$, so folgt nun für alle lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduln \mathcal{E} vom Rang r :

$$\begin{aligned} Q_i(c_1(\mathcal{E}), c_2(\mathcal{E}), d(\mathcal{E})) &= Q_1(R_i(c_1(\mathcal{E})), S_i(c_1(\mathcal{E}), c_2(\mathcal{E})), i \cdot d(\mathcal{E})) \\ &= Q_1(c_1(\wedge^i \mathcal{E}), c_2(\wedge^i \mathcal{E}), i \cdot d(\mathcal{E})) \\ &\geq Q_1(c_1(\wedge^i \mathcal{E}), c_2(\wedge^i \mathcal{E}), d(\wedge^i \mathcal{E})) \\ &\geq M_i \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

q.e.d.

Mit Hilfe dieser beiden Resultate kann man jetzt leicht in (9.6) und (9.7) eine weitere äquivalente Bedingung angeben:

(9.10) KOROLLAR.

In der Situation von Satz (9.6) definiere $P_2 \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ und $d(\mathcal{E})$ gemäß (9.9). Dann sind die Bedingungen (a) – (d) auch äquivalent mit:

(e) Es gibt ein $n \geq P_2(c_1(\mathcal{E}), c_2(\mathcal{E}), d(\mathcal{E}))$ und einen regulären Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}(n))$, dessen Nullstellenschema $Y = (s)_o$ eine symmetrische Hilbertfunktion besitzt.

(9.11) KOROLLAR.

In der Situation von Satz (9.7) definiere $P_3 \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ und $d(\mathcal{E})$ gemäß (9.9). Dann sind die Bedingungen (a) – (d) auch äquivalent mit:

(e) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{E}(k)) = 0$, und es gibt ein $n \geq P_3(c_1(\mathcal{E}), c_2(\mathcal{E}), d(\mathcal{E}))$ sowie einen regulären Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}(n))$, dessen Nullstellenschema $Y = (s)_o$ eine symmetrische Hilbertfunktion besitzt.

§ 10 Punkte im Raum

Dieser abschließende Paragraph behandelt die Charakterisierung 0-dimensionaler Nullstellenschemata im Raum. Das Hauptresultat (10.3) besagt, daß ein 0-dimensionales Schema $Y \subseteq \mathbb{P}_k^3$ genau dann das Nullstellenschema eines globalen Schnitts eines lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduls \mathcal{E} vom Rang drei mit sehr guten globalen Schnitten ist, wenn Y auf einer Gorensteinkurve C einen subkanonischen Divisor definiert und die CBE bzgl. ω_C hat. Man beachte, daß Gorensteinkurven in \mathbb{P}^3 dasselbe sind wie lokal vollständige Durchschnitte. Einige Beispiele demonstrieren die Anwendbarkeit dieser Charakterisierung.

Am Ende geben wir noch eine Cayley-Bacharach-Charakterisierung 0-dimensionaler vollständiger Durchschnitte im Raum, die man durch Anwendung des Zerfällungskriteriums (9.7) auf die Charakterisierung 0-dimensionaler Nullstellenschemata erhält, und veranschaulichen auch diese mit Beispielen.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^3$, und sei Y ein 0-dimensionales Unterschema von \mathbb{P} . Eine Definition und Charakterisierung lokalfreier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduln vom Rang drei mit sehr guten globalen Schnitten findet der Leser in Anhang C.

Die Frage der Charakterisierung 0-dimensionaler Nullstellenschemata im Raum wurde erstmals in [Ha3], S. 1030 aufgeworfen. Der hier angewandte Lösungsansatz stammt aus [GH2], Appendix III und verwendet die Konstruktionen [Ha4], (4.1) sowie [C], (1.1).

(10.1) DEFINITION:

Für jeden torsionsfreien kohärenten $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul \mathcal{F} sei die **Determinante** $\det \mathcal{F}$ von \mathcal{F} wie folgt definiert (vgl. [Ha4], § 1):

Es gibt eine abgeschlossene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{P}$ mit $\text{codim}(V, \mathbb{P}) \geq 2$, so daß \mathcal{F} auf $U := \mathbb{P} \setminus V$ lokalfrei ist. Sei $\det \mathcal{F}$ der eindeutig bestimmte invertierbare $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul, der $\det(\mathcal{F}|_U)$ auf ganz \mathbb{P} fortsetzt.

(10.2) BEMERKUNG:

- (a) Ist \mathcal{F} ein torsionsfreier kohärenter $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang r , so ist $\det \mathcal{F} \cong (\bigwedge^r \mathcal{F})^{\sim\sim}$.
- (b) Ist $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz torsionsfreier kohärenter $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduln, so gilt $\det \mathcal{F} \cong \det \mathcal{F}' \otimes \det \mathcal{F}''$.
- (c) Ist \mathcal{F} ein reflexiver $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang zwei, so hat man kanonische Isomorphismen $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^{\sim} \otimes \det \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{\sim} \cong \mathcal{F} \otimes \det \mathcal{F}^{\sim}$.

BEWEIS:

“(a)” Die Garbe $(\bigwedge^r \mathcal{F})^{\sim\sim}$ ist ein reflexiver $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang eins, also invertierbar nach [Ha4], (1.9). Sie setzt $\det(\mathcal{F}|_U)$ auf ganz \mathbb{P} fort.

“(b)” Seien U bzw. U' bzw. U'' zu \mathcal{F} bzw. \mathcal{F}' bzw. \mathcal{F}'' wie in (10.1) gegeben. Setze $\tilde{U} := U \cap U' \cap U''$. Dann ist auch $\text{codim}(\mathbb{P} \setminus \tilde{U}, \mathbb{P}) \geq 2$, und die Behauptung folgt aus der für lokalfreie $\mathcal{O}_{\tilde{U}}$ -Moduln bekannten Regel $\det(\mathcal{F}|_{\tilde{U}}) \cong \det(\mathcal{F}'|_{\tilde{U}}) \otimes \det(\mathcal{F}''|_{\tilde{U}})$.

“(c)” Vgl. [Ha4], (1.10).

q.e.d.

(10.3) LEMMA.

Sei \mathcal{F} ein reflexiver $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang zwei, und sei $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F})$ ein globaler Schnitt mit rein 1-dimensionalem Nullstellenschema $C := (s)_o$, so daß die Sequenz

$$(*) \quad 0 \rightarrow \det \mathcal{F}^\vee \xrightarrow{(\wedge s)^\vee} \mathcal{F}^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{J}_C \rightarrow 0$$

exakt ist. Wendet man auf $(*)$ den Funktor $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(-, \det \mathcal{F}^\vee)$ sowie die Isomorphismen $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{J}_C, \det \mathcal{F}^\vee) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \otimes \det \mathcal{F}^\vee \cong \det \mathcal{F}^\vee$ und $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{F}^\vee, \det \mathcal{F}^\vee) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \otimes \det \mathcal{F}^\vee \cong \mathcal{F} \otimes \det \mathcal{F}^\vee$ an, so erhält man eine exakte Sequenz

$$(**) \quad 0 \rightarrow \det \mathcal{F}^\vee \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \otimes \det \mathcal{F}^\vee \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}.$$

Dann gilt:

Unter dem Isomorphismus $\psi: \mathcal{F} \otimes \det \mathcal{F}^\vee \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^\vee$ aus (10.2.c) identifiziert sich φ mit der Abbildung $(\wedge s)^\vee$ in $(*)$.

BEWEIS:

Da \mathcal{F} auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{P}$ mit $\text{codim}(\mathbb{P} \setminus U, \mathbb{P}) \geq 2$ lokalfrei ist, und da die Restriktionsabbildung $H^0(V, \mathcal{F}^\vee) \rightarrow H^0(V \cap U, \mathcal{F}^\vee)$ für jede offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{P}$ einen Isomorphismus darstellt (vgl. [Ha4], (1.6)), genügt es, die Behauptung auf U zu beweisen. Wir zeigen, daß für jeden Punkt $P \in U$ die Gleichung $\psi_P \circ \varphi_P = (\wedge s)_{\check{P}}$ gilt.

Sei $\{e_1, e_2\}$ eine $\mathcal{O}_{\mathbb{P}, P}$ -Basis von \mathcal{F}_P , sei $\{e_1^\vee, e_2^\vee\}$ die dazu duale Basis von \mathcal{F}_P^\vee , und sei $s_P = t_1 e_1 + t_2 e_2$ mit $t_1, t_2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}, P}$. Dann ist die Abbildung $(\wedge s)_{\check{P}}: \det \mathcal{F}_P^\vee \rightarrow \mathcal{F}_P^\vee$ durch

$$(\wedge s)_{\check{P}}(e_1^\vee \wedge e_2^\vee) = -t_2 e_1^\vee + t_1 e_2^\vee$$

eindeutig festgelegt. Die zu $s_{\check{P}}: \det \mathcal{F}_P^\vee \rightarrow \mathcal{J}_{C, P}$ duale Abbildung ist $s_P: \mathcal{O}_{\mathbb{P}, P} \rightarrow \mathcal{F}_P$ ($1 \mapsto t_1 e_1 + t_2 e_2$). Da φ_P aus s_P nach Konstruktion durch Tensorieren mit $\det \mathcal{F}_P^\vee$ entsteht, wird φ_P durch

$$\varphi_P(e_1^\vee \wedge e_2^\vee) = t_1 e_1 \otimes (e_1^\vee \wedge e_2^\vee) + t_2 e_2 \otimes (e_1^\vee \wedge e_2^\vee) \in \mathcal{F}_P \otimes \det \mathcal{F}_P^\vee$$

beschrieben. Der Isomorphismus $\psi_P: \mathcal{F}_P \otimes \det \mathcal{F}_P^\vee \rightarrow \mathcal{F}_P^\vee$ wird von der nicht ausgearteten Paarung $\mathcal{F}_P \otimes \mathcal{F}_P \rightarrow \det \mathcal{F}_P$ ($e_i \otimes e_j \mapsto e_i \wedge e_j$) induziert und erfüllt daher

$$\psi_P(e_1 \otimes (e_1^\vee \wedge e_2^\vee)) = e_2^\vee \quad \text{ sowie } \quad \psi_P(e_2 \otimes (e_1^\vee \wedge e_2^\vee)) = -e_1^\vee.$$

Insgesamt folgt $\psi_P \circ \varphi_P(e_1^\vee \wedge e_2^\vee) = t_1 e_2^\vee - t_2 e_1^\vee = (\wedge s)_{\check{P}}(e_1^\vee \wedge e_2^\vee)$, also die Behauptung.

q.e.d.

(10.4) SATZ.

Sei $e \in \mathbb{Z}$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- (a) Y ist das Nullstellenschema eines globalen Schnitts eines lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduls \mathcal{E} vom Rang drei mit sehr guten globalen Schnitten und mit $\deg(\det \mathcal{E}) = e + 4$.
- (b) Es gibt eine Gorensteinkurve $C \subseteq \mathbb{P}$, die Y umfaßt, so daß Y das Nullstellenschema eines globalen Schnitts u von $\omega_C(-e)$ ist, und es gibt einen globalen Schnitt $v \in H^0(C, \omega_C(-e))$, der $\omega_C(-e)$ in den Punkten von Y erzeugt.

BEWEIS:

“(a) \implies (b)” Sei $Y = (s)_o$ mit $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ und $\mathcal{F} := \ker s^\vee$. Dann hat man eine exakte Sequenz

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{J}_Y \rightarrow 0$$

und nach Lemma (C8.a) ist \mathcal{F} ein reflexiver $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang zwei mit $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong \mathcal{O}_Y$. Nach Satz (C11) gibt es einen weiteren regulären globalen Schnitt $s' \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$, so daß $C := (s \wedge s')_o$ eine Gorensteinkurve ist, die nach Lemma (C9.c) das Schema Y umfaßt. Setzt man $t := H^0(i^\vee)(s') \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F})$, so ist C nach Lemma (C8.b) auch das Nullstellenschema von t .

Wir schließen jetzt mit der Methode von [Ha4], (4.1), daß Y das Nullstellenschema eines globalen Schnitts von $\omega_C(-e)$ ist. Betrachte $\mathcal{L} := \ker t^\vee$. Nach [Ha4], (1.5) ist \mathcal{L} ein reflexiver $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang eins, nach [Ha4], (1.9) ist \mathcal{L} damit ein invertierbarer $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul, und nach (1) und (10.2.b) folgt

$$\mathcal{L} \cong \det \mathcal{F} \cong \det \mathcal{E}^\vee \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4).$$

Also hat man eine exakte Sequenz

$$(2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4) \xrightarrow{j} \mathcal{F} \xrightarrow{t^\vee} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0.$$

Dualisieren liefert die exakte Sequenz

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{t} \mathcal{F}^\vee \xrightarrow{j^\vee} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(e+4) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \rightarrow 0.$$

Mit Hilfe der kanonischen Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ berechnet man

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^2(\mathcal{O}_C, \omega_{\mathbb{P}}) \otimes \omega_{\mathbb{P}}^\vee \cong \omega_C(4).$$

Indem man die exakte Sequenz (1) von dem Koszulkomplex (C8)(7) zu s^\vee abspaltet, erhält man eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \det \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{(\wedge s)^\vee} \bigwedge^2 \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{i^\vee} \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Hiermit und mit Hilfe des Koszulkomplexes (C8)(4) zu s berechnet man:

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong \text{coker}(\wedge s) \cong \det \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_Y(e+4)$$

Also folgt aus (3) durch Tensorieren mit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)$ die Exaktheit der Sequenz

$$(4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4) \xrightarrow{\tilde{j}} \mathcal{F}^\vee(-e-4) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{\tilde{u}} \omega_C(-e) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0.$$

Wendet man die Isomorphismen $\mathcal{F}^\vee(-e-4) \cong \mathcal{F}^\vee \otimes \det \mathcal{F} \cong \mathcal{F}$ an, so folgt nach (10.3) die Gleichheit $\tilde{j} = j$, also $\text{coker } \tilde{j} \cong \mathcal{J}_C$, und durch Abspalten von (2) und $0 \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ von (4) erhält man eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{u} \omega_C(-e) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_Y \rightarrow 0.$$

Wenn man diese um einen Isomorphismus $\mathcal{O}_Y \cong \omega_C(-e) \otimes \mathcal{O}_Y$ so abändert, daß φ der kanonische Epimorphismus $\omega_C(-e) \rightarrow \omega_C(-e) \otimes \mathcal{O}_Y$ wird, so ergibt sich, daß Y das Nullstellenschema des globalen Schnitts $u \in H^0(C, \omega_C(-e))$ ist.

Schließlich ist noch der globale Schnitt $v \in H^0(C, \omega_C(-e))$ zu konstruieren. Dazu betrachten wir das 0-dimensionale Unterschema $Y' := (s')_o$ von \mathbb{P} . Nach Lemma (C9.b) ist $Y \cap Y' = \emptyset$. Analog wie eben konstruieren wir einen globalen Schnitt v von $\omega_C(-e)$, der Y' zum Nullstellenschema hat. Insbesondere erzeugt v die Garbe $\omega_C(-e)$ in den Punkten von Y .

“(b) \implies (a)” Wegen $H^0(C, \omega_C(-e)) \cong H^1(C, \mathcal{O}_C(e))^* \cong H^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}_C(e))^* \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^2(\mathcal{O}_C(e), \omega_{\mathbb{P}}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4))$ kann man u durch eine Erweiterung

$$(5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4) \xrightarrow{j} \mathcal{F} \xrightarrow{t^\vee} \mathcal{J}_C \rightarrow 0$$

mit einem torsionsfreien kohärenten $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul \mathcal{F} und $t \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}^\vee)$ repräsentieren. Wie in [Ha4], (4.1) zeigen wir, daß \mathcal{F} ein reflexiver und außerhalb von Y lokalfreier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul ist.

Wir wenden den Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(-, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4))$ auf die Sequenz (5) an und beachten $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4) \cong \det \mathcal{F}$ (vgl. (5) sowie (10.2.c)). Es ergibt sich die exakte Sequenz

$$(6) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4) \rightarrow \mathcal{F}^\vee \otimes \det \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{\tilde{u}} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)) \rightarrow 0.$$

Für jeden Punkt $P \in \mathbb{P}$ folgt nun durch Halmbildung die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)_P \rightarrow \mathcal{F}_P^\vee \otimes \det \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P},P} \xrightarrow{\tilde{u}_P} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P},P}}^1(\mathcal{J}_{C,P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)_P) \\ \xrightarrow{\varepsilon_P} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P},P}}^1(\mathcal{F}_P, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)_P) \rightarrow 0.$$

Nach Konstruktion repräsentiert $\tilde{u}_P(1)$ die in P lokalisierte Sequenz (5), das heißt $\tilde{u}_P(1) = u_P$. Für Punkte $P \notin Y$ erzeugt u_P den $\mathcal{O}_{\mathbb{P},P}$ -Modul $\omega_C(-e)_P \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P},P}}^1(\mathcal{J}_{C,P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)_P)$. Aus der obigen exakten Sequenz folgt in diesem Fall $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P},P}}^1(\mathcal{F}_P, \mathcal{O}_{\mathbb{P},P}) \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P},P}}^1(\mathcal{F}_P, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)_P) = 0$.

Da C eine Gorensteinkurve ist, gilt Tiefe $\mathcal{O}_{\mathbb{P},P}(\mathcal{F}_P) \geq 2$ für alle $P \in \mathbb{P}$ (vgl. (5)). Also ist \mathcal{F} lokalfrei außerhalb Y , und nach [Ha4], (1.3) ist \mathcal{F}_P für $P \in Y$ ein reflexiver $\mathcal{O}_{\mathbb{P},P}$ -Modul. Insgesamt ist \mathcal{F} ein reflexiver und außerhalb Y lokalfreier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul.

Wie in [C], (1.1) konstruieren wir jetzt eine Erweiterung

$$(7) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{J}_Y \rightarrow 0$$

mit einem lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul \mathcal{E} vom Rang drei mit $\deg(\det \mathcal{E}) = e + 4$ und $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$. Dazu verwende die Isomorphismen (vgl. (5) und (10.2.c))

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)) \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F} \otimes \det \mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$$

und schreibe den Epimorphismus ε aus (6) als

$$\varepsilon: \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}).$$

Der Morphismus $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)) \xrightarrow{\mathcal{H}om(t^\vee)} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{F} \otimes \det \mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ (vgl. (5) und (10.2.c)) induziert einen Morphismus von Spektralsequenzen $(E_r^{pq}, E^n) \rightarrow (\tilde{E}_r^{pq}, \tilde{E}^n)$ mit

$$E_2^{pq} = H^p(\mathbb{P}, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^q(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4))) \implies E^n = \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^n(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4))$$

und

$$\tilde{E}_2^{pq} = H^p(\mathbb{P}, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^q(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})) \implies \tilde{E}^n = \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^n(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}).$$

Nach Konstruktion stimmen hierbei die Abbildungen $E_2^{p1} \rightarrow \tilde{E}_2^{p1}$ mit den Abbildungen $H^p(\varepsilon)$ überein ($p \geq 0$).

Auf Grund der Funktorialität der zugehörigen Eckenmorphisimen erhalten wir ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4))) & \xrightarrow{H^0(\varepsilon)} & H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})) \\ \downarrow & & \downarrow \partial \\ H^2(\mathbb{P}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4))) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{P}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})) \end{array}$$

Wegen $H^2(\mathbb{P}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4))) \cong H^2(\mathbb{P}, \mathcal{J}_C \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)) \cong \cong H^2(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)) = 0$ liegt das Bild von $v \in H^0(C, \omega_C(-e)) \cong H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^2(\mathcal{O}_C, \omega_{\mathbb{P}})(-e)) \cong H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)))$ unter $H^0(\varepsilon)$ im Kern von ∂ . Betrachte den folgenden Ausschnitt aus der exakten Sequenz der Terme niedrigen Grades zu $(\tilde{E}_r^{pq}, \tilde{E}^n)$:

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \xrightarrow{\delta} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})) \xrightarrow{\partial} H^2(\mathbb{P}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}))$$

Wegen $\partial(H^0(\varepsilon)(v)) = 0$ gibt es ein $e \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ mit $\delta(e) = H^0(\varepsilon)(v)$. Repräsentiere e durch eine Erweiterung

$$(8) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{s} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}^\vee \rightarrow 0$$

mit einem kohärenten $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul \mathcal{E} . Dualisieren von (8) liefert die exakte Sequenz

$$(9) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{\tilde{s}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{\eta} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \rightarrow 0.$$

Für jeden Punkt $P \in \mathbb{P}$ ist die lokalisierte Erweiterung e_P :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P},P} \xrightarrow{s_P} \mathcal{E}_P \rightarrow \mathcal{F}_P^\vee \rightarrow 0$$

offenbar das Bild von $1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{P},P}$ unter $\eta_P: \mathcal{O}_{\mathbb{P},P} \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P},P}}^1(\mathcal{F}_P^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P},P})$. Wegen $\mathrm{Supp}(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})) \subseteq Y$ ist also $(e_P)_{P \in Y} \in \bigoplus_{P \in Y} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P},P}}^1(\mathcal{F}_P^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P},P}) \cong \cong H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}))$ das Bild von 1 unter η . Der kanonische Eckenmorphismus $\delta: \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}))$ bildet e bekanntlich in $(e_P)_{P \in Y}$ ab, das heißt es gilt $(e_P)_{P \in Y} = H^0(\varepsilon)(v)$.

Nach Voraussetzung erzeugt v die Garbe $\omega_C(-e)$ in den Punkten von Y . Also erzeugt $H^0(\varepsilon)(v)$ die Garbe $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$, das heißt aus (9) folgt $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0$. Wegen

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^i(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^i(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^i(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0$$

für $i \geq 2$ (vgl. (8) und (5)) ist \mathcal{E} damit ein lokalfreier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang drei, und es gilt $\det \mathcal{E} \cong \det \mathcal{F}^\vee \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(e+4)$ (vgl. (8) und (5)).

Erneut verwenden wir den Isomorphismus $\mathcal{F}^\vee \otimes \det \mathcal{F} \cong \mathcal{F}$ aus (10.2.c). Nach (10.3) identifiziert er die Abbildung $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4) \rightarrow \mathcal{F}^\vee \otimes \det \mathcal{F}$ aus (6) mit $j: \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4) \rightarrow \mathcal{F}$ aus (5). Also können wir die Sequenz (5) sowie die kanonische exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ von (6) abspalten und erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{\tilde{u}} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)) \rightarrow 0.$$

Wegen $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)) \cong \omega_C(-e)$ ($\tilde{u} \mapsto u$) und $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4)) \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F} \otimes \det \mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ ergibt sich dann die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{u} \omega_C(-e) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \rightarrow 0.$$

Da Y nach Voraussetzung das Nullstellenschema von u auf C ist, und da der Koszulkomplex zu u

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{u} \omega_C(-e) \rightarrow \omega_C(-e) \otimes \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

exakt ist, folgt $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong \mathcal{O}_Y$. Nachdem wir $\eta: \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong \mathcal{O}_Y$ um einen geeigneten Automorphismus von \mathcal{O}_Y abgeändert haben, können wir die Sequenz (9) also folgendermaßen schreiben

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{\text{kan.}} \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

und Abspalten der kanonischen Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{J}_Y \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$ von (9) liefert (7).

Schließlich ist noch zu zeigen, daß \mathcal{E} sehr gute globale Schnitte hat. Mittels (8) finde ein Urbild $s' \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ von $t \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}^\vee)$. Da der zu s gehörige Koszulkomplex (C8)(4) wegen (8) wie in (C8)(5) aufspaltet, stellt $s \wedge s' \in H^0(\mathbb{P}, \bigwedge^2 \mathcal{E})$ das Bild von t in $H^0(\mathbb{P}, \bigwedge^2 \mathcal{E})$ dar. Analog wie in (C8) konstruieren wir hieraus das kommutative Dreieck (C8)(6) und folgern $\mathcal{J}_C = \text{im } t^\vee = \text{im } (s \wedge s')^\vee$, d.h. C ist das Nullstellenschema von $s \wedge s' \in H^0(\mathbb{P}, \bigwedge^2 \mathcal{E})$. Nach Satz (C11) hat C dann sehr gute globale Schnitte. **q.e.d.**

(10.5) DEFINITION:

Sei $C \subseteq \mathbb{P}$ eine Gorensteinkurve. Ein Cartier-Divisor $D \in \text{Div}(C)$ heißt **subkanonisch**, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß $\mathcal{O}_C(D) \cong \omega_C(n)$ ist.

Im folgenden verwenden wir wie in § 5 die Sprechweisen und Ergebnisse von [Ha2], § 1 über Divisoren auf Gorensteinkurven.

(10.6) KOROLLAR. **(Die Cayley-Bacharach-Charakterisierung 0–dimensionaler Nullstellenschemata im Raum)**

Für ein 0–dimensionales Unterschema $Y \subseteq \mathbb{P}^3$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) Y ist das Nullstellenschema eines regulären Schnitts eines lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ –Moduls \mathcal{E} vom Rang drei mit sehr guten globalen Schnitten.
- (b) Es gibt eine Gorensteinkurve $C \subseteq \mathbb{P}^3$, die Y umfaßt, so daß Y das zu einem subkanonischen effektiven Cartier-Divisor $D \in \text{Div}(C)$ assoziierte abgeschlossene Unterschema ist und D ein fixpunktfreies vollständiges lineares System $|D|$ definiert.
- (c) Es gibt eine Gorensteinkurve $C \subseteq \mathbb{P}^3$, die Y umfaßt, so daß Y das zu einem subkanonischen effektiven Cartier-Divisor $D \in \text{Div}(C)$ assoziierte abgeschlossene Unterschema ist und $\mathcal{O}_C(D)$ von zwei globalen Schnitten erzeugt wird.
- (d) Es gibt eine Gorensteinkurve $C \subseteq \mathbb{P}^3$, die Y umfaßt, so daß Y das zu einem subkanonischen effektiven Cartier-Divisor assoziierte abgeschlossene Unterschema ist und die CBE bzgl. ω_C hat.

Schreibt man $\mathcal{O}_C(D) \cong \omega_C(-e)$ mit $e \in \mathbb{Z}$, so hat Y in diesem Fall auch die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(e)$, und für die Chernklassen von \mathcal{E} gilt $c_1(\mathcal{E}) = e + 4$, $c_2(\mathcal{E}) = \deg C$ sowie $c_3(\mathcal{E}) = \deg Y$.

BEWEIS:

“(a) \implies (b)” Nach (10.4) gibt es eine Gorensteinkurve $C \subseteq \mathbb{P}^3$, so daß Y das Nullstellenschema eines globalen Schnitts von $\omega_C(-e)$ mit $e := \deg(\det \mathcal{E}) - 4$ ist, d.h. Y ist das zu einem effektiven Cartier-Divisor $D \in \text{Div}(C)$ mit $\mathcal{O}_C(D) \cong \omega_C(-e)$ assoziierte abgeschlossene Unterschema. Insbesondere ist D subkanonisch. Weiter ist $Y' := (v)_o$ (mit v wie in (10.4.b)) ein zu Y disjunktes abgeschlossenes Unterschema von C , das zu einem effektiven Cartier-Divisor $D' \in \text{Div}(C)$ mit $D' \sim D$ assoziiert ist. Mithin hat $|D|$ keinen Fixpunkt.

“(b) \implies (c)” Sei $Y = (u)_o$ mit $u \in H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ und $\mathcal{O}_C(D) \cong \omega_C(-e)$ mit $e \in \mathbb{Z}$. Da $|D|$ fixpunktfrei ist, gibt es einen weiteren globalen Schnitt $v \in H^0(C, \omega_C(-e))$ mit $(u)_o \cap (v)_o = \emptyset$. Offenbar erzeugen u und v die Garbe $\omega_C(-e)$ in jedem Punkt.

“(c) \implies (d)” Vgl. Satz (5.7).

“(d) \implies (a)” Sei $Y = (u)_o$ mit $u \in H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$, wobei $D \in \text{Div}(C)$ ein effektiver Cartier-Divisor ist mit $\mathcal{O}_C(D) \cong \omega_C(-e)$ und $e \in \mathbb{Z}$. Nach Satz (5.7) erhalten wir einen weiteren globalen Schnitt $v \in H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$, der die Garbe $\mathcal{O}_C(D)$ in den Punkten von Y erzeugt. Nach (10.4) folgt dann die Behauptung.

Nach Satz (4.15) hat Y die CBE bzgl. $\omega_{\mathbb{P}^3} \otimes \det \mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(e)$. Die Formeln für die Chernklassen von \mathcal{E} sind wohlbekannt (vgl. etwa [C], S. 67 oder [Ha4], (2.6) und (4.1)).

q.e.d.

An Hand einiger Beispiele wollen wir nun die Aussagekraft dieses Korollars erkunden. Mittels (10.6) werden einige nicht zerfallende Bündel auf \mathbb{P}^3 konstruiert.

(10.7) BEISPIEL:

Das 0–dimensionale Unterschema Y von \mathbb{P} bestehe aus $n \geq 1$ kollinearen reduzierten abgeschlossenen Punkten. Wir wählen eine Ebene $H \subseteq \mathbb{P}$, die Y umfaßt, und eine integrale ebene Kurve $C \subseteq H$ vom Grad n , so daß Y das Nullstellenschema eines globalen Schnitts von $\mathcal{O}_C(1)$ ist. Es folgt $\omega_C \cong \mathcal{O}_C(n-3)$ und $\mathcal{O}_C(Y) \cong \omega_C(-e)$ mit $e = n-4$. Da $\mathcal{O}_C(1)$ von globalen Schnitten erzeugt wird, ist Y nach (10.3) das Nullstellenschema eines globalen Schnitts eines lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ –Moduls \mathcal{E} vom Rang drei mit sehr guten globalen Schnitten und mit $c_1(\mathcal{E}) = n$, $c_2(\mathcal{E}) = n$ sowie $c_3(\mathcal{E}) = n$.

Wir zeigen noch, daß \mathcal{E} kein Geradenbündel abspaltet. Insbesondere zerfällt \mathcal{E} also nicht in die direkte Summe dreier Geradenbündel. Angenommen, es gibt ein $a \in \mathbb{Z}$ und einen lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ –Modul \mathcal{F} vom Rang zwei mit $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a) \oplus \mathcal{F}$. Da \mathcal{E} einen regulären Schnitt s mit einem nichtleeren Nullstellenschema besitzt, muß $a > 0$ sein. Für die Chernklassen errechnet sich $n = c_1(\mathcal{E}) = c_1(\mathcal{F}) + a$, $n = c_2(\mathcal{E}) = a \cdot c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F})$ sowie $n = c_3(\mathcal{E}) = a \cdot c_2(\mathcal{F})$. Hieraus folgt die Beziehung

$$n(a^2 - a + 1) = a^3.$$

Da a^3 und $a^2 - a + 1$ teilerfremd sind, folgt leicht, daß $n = 1$, $a = 1$ die einzige Lösung dieser Gleichung in natürlichen Zahlen ist. Im diesem Fall wäre $c_1(\mathcal{F}) = 0$ und $c_2(\mathcal{F}) = 1$. Schreibe $s = (s_1, s_2) \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a)) \oplus H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F})$. Dann ist s_2 ein regulärer Schnitt von \mathcal{F} , und für das Nullstellenschema $D := (s_2)_o$ gilt $\deg D = c_2(\mathcal{F}) = 1$ sowie $p_a(D) = \frac{1}{2}c_2(\mathcal{F})(c_1(\mathcal{F}) - 4) + 1 = -1$ (vgl. [Ha5], (2.1)). Dies ist unmöglich, denn für jede Kurve D gilt $p_a(D) = 1 - h^0\mathcal{O}_D + h^1\mathcal{O}_D \geq 1 - \deg D$. Also zerfällt \mathcal{E} nicht in der angegebenen Weise.

Offensichtlich können wir Y auch als Nullstellenschema eines zerfallenden lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ –Moduls, d.h. als 0–dimensionalen vollständigen Durchschnitt darstellen (vgl. auch Beispiel (10.12)). Es folgt, daß das Paar (\mathcal{E}, s) durch Y nicht eindeutig bestimmt ist. (Man vergleiche dies mit Korollar (6.4).)

(10.8) BEISPIEL:

Y bestehe aus vier nicht komplanaren, reduzierten Punkten. Dann gibt es eine “twisted cubic” in \mathbb{P} , die Y umfaßt. Denn eine solche Kurve ist definiert als das Bild einer Einbettung $\iota: \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^3$ mittels $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3))$, und wählt man auf ihr vier nicht komplanare Punkte, so gibt es einen Automorphismus von \mathbb{P} , der diese in die Punkte von Y überführt.

Ist \mathcal{L} der invertierbare \mathcal{O}_C –Modul mit $\iota^{-1}\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, so ist $\omega_C \cong \mathcal{L}^{\otimes -2}$ und $\mathcal{O}_C(1) \cong \mathcal{L}^{\otimes 3}$, also $\mathcal{O}_C(Y) \cong \omega_C(-e)$ mit $e = -2$. Nach Bemerkung (4.6.c) hat Y die CBE bzgl. ω_C .

Es folgt, daß Y das Nullstellenschema eines regulären Schnitts eines lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ –Moduls \mathcal{E} vom Rang drei mit sehr guten globalen Schnitten darstellt, wobei $c_1(\mathcal{E}) = 2$, $c_2(\mathcal{E}) = 3$ und $c_3(\mathcal{E}) = 4$ ist. Wieder kann \mathcal{E} nicht in der Form $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a) \oplus \mathcal{F}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und einem Rang-2-Bündel \mathcal{F} zerfallen, weil sonst $c_1(\mathcal{F}) + a = 2$, $a \cdot c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F}) = 3$ und $a \cdot c_2(\mathcal{F}) = 4$ wäre, was auf die in positiven ganzen Zahlen unlösbare Gleichung $a(3 - 2a + a^2) = 4$ führt.

Auf Grund der Hilbertfunktion $H_Y(0) = 1$, $H_Y(n) = 4$ für $n \geq 1$ ist klar, daß Y überhaupt nicht als Nullstellenschema eines zerfallenden Rang-3-Bündels dargestellt werden kann (vgl. (8.8.b) und (8.9)).

(10.9) BEISPIEL:

Sei $C \subseteq \mathbb{P}$ der vollständige Durchschnitt der beiden Quadriken $Q_1 := \mathcal{V}(x_0^2 - x_1x_3)$ und $Q_2 := \mathcal{V}(x_0x_1 - x_2x_3)$ in \mathbb{P} . Bekanntlich besteht C aus einer Geraden L und einer "twisted cubic" T , die sich in einem Punkt P schneiden (vgl. [Ha1], I ex. (2.16.a)).

(a) Y bestehe aus vier komplanaren Punkten, von denen keine drei kollinear sind. Der Durchschnitt von C mit einer Ebene von \mathbb{P} , die P nicht enthält, besteht aus ebenfalls vier komplanaren Punkten, von denen keine drei kollinear sind, und von denen einer auf L und drei auf T liegen. Dann gibt es einen Automorphismus von \mathbb{P} , der diesen Ebenenschnitt in die Punkte von Y überführt, d.h. wir können annehmen, daß Y ein Ebenenschnitt von C ist.

Nach [Ha1], II ex. (8.4.e) gilt $\omega_C \cong \mathcal{O}_C$, also $\mathcal{O}_C(Y) \cong \mathcal{O}_C(1) \cong \omega_C(-e)$ mit $e = -1$. Nach (8.1.d) hat Y die CBE bzgl. ω_C . Daher ist Y das Nullstellenschema eines regulären Schnitts eines lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduls \mathcal{E} vom Rang drei mit sehr guten globalen Schnitten und mit den Chernklassen $c_1(\mathcal{E}) = 3$, $c_2(\mathcal{E}) = 4$ sowie $c_3(\mathcal{E}) = 4$. Spaltet \mathcal{E} in der Form $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a) \oplus \mathcal{F}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und einem Rang-2-Vektorbündel \mathcal{F} auf, so folgt wie in (10.8), daß $a(a^2 - 3a + 4) = 4$ ist, was auf $a = 2$ führt. Schreibt man $s = (s_1, s_2) \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a)) \oplus H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F})$, so ist s_2 dann ein regulärer Schnitt von \mathcal{F} , dessen Nullstellenschema $D := (s_2)_o$ eine Kurve von Grad $\deg D = 2$ und Geschlecht $p_a(D) = -2$ ist. Da dies nicht möglich ist, zerfällt \mathcal{E} nicht wie angegeben.

(b) Sei Y jetzt allgemeiner der vollständige Durchschnitt von C mit einer Fläche vom Grad $n \geq 1$, die P nicht enthält. Wieder ist $\mathcal{O}_C(Y) \cong \mathcal{O}_C(n) \cong \omega_C(-e)$ mit $e = -n$, und Y hat die CBE bzgl. ω_C . Daher ist Y das Nullstellenschema eines regulären Schnitts eines lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduls \mathcal{E} vom Rang drei mit sehr guten globalen Schnitten und mit den Chernklassen $c_1(\mathcal{E}) = -n + 4$, $c_2(\mathcal{E}) = 4$ sowie $c_3(\mathcal{E}) = 4n$.

Wie zeigen wieder, daß \mathcal{E} keinen invertierbaren direkten Summanden besitzt. Andernfalls wäre $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a) \oplus \mathcal{F}$ mit $a > 0$ und einem Rang-2-Vektorbündel \mathcal{F} , und folglich $c_1(\mathcal{F}) + a = -n + 4$, $a \cdot c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F}) = 4$ sowie $a \cdot c_2(\mathcal{F}) = 4n$. Hieraus erhalten wir die Gleichung

$$n(a+2)(a-2) = -a(a-2)^2.$$

Für $a = 1$ ist diese in positiven ganzen Zahlen n unlösbar, und für $a \geq 3$ wegen $0 < n(a+2) = -a(a-2) < 0$ ebenfalls. Im Fall $a = 2$ folgt $c_1(\mathcal{F}) = -n + 2$ und $c_2(\mathcal{F}) = 2n$. Wie in (a) ergeben sich für das 1-dimensionale Nullstellenschema D der zweiten Komponente von s die Beziehungen $\deg D = 2n$ und $p_a(D) = -n^2 - 2n + 1 < -2n$, die nicht zugleich erfüllbar sind.

Schließlich geben wir eine Cayley-Bacharach-Charakterisierung 0-dimensionaler vollständiger Durchschnitte, die wir durch Anwendung des Zerfallungskriteriums (9.7) auf Korollar (10.6) erhalten.

(10.10) SATZ. **(Die Cayley-Bacharach-Charakterisierung 0-dimensionaler vollständiger Durchschnitte im Raum)**

Für ein 0-dimensionales Unterschema $Y \subseteq \mathbb{P}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) Y ist ein 0-dimensionaler vollständiger Durchschnitt.
- (b) Es gibt eine projektiv normale Gorensteinkurve $C \subseteq \mathbb{P}$, die Y umfaßt, so daß gilt:
 - (1) Es gibt ein $e \in \mathbb{Z}$, so daß Y das Nullstellenschema eines globalen Schnitts von $\omega_C(-e)$ ist, d.h. Y definiert einen subkanonischen Cartier-Divisor auf C .
 - (2) Y hat die CBE bzgl. ω_C .
 - (3) Y hat eine symmetrische Hilbertfunktion.
 - (4) Es ist $a_Y = e$.

Inbesondere hat Y dann die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(e)$, aber nicht die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(e+1)$, das heißt $c_Y = e$.

Mittels Satz (9.7) und Korollar (10.6) kann der Leser leicht selbst weitere äquivalente Bedingungen aufstellen.

BEWEIS:

“(a) \implies (b)” Sei $Y = (s)_o$ mit $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ und $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(c)$ sowie $a, b, c > 0$. Nach dem Beweis von (10.4) können wir einen weiteren Schnitt $s' \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ so wählen, daß $C := (s \wedge s')_o$ eine Gorensteinkurve ist, auf der Y das zu einem subkanonischen effektiven Cartier-Divisor assoziierte Unterschema bildet.

Nach (10.6) hat Y die CBE bzgl. ω_C , nach (8.9) hat Y eine symmetrische Hilbertfunktion, und nach (7.11) ist $a_Y = e = a + b + c - 4$. Es bleibt noch zu zeigen, daß C projektiv normal ist.

Dazu betrachte die durch die Aufspaltung des Koszulkomplexes gegebene exakte Sequenz (vgl. (C8)(5))

$$(*) \quad 0 \rightarrow \det \mathcal{E}^\sim \rightarrow \bigwedge^2 \mathcal{E}^\sim \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

und den kanonischen Isomorphismus $\bigwedge^2 \mathcal{E}^\sim \cong \mathcal{E} \otimes \det \mathcal{E}^\sim$ (vgl. [Ha1], II ex. (5.16)). Die lange exakte Kohomologiesequenz hierzu zeigt $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{F}(n)) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Aus der exakten Sequenz

$$(**) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-e-4) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0$$

(vgl. (10.4)(5)) folgt dann $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{I}_C(n)) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, d.h. C ist projektiv normal (vgl. [Ha1], II ex. (5.14.d)).

“(b) \implies (a)” Wegen (1) und (2) zeigt Korollar (10.6), daß es einen regulären Schnitt eines lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduls \mathcal{E} vom Rang drei gibt, der Y zum Nullstellenschema hat. Mittels Satz (9.7) zeigen wir jetzt, daß \mathcal{E} in die direkte Summe dreier invertierbarer $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduln zerfällt.

Wegen (3) und (4) ist dazu nur noch $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{E}(n)) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ zu beweisen. Nach (*) und (**) gilt

$$H^1(\mathbb{P}, \mathcal{E}(n)) \cong H^1(\mathbb{P}, \mathcal{F} \otimes (\det \mathcal{E})(n)) \cong H^1(\mathbb{P}, \mathcal{J}_C(n + e + 4)) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

und letztere Kohomologiegruppe verschwindet wegen der vorausgesetzten projektiven Normalität von C . **q.e.d.**

Auch dieses Resultat wollen wir mit Beispielen illustrieren. Wir beginnen mit einem sehr einfachen Beispiel, an dem wir erklären, wie man zu einem gegebenen 0-dimensionalen Schema Y eine Kurve C findet, die die Bedingungen (1) – (4) in (10.10.b) erfüllt.

(10.11) BEISPIEL:

Sei $Y \subseteq \mathbb{P}$ ein reduzierter Punkt. Wir wollen Y als 0-dimensionalen vollständigen Durchschnitt darstellen, was natürlich in offensichtlicher Weise möglich ist.

Auf Grund des Grades von Y kommt nur eine Darstellung als Nullstellenschema von $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)^3$ in Frage. Dann ist $c_2(\mathcal{E}) = 3$, d.h. wir brauchen eine projektiv normale Gorensteinkurve $C \subseteq \mathbb{P}$ vom Grad drei durch Y . Versuchen wir es mit der “twisted cubic” C , die definiert ist als das Bild einer Einbettung $\iota: \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^3$ mittels $H^0(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3))$. Nach [Ha1], II (6.6.3) und [Ha1], III ex. (5.6.b.3) ist C projektiv normal, und durch Anwendung eines Automorphismus von \mathbb{P} können wir annehmen, daß C unseren Punkt Y enthält. Wir prüfen jetzt die Bedingungen (1) – (4):

“(1)” Sei \mathcal{L} der invertierbare \mathcal{O}_C -Modul mit $\iota^* \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. Dann ist $\omega_C \cong \mathcal{L}^{\otimes -2}$, $\mathcal{O}_C(1) \cong \mathcal{L}^{\otimes 3}$ und $\mathcal{O}_C(Y) \cong \mathcal{L} \cong \omega_C(1)$, das heißt Y definiert einen subkanonischen Divisor auf C und $e = -1$.

“(2)” Nach (4.6.c) hat Y die CBE bzgl. ω_C .

“(3)” Die Hilbertfunktion von Y lautet $H_Y(n) = 0$ für $n < 0$ bzw. $H_Y(n) = 1$ für $n \geq 0$. Sie ist symmetrisch bzgl. $a_Y = -1$.

“(4)” Es gilt $a_Y = -1 = e$.

Also ist Y das Nullstellenschema eines zerfallenden Rang-3-Bündels \mathcal{E} mit $c_1(\mathcal{E}) = 3$, $c_2(\mathcal{E}) = 3$ und $c_3(\mathcal{E}) = 1$. Auf Grund der Chernklassen von \mathcal{E} ist klar, daß es sich um $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)^3$ handelt.

Wenn wir ein komplizierteres 0-dimensionales Schema Y wählen, müssen wir uns schon etwas mehr anstrengen, um eine passende Kurve C zu finden. Die nächsten beiden Beispiele zeigen zusammen mit den Beispielen (10.7), (10.8) und (10.9.a), daß wir bei der Konstruktion von Rang-3-Bündeln mittels Korollar (10.6) im allgemeinen keine zerfallenden Bündel erhalten, weil die in (10.10.b) gestellten Zusatzbedingungen sehr einschränkend sind.

(10.12) BEISPIEL:

In Verallgemeinerung des letzten Beispiels sei Y jetzt durch $n \geq 1$ kollineare reduzierte Punkte gegeben. Wieder wollen wir die offensichtlich mögliche Darstellung von Y als 0-dimensionalen vollständigen Durchschnitt mittels Satz (10.10) erhalten.

Wir beginnen damit, daß wir die Hilbertfunktion von Y berechnen: $H_Y(m) = m + 1$ für $0 \leq m \leq n - 2$ und $H_Y(m) = n$ für $m \geq n - 1$. Also ist $a_Y = n - 2$ und H_Y ist symmetrisch. Stellt Y das Nullstellenschema eines regulären Schnitts eines zerfallenden Rang-3-Bündels \mathcal{E} dar, so ist $c_1(\mathcal{E}) = e + 4 = a_Y + 4 = n + 2$ und $c_3(\mathcal{E}) = \deg Y = n$. Daher kommt nur $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ in Betracht, so daß wir eine Gorensteinkurve $C \subseteq \mathbb{P}$ mit $\deg C = c_2(\mathcal{E}) = 2n + 1$ suchen müssen. Auf dieser Kurve soll $\mathcal{O}_C(Y) \cong \omega_C(-e) \cong \omega_C(-n + 2)$ sein, das heißt es muß $2p_a(C) - 2 = \deg \omega_C = \deg Y + \deg \mathcal{O}_C(n + 2) = \deg Y + (n + 2) \deg C = 2n^2 - 2n - 2$ gelten, also $p_a(C) = n(n - 1)$.

Solche Gorensteinkurven findet man bekanntlich, indem man einen Divisor vom Typ $(n, n + 1)$ auf einer nichtsingulären Quadrik Q wählt. Wir verwenden im folgenden die Ergebnisse von [Ha1], III ex. (5.6) über Kurven auf Q . O.E. sei $L := \mathcal{V}(x_0, x_2)$ die Gerade, auf der Y liegt. Diese ist in der nichtsingulären Quadrik $Q := \mathcal{V}(x_0x_1 - x_2x_3) \subseteq \mathbb{P}$ enthalten. O.E. sei $\mathcal{O}_Q(L) \cong \mathcal{O}_Q(0, 1)$.

Wir zeigen jetzt, daß Y auf einer Gorensteinkurve $C \subseteq Q$ vom Typ $(n, n + 1)$ liegt. Nach (4.2.a) genügt es dazu $h^0(\mathcal{O}_Q(n, n + 1)) > n$ zu beweisen. Wegen $h^1\mathcal{O}_Q(n, n + 1) = 0$ und $h^2\mathcal{O}_Q(n, n + 1) = h^0\mathcal{O}_Q(-n - 2, -n - 3) = 0$ nach (2.4) und [Ha1], II (8.20.3) liefert der Satz von Riemann-Roch für Flächen (vgl. [Ha1], V (1.6))

$$\begin{aligned} h^0\mathcal{O}_Q(n, n + 1) &= \frac{1}{2}D_1 \cdot D_2 + 1 + p_a \\ &= \frac{1}{2}[n(n + 3) + (n + 1)(n + 2)] + 1 + (n^2 - n) \\ &= 2n^2 + 2n + 2 \\ &> n \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{O}_Q(D_1) \cong \mathcal{O}_Q(n, n + 1)$, $\mathcal{O}_Q(D_2) \cong \mathcal{O}_Q(n, n + 1) \otimes \omega_{\check{Q}} \cong \mathcal{O}_Q(n + 2, n + 3)$ und $p_a = n(n + 1) - n - (n + 1) + 1 = n^2 - n$ ist.

Für diese Kurve C weisen wir nun die Bedingungen von Satz (10.10.b) nach. Wegen ihres Typs ist C projektiv normal.

“(1)” Wegen $\omega_C \cong \omega_Q \otimes \mathcal{O}_Q(n, n + 1) \otimes \mathcal{O}_C \cong \mathcal{O}_Q(n - 2, n - 1) \otimes \mathcal{O}_C$, wegen $\mathcal{O}_C(1) \cong \mathcal{O}_Q(1, 1) \otimes \mathcal{O}_C$, und wegen $\mathcal{O}_C(Y) \cong \mathcal{O}_Q(0, 1) \otimes \mathcal{O}_C$ gilt $\mathcal{O}_C(Y) \cong \omega_C(-n + 2)$, das heißt $e = n - 2$ und Y definiert einen subkanonischen effektiven Cartier-Divisor auf C . Man beachte dabei, daß Y auf Grund des Typs von C bereits der vollständige Durchschnitt von C mit L sein muß.

“(2)” Um zu zeigen, daß Y die CBE bzgl. ω_C hat, genügt es nach (5.7) zu beweisen, daß $\mathcal{O}_C(Y)$ von globalen Schnitten erzeugt wird, d.h. daß die Divisoren des von Y auf C definierten vollständigen linearen Systems $|Y|$ keinen Punkt gemeinsam haben. Wegen $h^1\mathcal{J}_{C/Q} \otimes \mathcal{O}_Q(L) = h^1\mathcal{O}_Q(-n, -n) = 0$ ist die kanonische Abbildung

$H^0(Q, \mathcal{O}_Q(L)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(Y))$ surjektiv, so daß die Divisoren aus $|Y|$ als vollständige Durchschnitte der paarweise disjunkten Geraden aus $|L|$ mit C ebenfalls paarweise disjunkt sind.

“(3)” Die Symmetrie von H_Y wurde weiter oben schon gezeigt.

“(4)” Es gilt $a_Y = n - 2 = e$.

Aus alledem folgt, daß Y das Nullstellenschema eines regulären Schnitts eines zerfallenden $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduls \mathcal{E} vom Rang drei mit den Chernklassen $c_1(\mathcal{E}) = e + 4 = n + 2$, $c_2(\mathcal{E}) = \deg C = 2n + 1$ und $c_3(\mathcal{E}) = \deg Y = n$ darstellt. Wie man an Hand dieser Chernklassen erkennt, ist $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$, was dem erwarteten Ergebnis entspricht.

(10.13) BEISPIEL:

Y bestehe aus vier komplanaren reduzierten Punkten, von denen keine drei kollinear sind. Unser Ziel ist es wieder, Y mit Hilfe von Satz (10.10) als vollständigen Durchschnitt darzustellen. Mittels a priori Überlegungen wollen wir dazu zunächst die gesuchte Kurve C näher bestimmen.

Wir betrachten die Hilbertfunktion von Y . Es ist $H_Y(0) = 1$, $H_Y(1) = 3$ und $H_Y(n) = 4$ für $n \geq 2$. Also ist $a_Y = 1$ und H_Y ist symmetrisch. Das zerfallende Bündel \mathcal{E} , das Y als Nullstellenschema haben soll, muß infolgedessen die Chernklassen $c_1(\mathcal{E}) = a_Y + 4 = 5$ und $c_3(\mathcal{E}) = \deg Y = 4$ besitzen. Somit muß es sich um $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2)^2$ handeln, und es folgt $c_2(\mathcal{E}) = 8$. Also brauchen wir eine Gorensteinkurve $C \subseteq \mathbb{P}$ mit $\deg C = c_2(\mathcal{E}) = 8$ und $2p_a(C) - 2 = \deg \omega_C = \deg \mathcal{O}_C(Y) \otimes \mathcal{O}_C(e) = \deg Y + \deg C = 12$, also $p_a(C) = 7$. Auf Grund dieses Grades und Geschlechts ist klar, daß C weder eine ebene Kurve ist noch auf einer Quadrik liegen kann (vgl. [Ha1], IV (6.4.1)). Also müssen wir auf einer kubischen Fläche suchen, und tatsächlich gelingt es uns mittels [Ha1], V (4.8) einen geeigneten Divisor aufzutreiben.

Betrachte eine nichtsinguläre kubische Fläche $S \subseteq \mathbb{P}$. Im folgenden verwenden wir die Notationen und Ergebnisse von [Ha1], V § 4 über kubische Flächen im Raum. Sei $C \subseteq S$ eine nichtsinguläre irreduzible Kurve, die einen Divisor aus dem zu der amplen invertierbaren Garbe $\mathcal{O}_S(8l - 3 \sum_{i=1}^4 e_i - 2e_5 - 2e_6)$ gehörigen vollständigen Linearsystem repräsentiert (vgl. loc. cit. (4.13)). Dann ist $\deg C = 8$, $g = 7$, und es gilt:

$$\omega_C(-1) \cong \omega_S \otimes \mathcal{O}_S(C) \otimes \mathcal{O}_S(-1) \otimes \mathcal{O}_C \cong \mathcal{O}_S(2l - \sum_{i=1}^4 e_i) \otimes \mathcal{O}_C =: \mathcal{O}_C(2l - \sum_{i=1}^4 e_i)$$

Hieraus folgt $\deg \omega_C(-1) = 2g - 2 - \deg C = 4$. Nach der langen exakten Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-6l + 2 \sum_{i=1}^6 e_i) \rightarrow \mathcal{O}_S(2l - \sum_{i=1}^4 e_i) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}_C(2l - \sum_{i=1}^4 e_i) \rightarrow 0$$

sowie wegen $h^i \mathcal{O}_S(-6l+2 \sum_{j=1}^6 e_j) = 0$ für $i = 0, 1$ (vgl. [Ha1], III ex. (7.1) und V ex. (4.12)) ist

$$h^0 \omega_C(-1) = h^0 \mathcal{O}_S(2l - \sum_{i=1}^4 e_i) = 2,$$

denn das zu letzterer Kohomologiegruppe gehörige Linearsystem entspricht nach [Ha1], V (4.8.1) dem Linearsystem der ebenen quadratischen Kurven, die durch P_1, \dots, P_4 gehen, welches wiederum nach [Ha1], V (4.2.a) 2-dimensional ist.

Sei $Y' \subseteq C$ das Nullstellenschema eines regulären globalen Schnitts von $\omega_C(-1)$, wobei wir wegen $h^0 \omega_C(-1) = 2$ annehmen können, daß Y' reduziert ist. Wir beweisen zunächst, daß Y' aus vier komplanaren reduzierten Punkten besteht, von denen keine drei kollinear sind. Damit folgt dann, daß es einen Automorphismus von \mathbb{P}^2 gibt, der die Punkte von Y' in die Punkte von Y überführt, so daß wir o.E. $Y' = Y$ annehmen können.

Für die Komplanarität der Punkte von Y' ist $h^1 \mathcal{J}_{Y'}(1) = 1$ zu zeigen. Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow \mathcal{J}_{Y'} \rightarrow \mathcal{J}_{Y'/C} \rightarrow 0$$

wobei $\mathcal{J}_{Y'/C}$ die Idealgarbe von Y in C bezeichnet, d.h. $\mathcal{J}_{Y'/C} \cong \mathcal{O}_C(-Y) \cong \omega_{\check{C}}(1)$. Da die Kurve C auf Grund ihres Grades und Geschlechts keine ebene Kurve ist, gilt $h^0 \mathcal{J}_C(1) = 0$, woraus sich

$$h^1 \mathcal{J}_C(1) = h^0 \mathcal{O}_C(1) - h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) = \deg C + 1 - g + h^0 \omega_C(-1) - 4 = 0$$

ergibt. Mit anderen Worten ist C linear normal und nach (*) folgt

$$h^0 \mathcal{J}_{Y'}(1) = h^0 \mathcal{J}_{Y'/C}(1) = h^0 \omega_{\check{C}}(2) = h^0 \mathcal{O}_C(l - e_5 - e_6).$$

Aus der kanonischen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-7l + 3 \sum_{i=1}^4 e_i + e_5 + e_6) \rightarrow \mathcal{O}_S(l - e_5 - e_6) \rightarrow \mathcal{O}_C(l - e_5 - e_6) \rightarrow 0$$

und weil $\mathcal{O}_S(7l - 3 \sum_{i=1}^4 e_i - e_5 - e_6)$ ampel ist, schließen wir

$$h^0 \mathcal{O}_C(l - e_5 - e_6) = h^0 \mathcal{O}_S(l - e_5 - e_6) = 1,$$

denn das zu letzterer Kohomologiegruppe gehörige Linearsystem entspricht der Geraden in \mathbb{P}^2 durch P_5 und P_6 (vgl. [Ha1], V (4.8.1)).

Insgesamt ist also $h^1 \mathcal{J}_{Y'}(1) = 1$, das heißt $H_{Y'}(0) = 1$, $H_{Y'}(1) = 3$ und $H_{Y'}(i) = 4$ für $i \geq 2$. Somit ist $a_{Y'} = 1$ und $H_{Y'}$ ist symmetrisch. Daß keine drei Punkte von Y'

kollinear sind, folgt, wenn wir gezeigt haben, daß Y' das Nullstellenschema eines regulären Schnitts eines lokalfreien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Moduls \mathcal{E} vom Rang drei mit $\deg(\det \mathcal{E}) = 5$ ist, weil Y' nach (4.15) dann die CBE bzgl. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ hat. Hierzu ist nach (10.6) nur noch zu zeigen, daß $\mathcal{O}_C(Y')$ von globalen Schnitten erzeugt wird. Wegen der Isomorphie der kanonischen Abbildung

$$H^0(\varepsilon): H^0(S, \mathcal{O}_S(2l - \sum_{i=1}^4 e_i)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(Y'))$$

(siehe oben) folgt dies daraus, daß das vollständige Linearsystem der ebenen quadratischen Kurven durch P_1, \dots, P_4 keine nicht vorgeschriebenen Fixpunkte hat (vgl. loc. cit. (4.1)).

Um zu zeigen, daß \mathcal{E} zerfällt, ist schließlich zu beweisen, daß C projektiv normal ist. Wegen $h^1\mathcal{O}_C(2) = h^0\omega_C(-2) = 0$ (aus Gradgründen) und $h^1\mathcal{J}_C(1) = 0$ (siehe oben) ist dazu gemäß [ACGH] III ex. D-5 noch $h^1\mathcal{J}_C(2) = h^1\mathcal{J}_C(3) = 0$ zu zeigen. Wegen ihres Grades und Geschlechts ist die Kurve C in keiner (singulären oder nichtsingulären) Quadrik enthalten (vgl. [Ha1], IV (6.4.1)), so daß sich

$$h^1\mathcal{J}_C(2) = h^0\mathcal{O}_C(2) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2) = \deg \mathcal{O}_C(2) + 1 - g - 10 = 0$$

ergibt. Mittels der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_S \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow \mathcal{J}_{C/S} \rightarrow 0$$

mit $\mathcal{J}_S \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-3)$ und $\mathcal{J}_{C/S} \cong \mathcal{O}_S(-8l + 3 \sum_{i=1}^4 e_i + 2e_5 + 2e_6)$ berechnen wir

$$h^0\mathcal{J}_C(3) = h^0\mathcal{J}_S(3) + h^0\mathcal{J}_{C/S}(3) = 1 + h^0\mathcal{O}_S(l - e_5 - e_6) = 2$$

und hieraus $h^1\mathcal{J}_C(3) = h^0\mathcal{O}_C(3) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(3) + h^0\mathcal{J}_C(3) = \deg \mathcal{O}_C(3) + 1 - g - 20 + 2 = 0$. Also ist C projektiv normal und \mathcal{E} ein zerfallendes Bündel mit den Chernklassen $c_1(\mathcal{E}) = 5$, $c_2(\mathcal{E}) = \deg C = 8$ sowie $c_3(\mathcal{E}) = \deg Y = 4$, das heißt $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2)$ wie erwartet.

In der Praxis ist es also meist leichter, die Bedingungen von Korollar (10.6) nachzuweisen als die von Satz (10.10.b). Oftmals können wir unsere Ergebnisse daher auch benützen, um zu zeigen, daß ein vorgegebenes 0-dimensionales Schema Y kein vollständiger Durchschnitt ist, oder etwas über die Existenz bzw. Nicht-Existenz gewisser Raumkurven auszusagen. Dazu betrachten wir zwei abschließende Beispiele.

(10.14) BEISPIEL:

Y bestehe aus vier komplanaren Punkten, von denen drei auf einer Geraden und einer außerhalb dieser Geraden liegen. Die Hilbertfunktion von Y lautet $H_Y(0) = 1$, $H_Y(1) = 3$ und $H_Y(n) = 4$ für $n \geq 2$. Damit ist $a_Y = 1$ und H_Y ist symmetrisch.

(a) Wäre Y ein 0-dimensionaler vollständiger Durchschnitt, d. h. das Nullstellenschema eines globalen Schnitts eines zerfallenden Rang-3-Bündel \mathcal{E} , so müßte $c_3(\mathcal{E}) = 4$ und

$c_1(\mathcal{E}) = a_Y + 4 = 5$ sein. Also käme nur $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2)^2$ in Betracht. Dann aber hätte Y nach Satz (4.15) die CBE bzgl. $\omega_{\mathbb{P}} \otimes \det \mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$, was nicht der Fall ist. (Man vergleiche hierzu auch Beispiel (8.11.j).)

- (b) Jedoch ist Y das Nullstellenschema eines Vektorbündels vom Rang drei. Wählen wir nämlich vier paarweise disjunkte Geraden durch die Punkte von Y , und ist C die von diesen gebildete Raumkurve, so ist $\deg C = 4$, $\mathcal{O}_C(Y) \cong \omega_C(3)$ und $\mathcal{O}_C(Y)$ wird von globalen Schnitten erzeugt. Also gibt es ein Rang-3-Bündel \mathcal{E} mit $c_1(\mathcal{E}) = 1$, $c_2(\mathcal{E}) = 4$ und $c_3(\mathcal{E}) = 4$, so daß Y das Nullstellenschema eines globalen Schnitts von \mathcal{E} ist.

Wir zeigen noch wie oben, daß \mathcal{E} keinen invertierbaren direkten Summanden abspaltet. Angenommen, $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a) \oplus \mathcal{F}$ mit $a > 0$ und einem Rang-2-Bündel \mathcal{F} . Aus $c_1(\mathcal{F}) + a = 1$, $a \cdot c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F}) = 4$ und $a \cdot c_2(\mathcal{F}) = 4$ folgt dann $a = 1$, $c_1(\mathcal{F}) = 0$ und $c_2(\mathcal{F}) = 4$. Also hätte die zweite Komponente des Y definierenden Schnitts s eine Gorensteinkurve D zum Nullstellenschema mit $\deg D = c_2(\mathcal{F}) = 4$ und $p_a(D) = \frac{1}{2}c_2(\mathcal{F})(c_1(\mathcal{F}) - 4) + 1 = -7$. Dies ist offenbar unmöglich. Folglich zerfällt \mathcal{E} nicht wie angenommen.

(10.15) BEISPIEL:

Y bestehe aus acht reduzierten Punkten in \mathbb{P} . Angenommen, wir wollen Y als den vollständigen Durchschnitt dreier Quadriken darstellen. Dann muß Y die folgende Hilbertfunktion haben: $H_Y(0) = 1$, $H_Y(1) = 4$, $H_Y(2) = 7$ und $H_Y(n) = 8$ für $n \geq 3$. Wie man sieht, ist H_Y symmetrisch und $a_Y = 2$. Für $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2)^3$ ist $c_1(\mathcal{E}) = 6 = a_Y + 4$, $c_2(\mathcal{E}) = 12$ und $c_3(\mathcal{E}) = \deg Y = 8$. Also ist das Schema Y , wenn es ein derartiger vollständiger Durchschnitt ist, in einer Gorensteinkurve C enthalten mit $\deg C = 12$ und $2p_a(C) - 2 = \deg \omega_C = \deg Y + \deg \mathcal{O}_C(a_Y) = 8 + 2 \cdot \deg C = 30$, also $p_a(C) = 17$.

- (a) Besteht Y aus den in Beispiel (8.14) untersuchten acht Punkten auf der "twisted cubic", so ist Y zwar ein arithmetisches Gorensteinschema (d.h. H_Y und a_Y stimmen), aber kein vollständiger Durchschnitt. Somit gibt es keine projektiv normale Gorensteinkurve $C \subseteq \mathbb{P}$, die Y umfaßt und die Bedingungen von Satz (10.10.b) erfüllt.
- (b) Besteht Y aus den acht Eckpunkten eines Quaders, so gibt es eine projektiv normale Gorensteinkurve C durch diese mit $\deg C = 12$ und $p_a(C) = 17$. Das Ideal von C wird von den 2×2 -Unterdeterminanten einer 3×2 -Matrix quadratischer Formen erzeugt.

Anhang A: Spuren auf Moduln über endlichdimensionalen Algebren

Dieser Anhang verallgemeinert die in [K2], E.15-17 gewonnenen Ergebnisse.

Sei A eine endlichdimensionale Algebra über einem Körper k . Dann ist A ein semilokaler artinscher Ring. Bezeichne seine Primideale mit $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$. Offensichtlich ist $A \cong \bigoplus_{i=1}^r A_{\mathfrak{p}_i}$.

Sei M ein endlich erzeugter A -Modul. Insbesondere ist M ein endlichdimensionaler k -Vektorraum. Wie üblich sei die A -Modulstruktur auf $\text{Hom}_k(M, k)$ definiert durch

$$\begin{aligned} A \times \text{Hom}_k(M, k) &\longrightarrow \text{Hom}_k(M, k) \\ (a, l) &\longmapsto (m \mapsto l(a \cdot m)). \end{aligned}$$

(A1) DEFINITION:

Gibt es einen A -Isomorphismus $\text{Hom}_k(M, k) \cong A$, so heißt jede A -Basis $\sigma: M \rightarrow k$ von $\text{Hom}_k(M, k)$ eine **Spur** auf M .

(A2) BEISPIEL:

Der Dualmodul $M := \text{Hom}_k(A, k)$ hat eine kanonische Spur σ , nämlich die Auswertung bei Eins

$$\begin{aligned} \sigma: M &\longrightarrow k \\ l &\longmapsto l(1) \end{aligned}$$

Dies folgt aus der Isomorphie der kanonischen Abbildung

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \text{Hom}_k(M, k) \\ a &\longmapsto a \cdot \sigma = (l \mapsto l(a)) \end{aligned}$$

von A in sein k -Bidual.

(A3) SATZ.

Für jedes Ideal I von A besteht der Modul $I \cdot \text{Hom}_k(M, k)$ aus genau denjenigen Linearformen $l: M \rightarrow k$, die auf $0 :_M I := \{m \in M : I \cdot m = 0\}$ verschwinden. Insbesondere hat man die Formel:

$$\dim_k(I \cdot \text{Hom}_k(M, k)) = \dim_k(M/0 :_M I)$$

BEWEIS:

Da jede Linearform aus $I \cdot \text{Hom}_k(M, k)$ auf $0 :_M I$ verschwindet, hat man eine wohldefinierte k -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} I \cdot \text{Hom}_k(M, k) &\longrightarrow \text{Hom}_k(M/0 :_M I, k) \\ l &\longmapsto (m + 0 :_M I \mapsto l(m)) \end{aligned}$$

und diese ist offensichtlich injektiv. Daher genügt es, die Behauptung

$$\dim_k(I \cdot \text{Hom}_k(M, k)) \geq \dim_k(M/0 : I)$$

zu beweisen. Dazu wenden wir vollständige Induktion nach der minimalen Erzeugendenzahl $\mu(I)$ an.

Für $I = (0)$ ist die Behauptung klar. Sei die Behauptung jetzt für ein Ideal $I \subseteq A$ bereits bewiesen und sei $J = (I, a)$ mit einem Element $a \in A \setminus I$. Schreibe $M = V \oplus (0 : I)$ mit einem k -Untervektorraum $V \subseteq M$, und setze $s := \dim_k V = \dim_k(M/0 : I)$. Nach Voraussetzung gibt es dann linear unabhängige k -Linearformen $l_1, \dots, l_s \in I \cdot \text{Hom}_k(M, k)$. Wegen $I \subseteq J$ gilt $0 : J \subseteq 0 : I$. Also gibt es k -linear unabhängige Elemente $m_1, \dots, m_t \in 0 : I$ mit $0 : I = k \cdot m_1 \oplus \dots \oplus k \cdot m_t \oplus 0 : J$. Nun sind die Elemente $a \cdot m_1, \dots, a \cdot m_t \in M$ ebenfalls linear unabhängig über k , denn hat man eine Relation $\sum_{i=1}^t \lambda_i a m_i = 0$ ($\lambda_i \in k$), so folgt $a \cdot (\sum_{i=1}^t \lambda_i m_i) = 0$ und $I \cdot (\sum_{i=1}^t \lambda_i m_i) = 0$, also $\sum_{i=1}^t \lambda_i m_i \in 0 : J$, und somit $\lambda_1 = \dots = \lambda_t = 0$. Wähle jetzt Linearformen $l'_1, \dots, l'_t \in \text{Hom}_k(M, k)$, so daß gilt: $l'_i(a m_j) = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, t$.

Insgesamt ergibt sich, daß die Linearformen $l_1, \dots, l_s, al'_1, \dots, al'_t$ k -linear unabhängig sind, da aus einer Relation

$$(\lambda_i, \mu_j \in k) \quad l := \sum_{i=1}^s \lambda_i l_i + \sum_{j=1}^t \mu_j a l'_j = 0$$

zuerst $\mu_j = l(m_j) = 0$ für $j = 1, \dots, t$ und dann $\lambda_i = 0$ für $i = 1, \dots, s$ folgt, wenn man die lineare Unabhängigkeit der Formen l_1, \dots, l_s benützt. Also gilt:

$$\dim_k(J \cdot \text{Hom}_k(M, k)) \geq s + t = \dim_k(M/0 : J) \quad \mathbf{q.e.d.}$$

(A4) SATZ.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) Es gibt eine Spur auf M .
- (b) Für alle $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ gibt es eine Spur auf $M_{\mathfrak{p}}$.
- (c) Für alle $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ ist $M_{\mathfrak{p}}$ ein Cohen-Macaulay-Modul über $A_{\mathfrak{p}}$ vom Typ 1, das heißt der **Sockel**

$$\mathfrak{S}(M_{\mathfrak{p}}) := \{m \in M_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}} \cdot m = 0\}$$

von $M_{\mathfrak{p}}$ ist 1-dimensional über k .

BEWEIS:

“(a) \iff (b)” Dies folgt, weil der durch $M \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{\mathfrak{p}_i}$ induzierte A -Homomorphismus

$$\text{Hom}_k(M, k) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \text{Hom}_k(M_{\mathfrak{p}_i}, k)$$

ein Isomorphismus ist.

“(b) \implies (c)” Wende Satz (A3) mit $A := A_{\mathfrak{p}}$ und $I := \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ an und erhalte die Gleichung:

$$\dim_k M_{\mathfrak{p}} - \dim_k \mathfrak{S}(M_{\mathfrak{p}}) = \dim_k \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \dim_k A_{\mathfrak{p}} - 1$$

Wegen $\dim_k M_{\mathfrak{p}} = \dim_k \operatorname{Hom}_k(M_{\mathfrak{p}}, k) = \dim_k A_{\mathfrak{p}}$ folgt hieraus die Behauptung.

“(c) \implies (b)” Eine analoge Anwendung von Satz (A3) liefert:

$$\begin{aligned} \mu(\operatorname{Hom}_k(M_{\mathfrak{p}}, k)) &= \dim_k(\operatorname{Hom}_k(M_{\mathfrak{p}}, k)/\mathfrak{p} \cdot \operatorname{Hom}_k(M_{\mathfrak{p}}, k)) \\ &= \dim_k M_{\mathfrak{p}} - \dim_k(M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{S}(M_{\mathfrak{p}})) = 1 \end{aligned}$$

Sei $\sigma: M \rightarrow k$ also eine k -lineare Abbildung, die $\operatorname{Hom}_k(M, k)$ als A -Modul erzeugt, und sei $a \cdot \sigma = 0$ für ein Element $a \in A$. Dann folgt:

$$a' \cdot \sigma(a) = \sigma(a \cdot a') = (a \cdot \sigma)(a') = 0$$

für alle $a' \in A$, also $\tau(a) = 0$ für alle Abbildungen $\tau \in \operatorname{Hom}_k(M, k)$. Dies ist nur für $a = 0$ möglich, und somit ist σ sogar eine A -Basis von $\operatorname{Hom}_k(M, k)$. **q.e.d.**

(A5) SATZ.

Es gebe eine Spur auf M . Sei $\sigma: M \rightarrow k$ eine k -lineare Abbildung, und für alle Primideale $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ sei $\sigma_{\mathfrak{p}}: M_{\mathfrak{p}} \rightarrow k$ die Einschränkung von σ auf $M_{\mathfrak{p}}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) σ ist eine Spur auf M .
- (b) Für alle $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ ist $\sigma_{\mathfrak{p}}$ eine Spur auf $M_{\mathfrak{p}}$.
- (c) Für kein $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ annulliert $\sigma_{\mathfrak{p}}$ den Sockel von $M_{\mathfrak{p}}$, das heißt für alle $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ gilt: $\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{S}(M_{\mathfrak{p}})) \neq 0$

BEWEIS:

“(a) \iff (b)” Dies folgt, weil der kanonische A -Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_k(M, k) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^r \operatorname{Hom}_k(M_{\mathfrak{p}_i}, k)$$

offensichtlich σ auf das Tupel $(\sigma_{\mathfrak{p}_i})_{i=1, \dots, r}$ abbildet.

“(b) \implies (c)” Ist $\sigma_{\mathfrak{p}}: M_{\mathfrak{p}} \rightarrow k$ für ein $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ eine Spur von $M_{\mathfrak{p}}$, so liegt $\sigma_{\mathfrak{p}}$ nicht in $\mathfrak{p} \cdot \operatorname{Hom}_k(M_{\mathfrak{p}}, k)$ und annulliert nach Satz (A3) daher $\mathfrak{S}(M_{\mathfrak{p}})$ nicht.

“(c) \implies (b)” Nach Satz (A3) liegt $\sigma_{\mathfrak{p}}$ für $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ nicht in $\mathfrak{p} \cdot \operatorname{Hom}_k(M_{\mathfrak{p}}, k)$ und bildet nach dem Lemma von Nakayama somit ein $A_{\mathfrak{p}}$ -Erzeugendensystem von $\operatorname{Hom}_k(M_{\mathfrak{p}}, k)$. Wie oben schließt man hieraus, daß $\sigma_{\mathfrak{p}}$ sogar eine Spur auf $M_{\mathfrak{p}}$ darstellt. **q.e.d.**

Anhang B: Aufsteigend filtrierte Algebren

Nachfolgend beschreiben wir, wie die Ergebnisse von [KK], § 1 abzuändern sind, wenn man von aufsteigend filtrierten Algebren ausgeht. Da wir es nur mit Gradfiltrierungen zu tun haben, ist diese Abänderung zweckmäßig.

Sei S/R eine Algebra und $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ eine Familie von R -Moduln $\mathcal{F}_i \subseteq S$ ($i \in \mathbb{Z}$).

(B1) DEFINITION:

$(S/R, \mathcal{F})$ heißt eine **aufsteigend filtrierte Algebra**, wenn gilt:

- (a) $\forall i \in \mathbb{Z} : \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1}$
- (b) $\forall i, j \in \mathbb{Z} : \mathcal{F}_i \cdot \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_{i+j}$
- (c) $1 \in \mathcal{F}_0$
- (d) $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_i = S$

Im folgenden sei $(S/R, \mathcal{F})$ eine aufsteigend filtrierte Algebra und \mathcal{F} sei **separierend**, das heißt $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_i = 0$.

(B2) DEFINITION:

- (a) Die graduierte $R[T]$ -Algebra

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_i \cdot T^i \subseteq S[T]_T$$

heißt die **Rees-Algebra** von $(S/R, \mathcal{F})$.

- (b) Die graduierte R -Algebra

$$\text{gr}_{\mathcal{F}}(S) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i-1}$$

heißt der **graduierte Ring** von $(S/R, \mathcal{F})$.

(B3) BEMERKUNG:

Das Element T ist ein homogener Nichtnullteiler von $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)$ vom Grad eins, und $T - 1$ ist ebenfalls ein Nichtnullteiler von $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)$.

(B4) DEFINITION:

Für $f \in S \setminus \{0\}$ heißt

- (a) $\text{ord}_{\mathcal{F}} f := \min\{i \in \mathbb{Z} : f \in \mathcal{F}_i\}$ die **Ordnung** von f ,
- (b) $f^* := f \cdot T^{\text{ord}_{\mathcal{F}} f} \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)$ die **Homogenisierung** von f , und
- (c) $L_{\mathcal{F}} f := f + \mathcal{F}_{\text{ord}_{\mathcal{F}} f - 1} \in \text{gr}_{\mathcal{F}}(S)$ die **Leitform** von f .

Für $f = 0$ setzen wir $\text{ord}_{\mathcal{F}} f := -\infty$, $f^* := 0$ und $L_{\mathcal{F}} f := 0$.

(B5) BEMERKUNG:

(a) Es gelten folgende Rechenregeln für die Ordnung:

$$(1) \quad \forall f, g \in S: \text{ord}_{\mathcal{F}}(f + g) \leq \max \{ \text{ord}_{\mathcal{F}} f, \text{ord}_{\mathcal{F}} g \}$$

$$(2) \quad \forall f, g \in S: \text{ord}_{\mathcal{F}}(f \cdot g) \leq \text{ord}_{\mathcal{F}} f + \text{ord}_{\mathcal{F}} g$$

(b) Die $R[T]$ -Algebra $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)$ wird von den Homogenisierungen f^* ($f \in S$) erzeugt. Jedes homogene Element von $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)$ schreibt sich eindeutig in der Form $f^* \cdot T^n$ mit $f \in S$ und $n \in \mathbb{N}$.

(c) Die R -Algebra $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S)$ wird von den Leitformen $L_{\mathcal{F}}f$ ($f \in S$) erzeugt. Jedes homogene Element von $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S)$ ist eine Leitform $L_{\mathcal{F}}f$ mit $f \in S$.

(B6) BEISPIEL:

Sei $S := R[X_1, \dots, X_r]$ der in der üblichen Weise graduierte Polynomring über R . Dann ist S/R aufsteigend filtriert durch die **Gradfiltrierung** $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit

$$\mathcal{F}_i = \{ f \in S: \text{deg } f \leq i \}.$$

Für $f = \sum_{(\nu)} a_{\nu} X^{\nu} \in S$ gilt dann: $\text{ord}_{\mathcal{F}} f = \text{deg } f$,

$$\begin{aligned} f^* &= f \cdot T^{\text{deg } f} = \sum_{(\nu)} a_{\nu} T^{\text{deg } f - |\nu|} (X_1 T)^{\nu_1} \dots (X_r T)^{\nu_r} \\ &= \sum_{(\nu)} a_{\nu} T^{\text{deg } f - |\nu|} (X_1^*)^{\nu_1} \dots (X_r^*)^{\nu_r} \end{aligned}$$

und $L_{\mathcal{F}}f = \sum_{|\nu|=\text{deg } f} a_{\nu} (X_1^*)^{\nu_1} \dots (X_r^*)^{\nu_r}$.

Insbesondere erhält man einen Isomorphismus

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) \cong R[T, X_1^*, \dots, X_r^*].$$

Identifiziert man wie üblich die Variablen T, X_1^*, \dots, X_r^* wieder mit X_0, X_1, \dots, X_r , so ist

$$f^*(X_0, \dots, X_r) = X_0^{\text{deg } f} \cdot f\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_r}{X_0}\right)$$

die gewöhnliche Homogenisierung von f , und $L_{\mathcal{F}}f$ ist die gewöhnliche Gradform, d.h. der homogene Bestandteil höchsten Grades von f .

Die nächsten Aussagen kann man mit diesen Definitionen jetzt analog wie in [KK], § 1 beweisen.

(B7) BEMERKUNG:

Für $f_1, \dots, f_n \in S$ sind die folgenden Behauptungen äquivalent:

$$(a) \quad \text{ord}_{\mathcal{F}}(f_1 \cdots f_n) = \sum_{i=1}^n \text{ord}_{\mathcal{F}} f_i$$

$$(b) \quad L_{\mathcal{F}}(f_1 \cdots f_n) = L_{\mathcal{F}}f_1 \cdots L_{\mathcal{F}}f_n$$

$$(c) \quad L_{\mathcal{F}}(f_1 \cdots f_n) \neq 0$$

$$(d) \quad (f_1 \cdots f_n)^* = f_1^* \cdots f_n^*$$

in $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S)$

in $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S)$

in $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)$

(B8) SATZ.

Man hat einen Isomorphismus graduerter R -Algebren

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)/T \cdot \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) &\xrightarrow{\sim} \text{gr}_{\mathcal{F}}(S) \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i + T \cdot \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) &\longmapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_i + \mathcal{F}_{i-1}) \end{aligned}$$

und einen Isomorphismus von R -Algebren

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)/(T-1) \cdot \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) &\xrightarrow{\sim} S \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i + (T-1) \cdot \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) &\longmapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \end{aligned}$$

(B9) SATZ.

Sei $I \subseteq S$ ein Ideal, $I^* := (f^*)_{f \in I}$ die **Homogenisierung** von I und $\text{gr}_{\mathcal{F}}(I) := (L_{\mathcal{F}}f)_{f \in I}$ das **Leitformenideal** von I . Dann ist $\bar{\mathcal{F}} := (\bar{\mathcal{F}}_i)_{i \in \mathbb{Z}} := (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_i \cap I)_{i \in \mathbb{Z}}$ eine aufsteigende Filtrierung der R -Algebra S/I , genannt die **Restklassenfiltrierung** von \mathcal{F} , und man hat einen Isomorphismus graduerter $R[T]$ -Algebren

$$\mathcal{R}_{\bar{\mathcal{F}}}(S/I) \cong \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)/I^*$$

sowie einen Isomorphismus graduerter R -Algebren

$$\text{gr}_{\bar{\mathcal{F}}}(S/I) \cong \text{gr}_{\mathcal{F}}(S)/\text{gr}_{\mathcal{F}}(I).$$

(B10) SATZ.

Seien $b_1, \dots, b_m \in S$. Dann gilt:

- (a) Erzeugen die Leitformen $L_{\mathcal{F}}b_1, \dots, L_{\mathcal{F}}b_m$ den R -Modul $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S)$, so erzeugen die Homogenisierungen b_1^*, \dots, b_m^* den $R[T]$ -Modul $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)$, und die Elemente b_1, \dots, b_m erzeugen den R -Modul S .
- (b) Bildet $\{L_{\mathcal{F}}b_1, \dots, L_{\mathcal{F}}b_m\}$ eine R -Basis von $\text{gr}_{\mathcal{F}}(S)$, so bildet $\{b_1^*, \dots, b_m^*\}$ eine $R[T]$ -Basis von $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S)$, und $\{b_1, \dots, b_m\}$ bildet eine R -Basis von S .

Unser letztes Resultat befaßt sich mit der Liftung filtrierender Abbildungen.

(B11) SATZ.

Sei $\sigma: S \rightarrow R$ eine filtrierende R -lineare Abbildung vom Grad $-\rho$, das heißt es sei $\sigma(\mathcal{F}_{\rho-1}) = 0$ und $\sigma(\mathcal{F}_{\rho}) \neq 0$ ($\rho \in \mathbb{N}$). Außerdem gelte $\mathcal{F}_{\rho} = S$.

- (a) Die R -lineare Abbildung $\sigma^{\circ}: \text{gr}_{\mathcal{F}}(S) \rightarrow R$ ($L_{\mathcal{F}}f \mapsto \sigma(f)$ für $f \in S$) und die $R[T]$ -lineare Abbildung $\sigma^*: \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S) \rightarrow R[T]$ ($f^* \cdot T^n \mapsto \sigma(f) \cdot T^n$ für $f \in S, n \in \mathbb{N}$) sind wohldefiniert und homogen vom Grad $-\rho$.
- (b) Bei den kanonischen Homomorphismen

$$\begin{aligned} \varphi: \text{Hom}_{R[T]}(\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S), R[T]) &\rightarrow \text{Hom}_R(S, R) && \text{und} \\ \psi: \text{Hom}_{R[T]}(\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(S), R[T]) &\rightarrow \text{Hom}_R(\text{gr}_{\mathcal{F}}(S), R) \end{aligned}$$

(vgl. [KK], § 3) gilt $\varphi(\sigma^*) = \sigma$ und $\psi(\sigma^*) = \sigma^{\circ}$.

BEWEIS:

“(a)” Vgl. (B5.b) und (B5.c).

“(b)” Dies ist klar, da φ (bzw. ψ) die Abbildung σ^* auf ihre Reduktion modulo $(T-1) \cdot S^*$ (bzw. $T \cdot S^*$) abbildet. **q.e.d.**

Anhang C: Vektorbündel mit guten globalen Schnitten

In diesem Anhang definieren wir allgemein, wann ein Vektorbündel “gute” globale Schnitte hat, und untersuchen diesen Begriff für Bündel vom Rang drei auf \mathbb{P}_k^3 näher. Sei also k ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}^d := \mathbb{P}_k^d$, und sei \mathcal{E} ein lokalfreier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang r . Bezeichne $H := H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})^*$ das k -Dual des Vektorraums der globalen Schnitte von \mathcal{E} , $n := \dim_k H = h^0(\mathcal{E})$ seine Dimension und $\mathbb{V}(H) := \text{Spec Sym}_k(H)$ den assoziierten affinen Raum. Dann kann man die globalen Schnitte von \mathcal{E} als die abgeschlossenen Punkte von $\mathbb{V}(H)$ auffassen, denn

$$(\mathbb{V}(H))_{\text{abg.}} \cong \text{Mor}_k(\text{Spec } k, \mathbb{V}(H)) \cong \text{Hom}_{k\text{-Alg.}}(\text{Sym}_k(H), k) \cong \text{Hom}_k(H, k) \cong H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}).$$

Für einen kohärenten $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul \mathcal{F} bezeichne $\mathbb{V}(\mathcal{F}) := \text{Spec Sym}(\mathcal{F})$. Insbesondere ist also $\mathbb{V}(\mathcal{E}^\sim)$ das zu \mathcal{E} assoziierte Vektorbündel.

(C1) DEFINITION:

Für $i = 1, \dots, r - 1$ heißt

$$S_i := \{s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}) : \dim (s)_o \geq d - r + i\}$$

die Menge der **i-fach ausgearteten** globalen Schnitte von \mathcal{E} .

Für $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ und $\lambda \in k \setminus \{0\}$ haben s und λs dasselbe Nullstellenschema. Deshalb stellt S_i eine kegelförmige Teilmenge von $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ dar. Das Komplement von S_1 in $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ besteht entweder nur aus regulären Schnitten von \mathcal{E} oder nur aus Schnitten mit leerem Nullstellenschema.

(C2) BEMERKUNG: **(Das Schema der Nullstellen globaler Schnitte von \mathcal{E})**

(a) Bekanntlich gibt es ein abgeschlossenes Unterschema $\mathbb{S}(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{V}(H) \times \mathbb{P}^d$, so daß für

$$\pi : \mathbb{S}(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{V}(H) \times \mathbb{P}^d \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{V}(H)$$

und jeden globalen Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ gilt:

$$\pi^{-1}(s) = \{s\} \times (s)_o \cong (s)_o$$

Das Schema $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ ist dabei sowohl als das Faserprodukt des Nullschnitts $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{V}(\mathcal{E}^\sim)$ mit dem Auswertungshomomorphismus $\delta : \mathbb{V}(H) \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{V}(\mathcal{E}^\sim)$ als auch als das Nullstellenschema des globalen Schnitts $\Delta := (\text{pr}_1, \delta) : \mathbb{V}(H) \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{V}(\text{pr}_2^* \mathcal{E}^\sim)$ gegeben. Hierbei bezeichnet pr_i ($i = 1, 2$) die Projektion auf den i -ten Faktor von $\mathbb{V}(H) \times \mathbb{P}$. Das Schema $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ hat die abgeschlossenen Punkte

$$\{(s, P) \in \mathbb{V}(H) \times \mathbb{P} : P \in (s)_o\}.$$

- (b) Ebenso erhält man ein projektives Schema $\overline{\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{P}(H) \times \mathbb{P}^d$ mit den abgeschlossenen Punkten

$$\{([s], P) \in \mathbb{P}(H) \times \mathbb{P}^d : P \in (s)_o\}$$

und einen Morphismus $\bar{\pi}: \overline{\mathbb{S}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{P}(H) \times \mathbb{P}^d \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{P}(H)$ mit $\bar{\pi}^{-1}([s]) \cong (s)_o$ für alle $s \in H^o(\mathbb{P}, \mathcal{E})$.

- (c) Wendet man den Halbstetigkeitssatz von Chevalley auf $\bar{\pi}$ an, so folgt, daß S_i für $i = 1, \dots, r-1$ die Menge der abgeschlossenen Punkte einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{V}(H)$ darstellt, die wir wieder mit S_i bezeichnen.
- (d) Wird \mathcal{E} von globalen Schnitten erzeugt, so ist $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ bzgl. $\mathbb{S}(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{V}(H) \times \mathbb{P}^d \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{P}^d$ ein Vektorbündel vom Rang $n - r$.

(C3) DEFINITION:

- (a) \mathcal{E} hat **gute globale Schnitte**, wenn \mathcal{E} einen regulären globalen Schnitt besitzt und für alle $i = 1, \dots, r - 1$ gilt:

$$\text{codim}(S_i, \mathbb{V}(H)) \geq i$$

- (b) \mathcal{E} hat **sehr gute globale Schnitte**, wenn \mathcal{E} gute globale Schnitte hat und es für jeden Punkt $P \in \mathbb{P}$ ein $s \in H^o(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ gibt mit $s_P \notin \mathfrak{m}_P \mathcal{E}_P$.

Mit Hilfe des folgenden Satzes erhalten wir eine große Klasse von Beispielen für diese beiden Begriffe.

(C4) SATZ.

Besitzt \mathcal{E} einen regulären globalen Schnitt, und ist $\dim \mathbb{S}(\mathcal{E}) = d + n - r$, so hat \mathcal{E} gute globale Schnitte.

BEWEIS:

Angenommen es gibt ein $i \in \{1, \dots, r - 1\}$ mit $\text{codim}(S_i, \mathbb{V}(H)) \leq i - 1$, das heißt mit $\dim S_i \geq n - i + 1$. Sei A eine irreduzible Komponente maximaler Dimension von S_i , sei η der generische Punkt von A , sei B eine irreduzible Komponente maximaler Dimension von $\pi^{-1}(\eta)$, und sei C eine irreduzible Komponente von $\pi^{-1}(A)$, die B umfaßt.

Versehe A und C mit der induzierten reduzierten Unterschemastruktur von $\mathbb{V}(H)$ bzw. $\mathbb{S}(\mathcal{E})$. Dann ist $\pi|_C: C \rightarrow A$ ein dominanter Morphismus integrier projektiver Varietäten, denn $\eta \in \pi(B) \subseteq \pi(C)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \dim C &= \dim A + \dim (\pi|_C)^{-1}(\eta) \\ &\geq \dim A + \dim B \\ &= \dim S_i + \dim \pi^{-1}(\eta) \end{aligned}$$

Wähle einen abgeschlossenen Punkt $s \in A$ mit $\dim \pi^{-1}(s) = \dim \pi^{-1}(\eta)$. Wegen $s \in S_i$ ist dann $\dim \pi^{-1}(s) = \dim (s)_o \geq d - r + i$, also

$$\dim C \geq \dim S_i + \dim (s)_o \geq (n - i + 1) + (d - r + i) = \dim \mathbb{S}(\mathcal{E}) + 1,$$

was wegen $C \subseteq \mathbb{S}(\mathcal{E})$ unmöglich ist.

q.e.d.

(C5) KOROLLAR.

Wird \mathcal{E} von globalen Schnitten erzeugt, und besitzt \mathcal{E} einen regulären globalen Schnitt, so hat \mathcal{E} sehr gute globale Schnitte.

BEWEIS:

Nach Bemerkung (C2.d) ist $\mathbb{S}(\mathcal{E})$ ein Vektorbündel vom Rang $n - r$ über \mathbb{P}^d . Also gilt insbesondere $\dim \mathbb{S}(\mathcal{E}) = d + n - r$. Wie der Satz zeigt, hat \mathcal{E} dann gute globale Schnitte. Die Zusatzbedingung dafür, daß \mathcal{E} sogar sehr gute globale Schnitte hat, ist offensichtlich erfüllt. **q.e.d.**

(C6) BEISPIEL:

Für $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n_r)$ mit $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) \mathcal{E} hat gute globale Schnitte.
- (b) \mathcal{E} hat sehr gute globale Schnitte.
- (c) Es gilt $r \leq d$ und $n_1, \dots, n_r > 0$.

BEWEIS:

“(a) \implies (c)” Wäre $r > d$ oder ein $n_i \leq 0$, so besäße \mathcal{E} keinen regulären globalen Schnitt.

“(c) \implies (b)” In diesem Fall wird \mathcal{E} von globalen Schnitten erzeugt und besitzt den regulären globalen Schnitt $(X_1^{n_1}, \dots, X_r^{n_r})$.

“(b) \implies (a)” Dies ist klar. **q.e.d.**

(C7) BEMERKUNG:

- (a) Für jedes $m \geq 1$ gibt es eine kanonische k -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_m : \bigwedge_k^m H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}) &\longrightarrow H^0(\mathbb{P}, \bigwedge^m \mathcal{E}) \\ s_1 \wedge_k \cdots \wedge_k s_m &\longmapsto s_1 \wedge \cdots \wedge s_m. \end{aligned}$$

Insbesondere sind globale Schnitte $s_1, \dots, s_m \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ mit $1 \leq m \leq n$ k -linear unabhängig, wenn $s_1 \wedge \cdots \wedge s_m \neq 0$ ist in $H^0(\mathbb{P}, \bigwedge^m \mathcal{E})$.

- (b) Sind $s_1, \dots, s_m \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ k -linear unabhängige Schnitte mit $\dim (s_1 \wedge \cdots \wedge s_{m-1})_o \leq d - 2$, so ist $s_1 \wedge \cdots \wedge s_m \neq 0$ in $H^0(\mathbb{P}, \bigwedge^m \mathcal{E})$.
- (c) Die Funktion $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ ($m \mapsto h^0 \mathcal{E}(m)$) ist monoton zunehmend.
- (d) Ist $h^0 \mathcal{E}(-1) \neq 0$, so ist $h^0 \mathcal{E} \geq d + 1$.

BEWEIS:

“(a)” Die Abbildung $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})^m \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \bigwedge^m \mathcal{E})$ ($(s_1, \dots, s_m) \mapsto s_1 \wedge \cdots \wedge s_m$) ist offenbar k -multilinear und alternierend. Wende jetzt die universelle Eigenschaft der äußeren Potenz an.

“(b)” Angenommen $s_1 \wedge \cdots \wedge s_m = 0$. Sei η der generische Punkt von \mathbb{P} . Dann ist $(s_1 \wedge \cdots \wedge s_m)_\eta = 0$. Also gibt es $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}, \eta}$ mit $\varphi_1(s_1)_\eta + \cdots + \varphi_m(s_m)_\eta = 0$. Wegen $(s_1 \wedge \cdots \wedge s_{m-1})_\eta \neq 0$ muß dabei $\varphi_m \neq 0$ sein. Finde eine offene affine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}$ der Form $U = D_+(F)$ mit einem homog. Polynom $F \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\delta))$

vom Grad δ und Funktionen $f_1, \dots, f_m \in H^0(U, \mathcal{O}_U)$, so daß φ_i für $i = 1, \dots, m$ der Keim von f_i in η ist und $f_1(s_1|_U) + \dots + f_m(s_m|_U) = 0$.

Nach [Ha1], II (5.14) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß sich $F^N f_1, \dots, F^N f_m$ zu globalen Schnitten g_1, \dots, g_m von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\delta N)$ fortsetzen. Aus $(g_1 s_1 + \dots + g_m s_m)|_U = 0$ folgt dann $g_1 s_1 + \dots + g_m s_m = 0$ in $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}(\delta N))$. O. E. kann man hierbei annehmen, daß g_1, \dots, g_m keinen gemeinsamen Teiler haben. Auf Grund der linearen Unabhängigkeit von $\{s_1, \dots, s_m\}$ kann g_m nicht konstant sein.

Auf der Hyperfläche $H := \mathcal{V}(g_m)$ gilt dann $(g_1 s_1)|_H + \dots + (g_{m-1} s_{m-1})|_H = 0$, also

$$(*) \quad (g_i|_H)(s_1 \wedge \dots \wedge s_{m-1})|_H = 0$$

für $i = 1, \dots, m-1$. Wegen der Teilerfremdheit von g_1, \dots, g_m gibt es eine irreduzible Komponente $H' \subseteq H$ und ein $i \in \{1, \dots, m-1\}$ mit $g_i|_{H'} \neq 0$. Also ist $U' := D_+(g_i) \cap H'$ eine nichtleere offene Teilmenge von H' mit $U' \subseteq (s_1 \wedge \dots \wedge s_{m-1})_o$. Dies widerspricht der Voraussetzung $\dim(s_1 \wedge \dots \wedge s_{m-1})_o \leq d-2$.

- “(c)” Die Multiplikation $\mu_{X_o}: H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}(m-1)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}(m))$ ist für alle $m \in \mathbb{Z}$ injektiv.
“(d)” Für $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E}(-1)) \setminus \{0\}$ ist die Multiplikation $\mu_s: H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ injektiv. **q.e.d.**

Im folgenden spezialisieren wir auf den Fall $d = r = 3$ und geben Kriterien dafür an, daß \mathcal{E} gute bzw. sehr gute globale Schnitte hat. Sei also $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^3$, und \mathcal{E} sei ein lokalfreier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang drei. Dann ist auch $\bigwedge^2 \mathcal{E}$ ein lokalfreier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang drei.

(C8) LEMMA.

Sei $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ ein regulärer Schnitt von \mathcal{E} und $Y := (s)_o$. Definiert man $\mathcal{F} := \ker s^\vee$, so hat man eine exakte Sequenz

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{J}_Y \rightarrow 0.$$

Es gilt:

- (a) \mathcal{F} ist ein reflexiver $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang zwei, der außerhalb von Y lokalfrei ist, und $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong \mathcal{O}_Y$.
(b) Ist $s' \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ ein weiterer globaler Schnitt von \mathcal{E} und setzt man $t := H^0(i^\vee)(s') \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}^\vee)$, so ist $(t)_o = (s \wedge s')_o$.

BEWEIS:

- “(a)” Aus $\text{codim}(Y, \mathbb{P}) = 3$ und der kohomologischen Charakterisierung der Tiefe folgt $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{J}_Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0$, weshalb Dualisieren von (1) die exakte Sequenz

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{s} \mathcal{E} \xrightarrow{i^\vee} \mathcal{F}^\vee \rightarrow 0$$

und nochmaliges Dualisieren die exakte Sequenz

$$(3) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F}^{\sim\sim} \xrightarrow{i^{\sim\sim}} \mathcal{E}^{\sim} \xrightarrow{s^{\sim}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^{\sim}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \longrightarrow 0$$

liefert. Mithin ist $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(\mathcal{F}^{\sim}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \cong \mathcal{O}_Y$ und $\mathcal{F}^{\sim\sim} \cong \mathcal{F}$, d.h. \mathcal{F} ist ein reflexiver $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang zwei, der außerhalb von Y lokalfrei ist.

“(b)” Sei

$$(4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{s} \mathcal{E} \xrightarrow{\wedge s} \wedge^2 \mathcal{E} \xrightarrow{\wedge s} \det \mathcal{E} \longrightarrow \det \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

der Koszulkomplex zu s (vgl. [K1], (4.5) und (4.6)). Nach (2) spaltet (4) wie folgt auf:

$$(5) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}} & \xrightarrow{s} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\wedge s} & \wedge^2 \mathcal{E} & \xrightarrow{\wedge s} & \det \mathcal{E} \\ & & \searrow i^{\sim} & & \nearrow i & & \\ & & & \mathcal{F}^{\sim} & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & & \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

Wegen $t = H^0(i^{\sim})(s')$ gilt dann $H^0(i)(t) = s \wedge s'$. Durch Dualisieren von i ergibt sich ein kommutatives Dreieck:

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} (\wedge^2 \mathcal{E})^{\sim} & \xrightarrow{i^{\sim}} & \mathcal{F} \\ (s \wedge s')^{\sim} \searrow & & \swarrow t^{\sim} \\ & \mathcal{O}_{\mathbb{P}} & \end{array}$$

Hierbei ist i^{\sim} auf Grund der Exaktheit des Koszulkomplexes

$$(7) \quad 0 \rightarrow \det \mathcal{E}^{\sim} \rightarrow \wedge^2 \mathcal{E}^{\sim} \rightarrow \mathcal{E}^{\sim} \xrightarrow{s^{\sim}} \mathcal{J}_Y \rightarrow 0$$

und wegen $\mathcal{F} = \ker s^{\sim}$ surjektiv. Wie man an Hand von (6) erkennt, ist im $t^{\sim} = \text{im}(s \wedge s')^{\sim}$, d.h. $(t)_o$ ist auch das Nullstellenschema von $s \wedge s' \in H^0(\mathbb{P}, \wedge^2 \mathcal{E})$.

q.e.d.

(C9) LEMMA.

Seien $s, s' \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ zwei Schnitte von \mathcal{E} , so daß $\dim(s \wedge s')_o \leq 1$ ist. Dann gilt:

- (a) Das Nullstellenschema von $s \wedge s' \in H^0(\mathbb{P}, \wedge^2 \mathcal{E})$ ist rein 1-dimensional.
- (b) Genau dann ist $C := (s \wedge s')_o$ eine Gorensteinkurve, wenn $(s)_o \cap (s')_o = \emptyset$ ist.
- (c) Es gilt $(s)_o \subseteq (s \wedge s')_o$ und $(s')_o \subseteq (s \wedge s')_o$.

BEWEIS:

Für einen Punkt $P \in C := (s \wedge s')_o$ sei $\{e_1, e_2, e_3\}$ eine Basis von $\mathcal{E}_{\check{P}}$, sei $s_P = t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3$ mit $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}, P}$, und sei $s'_P = t'_1 e_1 + t'_2 e_2 + t'_3 e_3$ mit $t'_1, t'_2, t'_3 \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}, P}$. Dann ist das Ideal $\mathcal{J}_{C, P}$ von C in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}, P}$ gegeben durch

$$\mathcal{J}_{C, P} = (t_1 t'_2 - t_2 t'_1, t_2 t'_3 - t_3 t'_2, t_3 t'_1 - t_1 t'_3).$$

“(a)” Für derartige Determinantenideale gilt bekanntlich $\text{ht}(\mathcal{J}_{C, P}) \leq 2$ (vgl. [BV], (2.1)), also $\dim \mathcal{O}_{C, P} \geq 1$. Nach [BV], (2.7) ist $\mathcal{O}_{C, P}$ ein Cohen-Macaulay Ring. Folglich ist $C = (s \wedge s')_o$ rein 1-dimensional.

“(b)” “ \implies ” Angenommen, es gibt einen Punkt $P \in (s)_o \cap (s')_o$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{J}_{C, P}$ ein Gorensteinideal der Höhe zwei und damit ein vollständiger Durchschnitt. Auf Grund des Lemmas von Nakayama können wir annehmen, daß $\{t_1 t'_2 - t_2 t'_1, t_2 t'_3 - t_3 t'_2\}$ eine reguläre Folge in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}, P}$ ist, die $\mathcal{J}_{C, P}$ erzeugt. Wegen

$(t_1 t'_2 - t_2 t'_1, t_2 t'_3 - t_3 t'_2) \subseteq (t_2, t'_2)$ ist auch $\{t_2, t'_2\}$ eine reguläre Folge in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}, P}$.

Wir wenden nun [He2], (3.3) mit $R = \mathcal{O}_{\mathbb{P}, P}$, $(x_1, x_2) = (t_2, t'_2)$, $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -t'_1 & t_1 \\ t'_3 & -t_3 \end{pmatrix}$, $(a_1, a_2) = (t_1 t'_2 - t_2 t'_1, t_2 t'_3 - t_3 t'_2)$ und $\Delta = t_3 t'_1 - t_1 t'_3$ an und erhalten, daß der Komplex

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}, P}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} t_3 & t'_3 \\ t_1 & t'_1 \\ t_2 & t'_2 \end{pmatrix}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}, P}^3 \xrightarrow{(a_1, a_2, \Delta)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}, P} \rightarrow \mathcal{O}_{C, P} \rightarrow 0$$

exakt ist. Da alle Koeffizienten in \mathfrak{m}_P liegen, haben wir eine minimale freie Auflösung von $\mathcal{O}_{C, P}$, und es folgt $\mu(\mathcal{J}_{C, P}) = 3$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

“ \Leftarrow ” Für jeden Punkt $P \in C$ enthält nach Voraussetzung entweder $\{t_1, t_2, t_3\}$ oder $\{t'_1, t'_2, t'_3\}$ eine Einheit von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}, P}$. Ist etwa $t_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}, P}^\times$, so ergibt sich

$$\mathcal{J}_{C, P} = (t'_2 - t_1^{-1} t_2 t'_1, t'_3 - t_1^{-1} t_3 t'_1),$$

was wegen $\text{ht}(\mathcal{J}_{C, P}) = 2$ zeigt, daß C ein lokal vollständiger Durchschnitt in P ist.

“(c)” Für jeden Punkt $P \in (s)_o$ ist (t_1, t_2, t_3) das Ideal von $(s)_o$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}, P}$, und dieses umfaßt $\mathcal{J}_{C, P}$. **q.e.d.**

(C10) SATZ.

Sei \mathcal{E} ein lokalfreier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang drei auf $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^3$ mit $n := h^0(\mathcal{E}) \geq 2$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) \mathcal{E} hat gute globale Schnitte.
- (b) \mathcal{E} besitzt einen regulären globalen Schnitt und $\dim \mathbb{S}(\mathcal{E}) = \max\{3, n\}$.
- (c) Es gibt zwei reguläre globale Schnitte $s_1, s_2 \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ mit $\dim (s_1 \wedge s_2)_o = 1$.
- (d) \mathcal{E} besitzt einen regulären globalen Schnitt, und für jeden regulären globalen Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ gibt es eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{V}(H)$ mit $\dim (s \wedge s')_o = 1$ für alle globalen Schnitte $s' \in V_{\text{abg.}}$.

BEWEIS:

“(a) \implies (d)” Wähle einen regulären globalen Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ und einen zu $\{\lambda s: \lambda \in k\}$ in $\mathbb{V}(H)$ komplementären linearen Unterraum $K \subseteq \mathbb{V}(H)$. Nach Voraussetzung ist $\text{codim}(S_2, \mathbb{V}(H)) \geq 2$. Also hat der Abschluß des Bildes von S_2 unter der Projektion längs $\{\lambda s: \lambda \in k\}$ auf K mindestens die Kodimension eins. Folglich gibt es eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{V}(H)$, so daß die Gerade $\mathfrak{g}_{s'} := \{s' + \lambda s: \lambda \in k\}$ für kein $s' \in V$ die Menge S_2 trifft. Sei $s' \in V$. Dann sind insbesondere s und s' k -linear unabhängig, d.h. nach Bemerkung (C7.b) ist $s \wedge s' \in H^0(\mathbb{P}, \wedge^2 \mathcal{E}) \setminus \{0\}$ und $\dim(s \wedge s')_o \leq 2$.

Angenommen es gibt eine Fläche $H \subseteq \mathbb{P}$ mit $H \subseteq (s \wedge s')_o$. Bezeichnen m den Grad und $f \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m))$ die Gleichung von H , so liegt $s \wedge s'$ also im Bild der Multiplikationsabbildung $\mu_f: H^0(\mathbb{P}, (\wedge^2 \mathcal{E})(-m)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \wedge^2 \mathcal{E})$. Betrachte das gemäß (C8)(5) konstruierte kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^\vee(-m) & \xrightarrow{t} & \wedge^2 \mathcal{E}(-m) & \xrightarrow{\wedge s} & (\det \mathcal{E})(-m) \\
& & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^\vee & \xrightarrow{t} & \wedge^2 \mathcal{E} & \xrightarrow{\wedge s} & \det \mathcal{E} \\
& & t & \longmapsto & s \wedge s' & &
\end{array}$$

Es zeigt, daß t im Bild der Multiplikationsabbildung $\tilde{\mu}_f: H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}^\vee(-m)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}^\vee)$ liegt. Mit Hilfe der exakten Sequenz (C8)(2) bilden wir nun das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{array}{ccccccccc}
& & & 0 & & 0 & & & & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-m) & \xrightarrow{s} & \mathcal{E}(-m) & \xrightarrow{i^\vee} & \mathcal{F}^\vee(-m) & \longrightarrow & 0 & \\
& & f \downarrow & & f \downarrow & & f \downarrow & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}} & \xrightarrow{s} & \mathcal{E} & \xrightarrow{i^\vee} & \mathcal{F}^\vee & \longrightarrow & 0 & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_H & \xrightarrow{s|_H} & \mathcal{E}|_H & \xrightarrow{(i^\vee)|_H} & \mathcal{F}^\vee|_H & \longrightarrow & 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Hierbei wurde $\mathcal{K} := \ker s|_H$ gesetzt, so daß für $P \notin (s)_o$ gemäß (C8.a) gilt:

$$\mathcal{K}_P \cong \text{Tor}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P},P}}^1(\mathcal{F}_P^\vee, \mathcal{O}_{H,P}) \cong \text{Tor}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P},P}}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P},P}^2, \mathcal{O}_{H,P}) = 0$$

Nach (C8.b) ist $H \subseteq (s \wedge s')_o = (t)_o$, so daß das Bild von t in $H^o(H, \mathcal{F}^\vee|_H)$ verschwindet. Weil die Sequenz

$$0 \longrightarrow s \cdot \mathcal{O}_H \longrightarrow \mathcal{E}|_H \xrightarrow{i^\vee|_H} \mathcal{F}^\vee|_H \longrightarrow 0$$

exakt und $t|_H = i^\vee|_H (s'|_H)$ ist, liegt der Schnitt $s'|_H$ also in $H^o(H, s \cdot \mathcal{O}_H)$. Betrachte nun die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}_H \xrightarrow{s|_H} s \cdot \mathcal{O}_H \longrightarrow 0.$$

Auf Grund des oben Gezeigten ist $\text{Supp } \mathcal{K} \subseteq (s)_o$ 0-dimensional, und daher ist die Abbildung $H^o(H, \mathcal{O}_H) \xrightarrow{H^o(s|_H)} H^o(H, s \cdot \mathcal{O}_H)$ surjektiv. Da $H^o(H, \mathcal{O}_H) \cong k$ ist, gibt es ein $\lambda \in k$ mit $s'|_H = \lambda \cdot s|_H$. Dann liegt aber $s' - \lambda s$ im Bild von μ_f und somit in S_2 , was der Voraussetzung $\mathfrak{g}_{s'} \cap S_2 = \emptyset$ widerspricht. Insgesamt ergibt sich $\dim (s \wedge s')_o \leq 1$, und nach (C9.a) ist $C = (s \wedge s')_o$ rein 1-dimensional.

“(d) \implies (c)” Wegen $S_1 \subsetneq H^o(\mathbb{P}, \mathcal{E})$, und weil \mathcal{E} einen regulären globalen Schnitt besitzt, gibt es einen regulären Schnitt $s_2 \in V$ (vgl. (C1)).

“(c) \implies (b)” Nach Voraussetzung ist $s_1 \wedge s_2 \neq 0$. Nach Bemerkung (C7.a) folgt, daß s_1 und s_2 k -linear unabhängig sind. Ergänze s_1 und s_2 zu einer k -Basis $\{s_1, \dots, s_n\}$ von $H^o(\mathbb{P}, \mathcal{E})$. Wähle eine offene affine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}$, über der \mathcal{E} eine Trivialisierung $\mathcal{E}|_U = \mathcal{O}_U e_1 \oplus \mathcal{O}_U e_2 \oplus \mathcal{O}_U e_3$ hat. Da \mathbb{P} von solchen Mengen U überdeckt wird, genügt es zu zeigen, daß $\mathbb{S}_U(\mathcal{E}) := \mathbb{S}(\mathcal{E}) \cap (\mathbb{V}(H) \times U)$ die Dimension $\max\{3, n\}$ hat.

Schreibe $s_i = t_{1i}e_1 + t_{2i}e_2 + t_{3i}e_3$ für $i = 1, \dots, n$. Bekanntlich ist

$$\mathbb{S}_U(\mathcal{E}) \cong \text{Spec } H^o(U, \mathcal{O}_U)[\Lambda_1, \dots, \Lambda_n]/(t_{1\Lambda}, t_{2\Lambda}, t_{3\Lambda})$$

mit Unbestimmten $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ und mit $t_{i\Lambda} := t_{i1}\Lambda_1 + \dots + t_{in}\Lambda_n$ für $i = 1, 2, 3$ (vgl. Bemerkung (C2)). Für $m = 1, 2, 3$ sei I_m das von den $m \times m$ -Minoren der Matrix $\mathfrak{A} := (t_{ij}) \in M_{3 \times n}(H^o(U, \mathcal{O}_U))$ erzeugte Ideal von $H^o(U, \mathcal{O}_U)$. Für den $H^o(U, \mathcal{O}_U)$ -Modul

$$M := \text{coker } (H^o(U, \mathcal{O}_U))^3 \xrightarrow{\mathfrak{A}^T} H^o(U, \mathcal{O}_U)^n$$

gilt $\text{rk } M = n - \text{rk } \mathfrak{A}$. Wegen $\mathbb{S}_U(\mathcal{E}) \cong \text{Spec } \text{Sym } M$ können wir den Satz von A. Simis und W. V. Vasconcelos über die Dimension symmetrischer Algebren (vgl. [SV], (2.2)) anwenden. Wir prüfen seine Voraussetzungen:

- (1) Auf Grund der Regularität von s_1 ist $\dim((s_1)_o \cap U) \leq 0$, also $\text{ht}(t_{11}, t_{21}, t_{31}) \geq 3$. Insbesondere ist $\text{Tiefe}(I_1) = \text{ht}(I_1) \geq 3$.

- (2) Wegen $\dim((s_1 \wedge s_2)_o \cap U) \leq 1$ ist Tiefe $(I_2) = \text{ht}(I_2) \geq 2$.
- (3) Im Fall $n \geq 3$ folgt aus der linearen Unabhängigkeit von $\{s_1, s_2, s_3\}$ und wegen $\dim(s_1 \wedge s_2)_o = 1$ nach Bemerkung (C7.b), daß $s_1 \wedge s_2 \wedge s_3 \neq 0$ ist. Also ist $(s_1 \wedge s_2 \wedge s_3)_o \cap U = \mathcal{V}(\det(t_{ij})_{i,j=1,2,3}) \subsetneq U$ und somit $I_3 \neq (0)$, das heißt Tiefe $(I_3) \geq 1$.

Im Fall $n = 2$ folgt aus (1) und (2), daß $\text{rk } M = 0$ und nach dem Satz von Simis-Vasconcelos also $\dim \mathbb{S}_U(\mathcal{E}) = 3$ ist. Im Fall $n \geq 3$ folgt $\text{rk } M = n - 3$ und somit $\dim \mathbb{S}_U(\mathcal{E}) = n$. Insgesamt erhalten wir die Behauptung.

“(b) \implies (a)” Im Fall $n \geq 3$ folgt die Behauptung aus Satz (C4). Im Fall $n = 2$ ist $S_1 \subsetneq H^o(\mathbb{P}, \mathcal{E})$, da \mathcal{E} einen regulären globalen Schnitt besitzt. Wir zeigen noch $S_2 = \{0\}$. Gäbe es einen Schnitt $s \in S_2 \setminus \{0\}$, so wäre s von der Form $s = f \cdot \tilde{s}$ mit $f \in H^o(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m))$ für ein $m \geq 1$ und mit $\tilde{s} \in H^o(\mathbb{P}, \mathcal{E}(-m)) \setminus \{0\}$. Nach (C7.c) folgt $h^o \mathcal{E}(-1) \neq 0$, und nach (C7.d) hieraus $n = h^o \mathcal{E} \geq 4$, was der Voraussetzung widerspricht. **q.e.d.**

(C11) SATZ.

Sei \mathcal{E} ein lokalfreier $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -Modul vom Rang drei auf $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^3$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) \mathcal{E} hat sehr gute globale Schnitte.
- (b) Es gibt zwei reguläre globale Schnitte $s_1, s_2 \in H^o(\mathbb{P}, \mathcal{E})$, so daß $(s_1 \wedge s_2)_o$ eine Gorensteinkurve ist.
- (c) \mathcal{E} besitzt einen regulären globalen Schnitt, und zu jedem regulären globalen Schnitt $s \in H^o(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ gibt es eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{V}(H)$, so daß $(s \wedge s')_o$ für alle globalen Schnitte $s' \in V_{\text{abg.}}$ eine Gorensteinkurve ist.

BEWEIS:

“(a) \implies (c)” Nach Satz (C10) gibt es für jeden regulären Schnitt $s \in H^o(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ eine offene Menge $\tilde{V} \subseteq \mathbb{V}(H)$, so daß für alle $s' \in \tilde{V}_{\text{abg.}}$ gilt: $\dim(s \wedge s')_o = 1$. Für jeden Punkt $P \in (s)_o$ ist $\{\tilde{s} \in H^o(\mathbb{P}, \mathcal{E}): \tilde{s}_P \in \mathfrak{m}_P \mathcal{E}_P\}$ ein linearer Unterraum von $H^o(\mathbb{P}, \mathcal{E})$, der nach Voraussetzung echt in $H^o(\mathbb{P}, \mathcal{E})$ enthalten ist. Folglich gibt es eine offene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{V}(H)$, so daß $W_{\text{abg.}}$ keinen dieser endlich vielen Untervektorräume trifft. Setze $V := \tilde{V} \cap W$. Für jedes $s' \in V_{\text{abg.}}$ ist $(s \wedge s')_o$ nach (C9.b) dann eine Gorensteinkurve.

“(c) \implies (b)” Wähle einen regulären Schnitt $s_2 \in V_{\text{abg.}}$.

“(b) \implies (a)” Nach Satz (C10) hat \mathcal{E} gute globale Schnitte. Nach Lemma (C9.b) ist für jeden Punkt $P \in \mathbb{P}$ entweder $P \notin (s_1)_o$ oder $P \notin (s_2)_o$, das heißt entweder $(s_1)_P \notin \mathfrak{m}_P \mathcal{E}_P$ oder $(s_2)_P \notin \mathfrak{m}_P \mathcal{E}_P$. **q.e.d.**

Literaturverzeichnis

- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths und J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Volume I, Springer, New York 1985.
- [AK] A. Altman und S. Kleiman, *Introduction to Grothendieck duality theory*, *Lecture Notes in Math.* **146**, Springer, Heidelberg 1970.
- [Bro] M. Brodmann, *Bounds on the cohomological Hilbert functions of a projective variety*, *J. of Algebra* **109** (1987), S. 352–380.
- [Bru] J. Brun, *Les fibrés de rang deux sur \mathbb{P}_2 et leurs sections*, *Bull. Soc. Math. France* **108** (1980), S. 457–473.
- [BV] W. Bruns und U. Vetter, *Determinantal rings*, *Lecture Notes in Math.* **1327**, Springer, Heidelberg 1988.
- [C] I. Coandă, *The Chern classes of the stable rank 3 vector bundles on \mathbb{P}^3* , *Math. Ann.* **273** (1985), S. 65–79.
- [D] E. Davis, *0-dimensional subschemes of \mathbb{P}^2 : new applications of Castelnuovo's function*, *Ann. Univ. Ferrara* **32** (1986), S. 93–107.
- [DM1] E. Davis und P. Maroscia, *Complete intersections in \mathbb{P}^2 : Cayley-Bacharach characterizations*, in: *Complete intersections — Acireale 1983*, *Lecture Notes in Math.* **1092**, Springer, Heidelberg 1984, S. 253–269.
- [DM2] E. Davis und P. Maroscia, *On the Cayley-Bacharach theorem*, *Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino*, preprint no. 1983–34.
- [EF] G. Elencwajg und O. Forster, *Bounding cohomology groups of vector bundles on \mathbb{P}_n* , *Math. Ann.* **246** (1980), S. 251–270.
- [EG] E.G. Evans und P. Griffith, *Syzygies*, *London Math. Soc. Lect. Note Series* **106**, Cambridge University Press, Cambridge 1985.
- [EGA] A. Grothendieck, *Eléments de Géométrie Algébrique*, tome II, *Publ. Math. IHES* **8**, Inst. des hautes études scient., Paris 1961.
- [G] A. Grothendieck, *Local cohomology*, *Lecture Notes in Math.* **41**, Springer, Heidelberg 1967.
- [GH1] P. Griffiths und J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, J. Wiley & Sons, New York 1978.
- [GH2] P. Griffiths und J. Harris, *Residues and zero-cycles on algebraic varieties*, *Ann. of Math.* **108** (1978), S. 461–505.
- [GM] A. Geramita und P. Maroscia, *The ideal of forms vanishing at a finite set of points in \mathbb{P}^n* , *J. Algebra* **90** (1984), S. 528–555.
- [GW] S. Goto und K. Watanabe, *On graded rings I*, *J. Math. Soc. Japan* **30** (1978), S. 179–213.
- [Ha1] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer, New York 1977.

- [Ha2] R. Hartshorne, *Generalized divisors on Gorenstein curves and a theorem of Noether*, J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), S. 375–386.
- [Ha3] R. Hartshorne, *Varieties of small codimension in projective space*, Bull. AMS **80** (1974), S. 1017–1032.
- [Ha4] R. Hartshorne, *Stable reflexive sheaves*, Math. Ann. **254** (1980), S. 121–176.
- [Ha5] R. Hartshorne, *Stable vector bundles of rank 2 on \mathbb{P}^3* , Math. Ann. **238** (1978), S. 229–280.
- [He1] J. Herzog, *Ringe mit nur endlich vielen Isomorphieklassen von maximalen, unzerlegbaren Cohen-Macaulay-Moduln*, Math. Ann. **233** (1978), S. 21–34.
- [He2] J. Herzog, *Certain complexes associated to a sequence and a matrix*, Manus. Math. **12** (1974), S. 217–248.
- [Ho] G. Horrocks, *Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring*, Proc. London Math. Soc. **14** (1964), S. 689–713.
- [K1] E. Kunz, *Residuen und Dualität auf projektiven algebraischen Varietäten*, Regensburger Trichter **19**, Fak. für Math. der Univ., Regensburg 1986.
- [K2] E. Kunz, *Kähler Differentials*, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1986.
- [K3] E. Kunz, *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1980.
- [KK] M. Kreuzer und E. Kunz, *Traces in strict Frobenius algebras and strict complete intersections*, J. reine angew. Math. **381** (1987), S. 181–204.
- [L1] J. Lipman, *Dualizing sheaves, differentials and residues on algebraic varieties*, Astérisque **117**, Soc. Math. de France, Paris 1984.
- [L2] J. Lipman, *Residues and traces of differential forms via Hochschild homology*, Contemp. Math. **61**, Am. Math. Soc., Providence 1987.
- [Lo] A. Lorenzini, *Graded rings*, in: The curves seminar at Queen’s Vol. II, Queen’s papers of pure and applied math. **61**, Queen’s University, Kingston 1982.
- [OSS] C. Okonek, M. Schneider und H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Birkhäuser, Boston 1980.
- [S] J.P. Serre, *Sur les modules projectifs*, Sémin. Dubreil **14** (1960/61), Fasc. 1, exposé 2, Secr. Math., Paris 1963.
- [SV] A. Simis und W.V. Vasconcelos, *On the dimension and integrality of symmetric algebras*, Math. Z. **177** (1981), S. 341–358.
- [T] A.N. Tyurin, *Cycles, curves and vector bundles on an algebraic surface*, Duke Math. J. **54** (1987), S. 1–26.
- [W] K. Watanabe, *Study of algebras with straightening laws of dimension 2*, in: Algebraic and Topological Theories — to the memory of Dr. Takehiko Miyata (1985), S. 622–639.