Prof. Dr. Martin Kreuzer
Fachbereich Mathematik
Universität Bayreuth

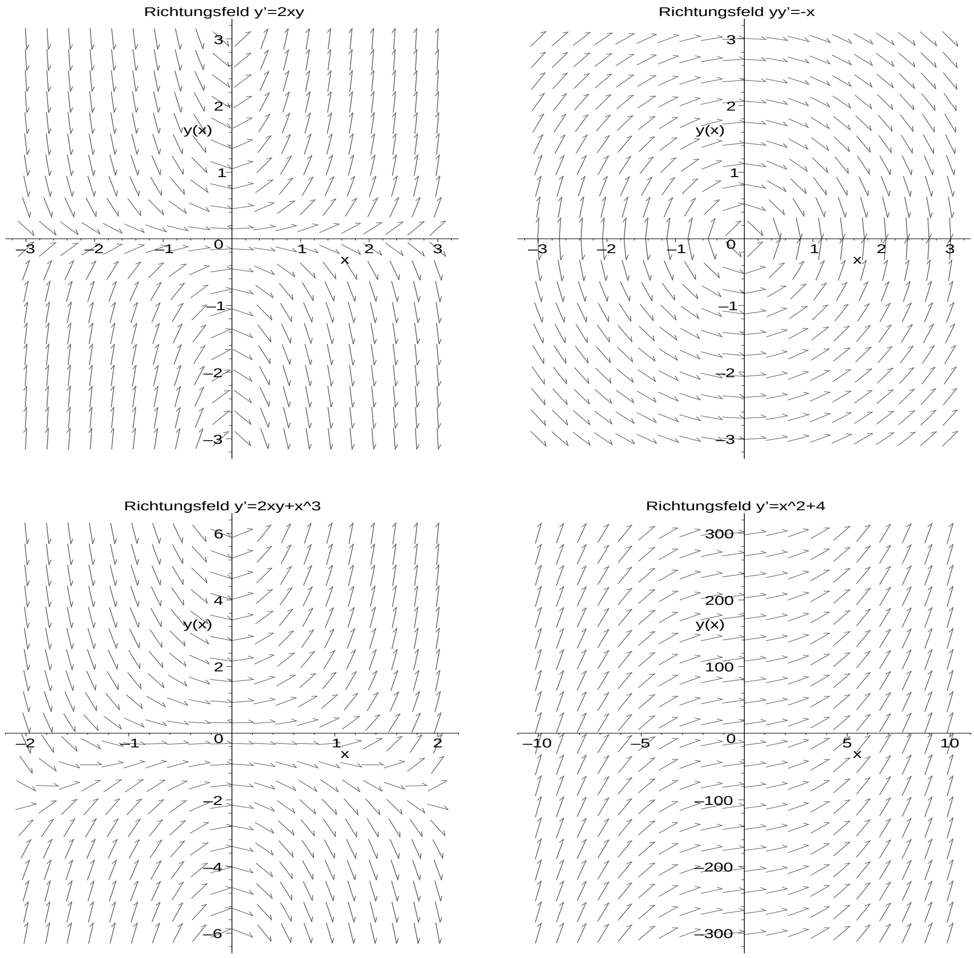
SS 2001

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschafler II

Blatt 10

– Lösungen –

Aufgabe 46



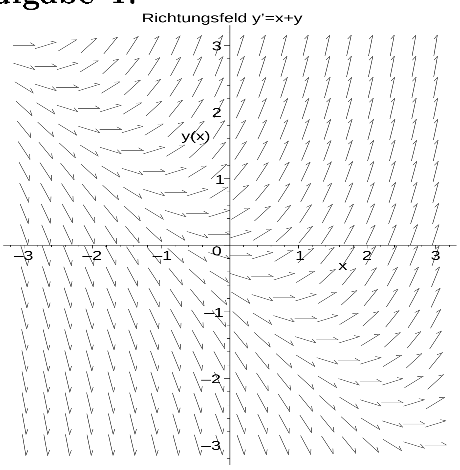
a) $y' = 2xy$ ist eine lineare homogene DGL erster Ordnung. Damit ergibt sich $\varphi(x) = c \cdot \exp(\int_0^x 2tdt) = c \cdot e^{x^2}$ mit $\varphi(0) = c$.

b) Für $y \neq 0$ ist $y' = -\frac{x}{y}$. Somit liegt eine DGL mit getrennten Variablen vor ($y = f(x)g(y)$). Daraus folgt $F(x) = \int_0^x -tdt = -\frac{1}{2}x^2$ und $G(y) = \int_c^y tdt = \frac{1}{2}(y^2 - c^2)$ und $G(\varphi(x)) = F(x) \Longrightarrow \varphi(x) = \sqrt{c^2 - x^2}$ für $x \in]-c, c[$ mit $\varphi(0) = c > 0$.

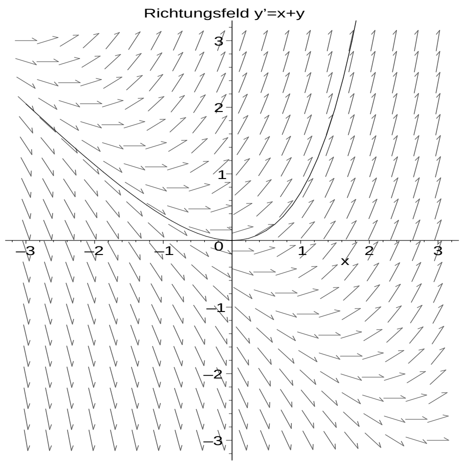
c) $y' = 2xy - x^3$: Die Lösung der homogenen DGL ist in Teilaufgabe a) berechnet worden. Die Lösung für die inhomogene DGL ergibt sich zu $\psi(x) = e^{x^2} \cdot \left(c + \int_0^x b(t)\varphi(t)^{-1}dt\right)$ mit $\psi(0) = c$. Mittels Substitution $s = t^2$ und partieller Integration ergibt sich $\int\limits_0^x t^3 e^{-t^2}dt = \int\limits_0^{x^2} \frac{1}{2}se^{-s}ds = -\frac{1}{2}se^{-s}|_0^{x^2} + \int\limits_0^{x^2} \frac{1}{2}e^{-s}ds = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}$ und damit $\psi(x) = (c + \frac{1}{2})e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2+1)$.

d) $y' = x^2 + 4 \Longrightarrow \varphi(x) := y = \int x^2 + 4\ dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x + c$ mit $\varphi(0) = c$.

Aufgabe 47



a)



b)

c) Aus $y(x) = ce^x - x - 1$ folgt $y'(x) = ce^x - 1$ und damit $y' = ce^x - 1 = x + y$.

Aufgabe 48

a) $f(x, y, y') = y' \cos(x) + y \sin(x) - 1$ ist für $(x, y, y') \in \mathbb{R}^3$ definiert. $D = \mathbb{R}^3$

b) Auflösen der Gleichung nach y' ist nur für $\cos(x) \neq 0$ möglich. Damit ergibt sich $y' = g(x, y) = -y \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}$ mit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Sei $y = \sin(x) + c\cos(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $y' = \cos(x) - c\sin(x) \Longrightarrow y'\cos(x) + y\sin(x) - 1 = (\cos(x) - c\sin(x))\cos(x) + (\sin(x) + c\cos(x))\sin(x) - 1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) - 1 = 0$.

Aufgabe 49

a) $y' = -\lambda y$ ist eine lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung. Nach Vorlesung ergibt sich die Lösung zu $\varphi(x) = ce^{-\lambda(x - x_0)}$ mit Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = c$.

b) In Höhe $x_0 = 0$ Meter herrscht ein Druck von 1 bar. $\Longrightarrow 1 = \varphi(0) = ce^0 = c$. Damit herrscht in x Meter Höhe ein Druck von $\varphi(x) = e^{-0{,}125 \cdot 10^{-3}x}$.

c) $y' = -ay + b$ ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Nach Vorlesung ergibt sich die Lösung zu $\psi(x) = \varphi(x)\left(c + \int_{x_0}^{x} \frac{b}{\varphi(t)}dt\right)$. Nach Teil a) ist $\varphi(x) = e^{-ax}$. Dies liefert für $\int_0^x \frac{b}{\varphi(t)}dt = \int_0^x be^{at}dt = \frac{b}{a}(e^{ax} - 1)$ und somit $\psi(x) = e^{-ax}\left(10 + \frac{b}{a}(e^{ax} - 1)\right) = \left(10 - \frac{b}{a}\right)e^{-ax} + \frac{b}{a}$

Aufgabe 50

a) $y' = k(a - y)(b - y)$, $a \neq b$ ist eine DGL mit getrennten Variablen $y' = f(x)g(y)$ mit $f(x) = k$ und $g(y) = (a - y)(b - y)$. Die Lösung ergibt sich aus $G(\varphi(x)) = F(x)$ mit $G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}dt$ und $F(x) = \int_0^x f(t)dt = kx$, wobei $y(0) = y_0$. Zur Berechnung von $G(y)$ wird $\frac{1}{g(t)}$ mittels Partialbruchzerlegung aufgespalten zu $\frac{1}{(a-t)(b-t)} = \frac{X}{a-t} + \frac{Y}{b-t}$.

$$\begin{array}{rcll}
1 &=& X(b - t) + Y(a - t) = Xb + Ya - (X + Y)t & \Longleftrightarrow \\
0 &=& X + Y \text{ und } 1 = Xb + Ya & \Longleftrightarrow \\
1 &=& X(b - a) & \Longleftrightarrow \\
X &=& \frac{1}{b-a} \Longrightarrow Y = -\frac{1}{b-a} &
\end{array}$$

Damit ist $\frac{1}{(a-t)(b-t)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a-t} - \frac{1}{b-t}\right)$ und

$$\begin{aligned}
G(y) &= \frac{1}{b-a}\left(\int_{y_0}^{y} \frac{1}{a-t}dt - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{b-t}dt\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\left(-\ln(a-t)|_{y_0}^{y} + \ln(b-t)|_{y_0}^{y}\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\ln(a-y_0) - \ln(a-y) + \ln(b-y) - \ln(b-y_0)\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\ln\left(\frac{a-y_0}{a-y}\cdot\frac{b-y}{b-y_0}\right)\right).
\end{aligned}$$

$G(\varphi(x)) = F(x)$ liefert nun $\frac{1}{b-a}\left(\ln\left(\frac{a-y_0}{a-\varphi(x)}\cdot\frac{b-\varphi(x)}{b-y_0}\right)\right) = kx$ und auflösen nach $\varphi(x)$ führt zu

$$\varphi(x) = \frac{a(b-y_0)e^{k(b-a)x} - b(a-y_0)}{(b-y_0)e^{k(b-a)x} - (a-y_0)} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\ln\left(\frac{a-y_o}{b-y_0}\right)}{k(b-a)}\right\},$$

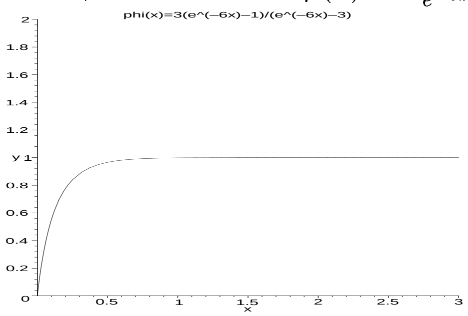
wobei $a, b, k > 0$ und $a \neq b$. (Polstelle bei $x = \frac{\ln\left(\frac{a-y_o}{b-y_0}\right)}{k(b-a)} < 0$, falls $a, b < y_0$ oder $a, b > y_0$.) Für $y_0 = 0$ folgt nun

$$\varphi(x) = \frac{ab\left(e^{k(b-a)x} - 1\right)}{be^{k(b-a)x} - a} = \frac{ab\left(e^{k(a-b)x} - 1\right)}{ae^{k(a-b)x} - b} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{k(b-a)}\right\}.$$

b) i) $a > b$: $e^{k(b-a)x} \to 0$ für $x \to \infty$. $\varphi(x) \to \frac{-ab}{-a} = b$ für $x \to \infty$.

ii) $a < b$: $e^{k(a-b)x} \to 0$ für $x \to \infty$. $\varphi(x) \to \frac{-ab}{-b} = a$ für $x \to \infty$.

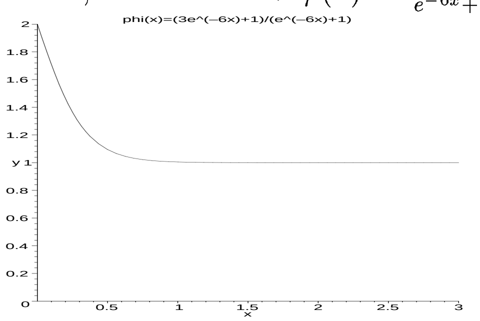
c) $a = 1,\ b = k = 3 \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{3(e^{-6x}-1)}{e^{-6x}-3}$



d) Nach Teilaufgabe a) erhält man für $y_0 = 2$ und $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\ln\left(\frac{a-2}{b-2}\right)}{k(b-a)}\right\}$:

$$\varphi(x) = \frac{a(b-2)e^{k(b-a)x} - b(a-2)}{(b-2)e^{k(b-a)x} - (a-2)} = \frac{b(a-2)e^{k(a-b)x} - a(b-2)}{(a-2)e^{k(a-b)x} - (b-2)}.$$

$a = 1,\ b = k = 3 \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{3e^{-6x}+1}{e^{-6x}+1}$



Aufgabe 51

a) $y' = k\frac{y}{t^3}$, $k \in \mathbb{R}$ Proportionalitätsfaktor.

b) Es liegt eine lineare homogene DGL 1. Ordnung vor. Lösung ist gegeben durch

$$\varphi(t) = b\exp\left(\int_a^t \frac{k}{\tau^3}dt\right) = b\exp\left(-\frac{k}{2\tau^2}\Big|_a^t\right) = be^{\frac{k}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{t^2}\right)}.$$

c) $\varphi(t) = be^{\frac{k}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{t^2}\right)} \to be^{\frac{k}{2a^2}}$ für $t \to \infty$.

Aufgabe 52

a) $y'' + y' - 6y = 0$ ist eine lineare homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ansatz mit $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ und damit Bestimmung der Nullstellen von $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, liefert $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$ und damit $\varphi(x) = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$. Bestimmung von c_1 und c_2 durch die Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi(0) = c_1 + c_2 \\ -3 &= \varphi'(0) = -3c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$

Hieraus folgt $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ und somit $\varphi(x) = e^{-3x}$

b) $y'' - 4y' - 4y = 0$ ist wieder eine lineare homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wie Teilaufgabe a). Nullstellen von $\lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0$ sind $\lambda_1 = 2(1-\sqrt{2})$, $\lambda_2 = 2(1+\sqrt{2})$ und damit $\varphi(x) = c_1e^{2(1-\sqrt{2})} + c_2e^{2(1+\sqrt{2})}$.

c) $y'' - 2y' - 3y = 2x$ ist eine lineare inhomogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zuerst wird eine Lösung der homogenen Gleichung $y'' - 2y' - 3y = 0$ wie in den beiden Teilaufgaben zuvor bestimmt. Nullstellen von $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ sind $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ und damit sind $\varphi_1(x) = e^{-x}$, $\varphi_2(x) = e^{3x}$ eine Basis des Lösungsraums. Die Lösung für die inhomogene DGL ergibt sich nun zu $\psi(x) = (c_1(x) + d_1)\varphi_1(x) + (c_2(x) + d_2)\varphi_2(x)$ mit

$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)\varphi_2(x)}{D}dx \tag{1a}$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x)\varphi_1(x)}{D}dx \tag{1b}$$

$$D = \varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x) \tag{1c}$$

und $f(x) = 2x$ (inhomogener Anteil).
$\Longrightarrow D = 4e^{2x}$, $c_1(x) = -\frac{e^x}{2}(x-1)$, $c_2(x) = -\frac{e^{-3x}}{18}(3x+1)$ und somit

$$\psi(x) = \left(-\frac{e^x}{2}(x-1) + d_1\right)e^{-x} + \left(-\frac{e^{-3x}}{18}(3x+1) + d_2\right)e^{3x} = d_1e^{-x} + d_2e^{3x} - \frac{2x}{3} + \frac{4}{9}.$$

d) $y'' + 2y' + 2y = e^{3x}$ ist eine lineare inhomogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wie Teilaufgabe c). Lösung der homogenen DGL $y'' + 2y' + 2y = 0$. Nullstellen von $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ sind $\lambda_1 = -1 - i$, $\lambda_2 = -1 + i$. Damit ist $\tilde{\varphi}_1(x) = e^{-(1+i)x}$, $\tilde{\varphi}_2(x) = e^{(-1+i)x}$.

Durch geeignete Linearkombinationen kann man hieraus ein reelles Fundamentalsystem bilden

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &:= \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}_2(x)+\tilde{\varphi}_1(x)\right) = e^{-x}\cos(x)\\ \varphi_2(x) &:= \frac{1}{2i}\left(\tilde{\varphi}_2(x)-\tilde{\varphi}_1(x)\right) = e^{-x}\sin(x)\end{aligned}$$

Bestimmung der Lösung für die inhomogene Gleichung mit $f(x) = e^{3x}$ folgt mit den Formeln 1. $D = e^{-2x}$, $c_1(x) = \frac{1}{17}e^{4x}(\cos(x) - 4\sin(x))$, $c_2(x) = \frac{1}{17}e^{4x}(4\cos(x) + \sin(x))$. Damit ist

$$\psi(x) = (c_1(x)+d_1)\,\varphi_1(x) + (c_2(x)+d_2)\,\varphi_2(x) = d_1\cos(x)e^{-x} + d_2\sin(x)e^{-x} + \frac{1}{17}e^{3x}$$

Aufgabe 53

Aus den beiden angegebenen Differentialgleichungen folgt

$$mc\frac{\partial\vartheta(t)}{\partial t} = \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = -k(\vartheta(t)-\vartheta_1) \Longrightarrow \vartheta' = -\frac{k}{mc}(\vartheta-\vartheta_1)$$

Lösung mit dem Ansatz für getrennte Variablen. Setze $f(t) = -\frac{k}{mc}$ und $g(\vartheta) = \vartheta - \vartheta_1$. Damit ergibt sicht für $F(t) = -\int_0^t \frac{k}{mc}d\tau = -\frac{k}{mc}t$ und $G(\vartheta) = \int_{\vartheta_2}^{\vartheta}\frac{1}{\tau-\vartheta_1}d\tau = \ln(\tau-\vartheta_1)|_{\vartheta_2}^{\vartheta} = \ln(\vartheta - \vartheta_1) - \ln(\vartheta_2 - \vartheta_1)$. Auflösen der Gleichung $F(t) = G(\vartheta(t))$ liefert

$$\vartheta(t) = (\vartheta_2-\vartheta_1)e^{-\frac{k}{mc}t} + \vartheta_1.$$

Aufgabe 54

a) $z(t)$: Ort zum Zeitpunkt t.
$v(t) = z'(t)$: Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t.
$mv'(t) = -mg + c(v(t))^2$: Differentialgleichung bzgl. Geschwindigkeit v.

b) Ansatz mit getrennten Variablen führt zu $v' = \underbrace{1}_{f(t)}\cdot\underbrace{(-g+\frac{c}{m}v^2)}_{g(v(t))}$.

Damit ist

$$\begin{aligned}F(t) &= \int\limits_0^t f(\tau)d\tau = t \text{ und}\\ G(v) &= \int\limits_0^v \frac{1}{-g+\frac{c}{m}\tau^2}d\tau \overset{s=\sqrt{\frac{c}{m}}\tau}{=} \int\limits_0^{\sqrt{\frac{c}{m}}v}\frac{\sqrt{\frac{m}{c}}}{-g+s^2}ds = -\int\limits_0^{\sqrt{\frac{c}{m}}v}\frac{\sqrt{\frac{m}{c}}}{g-s^2}ds\\ &= -\sqrt{\frac{m}{c}}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\operatorname{arctanh}\left(\frac{s}{\sqrt{g}}\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{c}{m}}v} = -\sqrt{\frac{m}{cg}}\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}v\right).\end{aligned}$$

Dabei wurde $\int\frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right)$ für $|x| < a$ verwendet.

Aus $F(t) = G(v(t))$ folgt nun $t = -\sqrt{\frac{m}{cg}}\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}v(t)\right)$ und auflösen nach $v(t)$ liefert:

$$v(t) = -\frac{1}{c}\sqrt{cmg}\tanh\left(\frac{\sqrt{cmg}}{m}t\right)$$

(Beachte $\tanh(-x) = -\tanh(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$)

c) $\tanh(t) \to 1$ für $t \to \infty \Longrightarrow v(t) \overset{t\to\infty}{\to} -\frac{\sqrt{cmg}}{c}$

Aufgabe 55

a) $U(y) = \int_{J_0}^{y} \frac{1}{LC} s\, ds = \frac{1}{2LC}\left(y^2 - J_0^2\right)$. Damit ergibt sich die DGL $y' = \sqrt{V_0^2 - \frac{1}{LC}(y^2 - J_0^2)}$ für $|y| < \sqrt{V_0^2 LC + J_0^2}$. Diese wird mit dem Ansatz für getrennte Variablen gelöst und zwar mit $f(t) = 1$ und $g(y) = \sqrt{V_0^2 - \frac{1}{LC}(y^2 - J_0^2)}$. Berechnung von $G(y)$:

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{J_0}^{y} \frac{1}{g(x)} dx = \int_{J_0}^{y} \frac{1}{\sqrt{V_0^2 - \frac{1}{LC}(x^2 - J_0^2)}} dx = \int_{J_0}^{y} \frac{\sqrt{LC}}{\sqrt{V_0^2 LC + J_0^2 - x^2)}} dx \\ &= \sqrt{LC}\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{V_0^2 LC + J_0^2}}\right)\right)\Bigg|_{J_0}^{y} \\ &= \sqrt{LC}\left(\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{V_0^2 LC + J_0^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{J_0}{\sqrt{V_0^2 LC + J_0^2}}\right)\right) \end{aligned}$$

Dabei wurde $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ für $|x| < a$ verwendet. Auflösung von $G(y(t)) = F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = t$ nach y liefert:

$$\psi(t) := y(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}\sqrt{LC}, \tfrac{\pi}{2}\sqrt{LC}\right]$$

$$\begin{aligned} A &:= \sqrt{V_0^2 LC + J_0^2} && \text{Amplitude} \\ \phi &:= \arcsin\left(\tfrac{J_0}{A}\right) && \text{Nullphasenwinkel, Phasenverschiebung} \\ \omega &:= \tfrac{1}{\sqrt{LC}} && \text{Schwingungs- oder Kreisfrequenz} \end{aligned}$$

Beachte bei der Umkehrung von arcsin, dass dieser nur Werte zwischen $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ liefert. Daher ist $y(t)$ vorerst nur für $t \in [-\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}, \frac{\pi}{2}\sqrt{LC}]$ definiert.

b) Beim Einsetzen von ψ in die DGL sieht man, dass diese Funktion die DGL für alle t löst. Daher kann man ψ fortsetzen, mit

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad t \in \mathbb{R}$$

Dabei erfüllt $\varphi(t)$ die Anfangsbedingungen, denn $\varphi(0) = J_0$ und $\varphi'(0) = A\omega\cos(\omega t + \phi)|_{t=0} = A\omega\cos(\phi) = A\omega\sqrt{1 - \sin^2(\phi)} = A\omega\sqrt{1 - \frac{J_0^2}{A^2}} = \omega\sqrt{A^2 - J_0^2} = \omega V_0 \sqrt{LC} = V_0$