PD. Dr. Martin Kreuzer
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 2001/2002

Übungen zur Vorlesung "Computeralgebra für Naturwissenschaftler"

Tutorium 1: Termordnungen

Das Ziel dieses Tutoriums ist es, einen Einblick zu erhalten, welche Termordnungen es auf $\mathbb{T}^n$ mit $n \leq 3$ gibt.

a) Zeigen Sie, dass es auf $\mathbb{T}^1$ nur eine Termordnung gibt, nämlich deg .

b) Eine Termordnung σ heiße *gradkompatibel*, wenn aus $\deg(t) > \deg(t')$ für Terme $t, t' \in \mathbb{T}^n$ schon $t >_\sigma t'$ folgt. Beweisen Sie, dass es auf $\mathbb{T}^2$ genau zwei gradkompatible Termordnungen σ, τ gibt, die durch $x >_\sigma y$ bzw. $y >_\tau x$ charakterisiert sind.

c) Klassifizieren Sie alle auf $\mathbb{T}^2$ möglichen Termordnungen σ nach dem folgenden Schema. O.E. kann man $x >_\sigma y$ annehmen.
   1) Zeigen Sie, dass es genau eine Termordnung σ auf $\mathbb{T}^2$ gibt mit $x >_\sigma y^i$ für alle $i \geq 2$.
   2) Angenommen, eine Termordnung σ auf $\mathbb{T}^2$ erfüllt $x <_\sigma y^N$ für ein $N \geq 2$, und es sei $q = \inf\{\frac{j}{i} \in \mathbb{Q}_+ \mid x^i <_\sigma y^j\}$. Beweisen Sie $1 \leq q \leq N$.
   3) Gilt $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so gibt es genau eine Termordnung mit diesen Eigenschaften und sie ist gegeben durch $x^{i_1} y^{i_2} \geq_\sigma x^{j_1} y^{j_2}$ genau dann, wenn $i_1 q + i_2 \geq j_1 q + j_2$.
   4) Gilt $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, so gibt es genau zwei Termordnungen mit diesen Eigenschaften. Geben Sie Matrizen an, durch die sie definiert werden.
   5) Ist schließlich $q = 1$, so gibt es genau eine Termordnung mit diesen Eigenschaften. Geben Sie ihre Matrix an.

d) Für alle Terme vom Grad 2 in $\mathbb{T}^3$, finden Sie alle möglichen Anordnungen unter gradkompatiblen Termordnungen. Sie können o.E. $x >_\sigma y >_\sigma z$ annehmen.

e) Lösen Sie dieselbe Aufgabe für alle Terme vom Grad ≤ 3 in $\mathbb{T}^3$.

f) Beweisen Sie, dass es unendlich viele paarweise verschiedene gradkompatible Termordnungen auf $\mathbb{T}^3$ gibt.

g) Schreiben Sie ein CoCoA-Programm `TermOrderList(...)`, das zwei Zahlen $i, d > 0$ nimmt, eine 3×3-Matrix V_i berechnet so dass die Termordnungen $\mathrm{Ord}(V_i)$ auf $\mathbb{T}^3$ paarweise verschieden sind, und die Liste der Terme vom Grad $\leq d$ gemäß `Ord`(V_i) geordnet ausgibt.