PD. Dr. Martin Kreuzer
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 2001/2002

Übungen zur Vorlesung "Computeralgebra für Naturwissenschaftler"

Tutorium 2: Monomiale Ideale

In diesem Tutorium wollen wir die wichtigsten idealtheoretischen Operationen für den Fall monomialer Ideale studieren und implementieren. Dazu sei K ein Körper und $P = K[x_1, \ldots, x_n]$.

a) Zeigen Sie, dass ein Ideal $I \subseteq P$ genau dann ein monomiales Ideal ist, wenn für jedes Polynom $f \in I$ und jeden Term $t \in \mathrm{Supp}(f)$ gilt, dass $t \in I$ erfüllt ist.

b) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `IsMonomial`(...), die für ein gegebenes Ideal nachprüft, ob es monomial ist und den entsprechenden Boolschen Wert ausgibt. (Verwenden Sie die eingebaute CoCoA-Funktion `IsIn`.)

Seien nun $f_1, \ldots, f_s \in P$ und $g_1, \ldots, g_t \in P$ zwei Mengen von Termen, die monomiale Ideale $I = (f_1, \ldots, f_s)$ und $J = (g_1, \ldots, g_t)$ erzeugen.

c) Beweisen Sie, dass $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ ein monomiales Ideal von P ist. Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `MonomialSum`(...), die ein monomiales Erzeugendensystem von $I + J$ berechnet.

d) Beweisen Sie, dass $I \cdot J = \{a_1 b_1 + \cdots + a_r b_r \mid a_1, \ldots, a_r \in I,\ b_1, \ldots, b_r \in J\}$ ein monomiales Ideal von P ist. Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `MonomialProd`(...), die ein monomiales Erzeugendensystem von $I \cdot J$ berechnet.

e) Beweisen Sie, dass $I \cap J$ ein monomiales Ideal von P ist. Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `MonomialIntersection`(...), die ein monomiales Erzeugendensystem von $I \cap J$ berechnet.

f) Beweisen Sie, dass $I :_P J = \{a \in P \mid a \cdot b \in I \text{ für alle } b \in J\}$ ein monomiales Ideal von P ist. Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `MonomialColon`(...), die ein monomiales Erzeugendensystem von $I :_P J$ berechnet.

g) Sei $1 \leq m < n$. Beweisen Sie, dass $I \cap K[x_1, \ldots, x_m]$ ein monomiales Ideal von $K[x_1, \ldots, x_m]$ ist. Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `MonomialElim`(...), die ein monomiales Erzeugendensystem von $I \cap K[x_1, \ldots, x_m]$ berechnet.