PD. Dr. Martin Kreuzer
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 2001/2002

Übungen zur Vorlesung "Computeralgebra für Naturwissenschaftler"

Tutorium 3: Implementation des Divisionsalgorithmus

Nachfolgend sollen der Divisionsalgorithmus sowie zwei Varianten davon implementiert und an einigen Beispielen ausprobiert werden. Sei K ein Körper, sei $P = K[x_1, \ldots, x_n]$, sei σ eine Termordnung auf $\mathbb{T}^n$, und seien $g_1, \ldots, g_s \in P \setminus \{0\}$ Polynome.

a) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `Division`(...), die ein Polynom $f \in P \setminus \{0\}$ und die Liste $\mathcal{G} = [g_1, \ldots, g_s]$ nimmt und eine Liste $[q_1, \ldots, q_s, p]$ berechnet, so dass die Darstellung $f = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s + p$ die im Divisionsalgorithmus (Satz 8.3) angegebenen Eigenschaften hat.

b) Wenden Sie Ihre Funktion `Division`(...) in den folgenden Fällen an. Rechnen Sie dabei alles sowohl mit $\sigma =$ `Lex` als auch mit $\sigma =$ `DegRevLex` durch.
   1) $f = x^2y + xy^2 + y^2 \in P = \mathbb{Q}[x, y]$, $\mathcal{G} = [xy - 1,\, y^2 - 1]$
   2) $f = xyz \in P = \mathbb{Q}[x, y, z]$, $\mathcal{G} = [x - y^2, y - z^3, z^2 - 1]$
   3) $f = x_1^4 \in P = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_4]$, $\mathcal{G} = [x_1^2 - x_2^2, x_2^2 - x_3x_4, x_3 - x_4^2]$

c) Betrachten Sie die folgenden Instruktionen.
   1) Sei $i = 1$ und $q_1 = \cdots = q_s = 0$.
   2) Finde den bzgl. σ größten Term $t \in \mathrm{Supp}\,(f)$ der Form $t = t' \cdot \mathrm{LT}_\sigma(g_i)$. Existiert so ein Term und ist $c \in K \setminus \{0\}$ sein Koeffizient, so ersetze f durch $f - \frac{c}{\mathrm{LC}_\sigma(g_i)}\, t'\, g_i$ sowie q_i durch $q_i + \frac{c}{\mathrm{LC}_\sigma(g_i)}\, t'$.
   3) Wiederhole 2) so oft wie möglich. Ist schließlich $\mathrm{Supp}\,(f) \cap (\mathrm{LT}_\sigma(g_i))$ leer, so erhöhe i um eins.
   4) Gilt nun $i \le s$, so fahre mit 2) fort. Andernfalls setze $p = f$ und gib $[q_1, \ldots, q_s, p]$ aus.

   Zeigen Sie, dass dies ein Algorithmus ist, der eine Liste $[q_1, \ldots, q_s, p]$ berechnet, so dass $f = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s + p$ gilt.

d) Implementieren Sie den Algorithmus aus c) in einer CoCoA-Funktion `Division2`(...). Wenden Sie diese in den Fällen von b) an. Zeigen Sie, dass die berechneten Darstellungen i.a. nicht die Eigenschaften von Satz 8.3 haben.

e) Betrachten Sie die folgenden Instruktionen.
   1) Wähle den bzgl. σ größten Term $t \in \mathrm{Supp}\,(f)$, der durch einen der Terme in $\{\mathrm{LT}_\sigma(g_1), \ldots, \mathrm{LT}_\sigma(g_s)\}$ teilbar ist. Gibt es keinen solchen Term, so gib f aus und stoppe.
   2) Finde das kleinste $i \in \{1, \ldots, s\}$ mit $t = t' \cdot \mathrm{LT}_\sigma(g_i)$. Sei $c \in K \setminus \{0\}$ der Koeffizient von t in f. Ersetze f durch $f - \frac{ct'}{\mathrm{LC}_\sigma(g_i)}\, g_i$ und fahre mit 1) fort.

   Beweisen Sie, dass dies einen Algorithmus definiert, und dass das Ergebnis dieses Algorithmus gerade $\mathrm{NR}_{\sigma,\mathcal{G}}(f)$ ist. Er heißt der **Normale-Rest-Algorithmus**.

f) Implementieren Sie den Algorithmus aus e) in einer CoCoA-Funktion `NormRest`(...) und wenden Sie diese in den Beispielen von b) an.