PD. Dr. Martin Kreuzer
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 2001/2002

Übungen zur Vorlesung "Computeralgebra für Naturwissenschaftler"

Tutorium 4: Berechnung einiger Gröbner-Basen

In diesem Tutorium wollen wir zwei Versionen des Buchberger-Algorithmus für Polynomideale implementieren und an einigen Beispielen ausprobieren. Insbesondere werden wir einen Fall sehen, in dem die Elemente der Gröbner-Basis sehr hohen Grad haben, obwohl die Erzeuger des Ideals kleine Grade haben.

a) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `SPoly(...)`, die eine Liste $[g_1, \ldots, g_s]$ von Polynomen und Indizes $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ mit $i \neq j$ als Argumente nimmt, und die das S-Polynom S_{ij} von g_i und g_j bzgl. der momentanen Termordnung berechnet.

b) Implementieren Sie Buchbergers Algorithmus in einer CoCoA-Funktion `FirstGB(...)`, die die Gröbner-Basis eines Ideals bzgl. der momentanen Termordnung berechnet. (*Hinweis:* Verwenden Sie die eingebaute Funktion `NR(...)`.)

c) Berechnen Sie mit Hilfe von `FirstGB(...)` die Gröbner-Basen der folgenden Ideale bzgl. der angegebenen Termordnungen.
   1) $I_1 = (y^2,\, xyz + z^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ bzgl. `DegRevLex`
   2) $I_2 = (x^2y - 1,\, xy^2 - x) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ bzgl. `Lex` und bzgl. `DegRevLex`
   3) $I_3 = (x - z^4,\, y - z^5) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ bzgl. `Lex` und bzgl. `DegRevLex`

d) Berechnen Sie mit Hilfe von `FirstGB(...)` die reduzierte Gröbner-Basis des folgenden Ideals I_m bzgl. `DegRevLex` für $i = 1, \ldots, 100$.
   $I_m = (x_1^{m+1} - x_2x_3^{m-1}x_4,\, x_1x_2^{m-1} - x_3^m,\, x_1^m x_3 - x_2^m x_4) \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$
   Können Sie die Gesetzmässigkeit erraten? Können Sie dies sogar beweisen?

e) Beweisen Sie, dass die reduzierte Gröbner-Basis in d) stets das Polynom $f_m = x_3^{m^2+1} - x_2^{m^2}x_4$ enthält. Zeigen Sie auch, dass I_3 bzgl. `Lex` und `DegRevLex` dieselbe Gröbner-Basis hat. Stimmt dies für alle m?

f) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `SecondGB(...)`, die den Buchberger-Algorithmus implementiert und die folgenden beiden Optimierungen beinhaltet:
   1) Das nächste abzuarbeitende Paar wird in B stets so gewählt, dass der Grad von $\mathrm{kgV}(t_i, t_j)$ minimal ist. Dies ist die *normale Auswahlstrategie*.
   2) Gilt $\mathrm{ggT}(t_i, t_j) = 1$, so braucht S_{ij} gar nicht erst berechnet zu werden, weil sich stets $\mathrm{NR}_{\sigma,\mathcal{H}}(S_{ij}) = 0$ ergibt. Es liegt eine *triviale Syzygie* vor.

g) Vergleichen Sie die Algorithmen `FirstGB(...)` und `SecondGB(...)` in den folgenden Fällen. Messen Sie dazu die Ausführungsgeschwindigkeit und zählen Sie die Anzahl der Aufrufe von `NR(...)`. Verwenden Sie sowohl `Lex` als auch `DegRevLex`.
   1) $J_1 = (x^2 - 2y^2 + 3x,\, x^3 - 2xy) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$
   2) $J_2 = (x - 2z^4,\, y - 3z^5) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$
   3) $J_3 = (x^2 - 2y^2,\, x^3 - 3z^3,\, x^4 - t^4) \subseteq Q[x, y, z, t]$
   4) $J_4 = (x^3 - 4y^3,\, x^5 - 7z^5,\, x^7 - 11t^7) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z, t]$
   5) $J_5 = (x^2 + y^3 + z^3 - 1,\, x^3 + y^4 + z^5 - 1) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$