PD. Dr. Martin Kreuzer
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 2001/2002

Übungen zur Vorlesung "Computeralgebra für Naturwissenschaftler"

Tutorium 6: Integer Programming

Das Ziel dieses Tutoriums ist es, die in Abschnitt 17 der Vorlesung vorgestellten Algorithmen zu implementieren, an konkreten Beispielen auszuprobieren, und zu optimieren. Gegeben seien eine Matrix $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{N})$ und ein Vektor $b \in \mathbb{N}^n$. Ferner sei K ein Körper, sei $P = K[x_1, \ldots, x_n]$, sei $Q = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$, und sei $J \subseteq Q$ das von $\{x_1 - t_1, \ldots, x_n - t_n\}$ mit $t_i = y_1^{a_{1i}} \cdots y_m^{a_{mi}}$ erzeugte Ideal.

a) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `DioSysSolve(...)`, die als Eingabe die Matrix $\mathcal{A}$ und den Vektor b erwartet. Die Funktion soll zuerst prüfen, ob das Diophantische Gleichungssystem $\mathcal{S}: \ \mathcal{A} \cdot (z_1, \ldots, z_n)^{\mathrm{transp.}} = b$ lösbar ist und in diesem Fall dann eine Lösung von $\mathcal{S}$ berechnen.

b) Wenden Sie Ihre Funktion `DioSysSolve(...)` in den folgenden Fällen an:

1) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \\ 21 \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 7 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 9 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 27 \\ 38 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie das Eliminationsideal $J \cap P$ in den folgenden Fällen mit Hilfe des eingebauten Befehls `Elim(...)`.

1) $$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 & 2 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 7 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 9 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 5 & 8 & 7 & 3 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 2 & 4 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 3 & 6 & 6 & 5 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 9 & 6 & 9 & 7 & 1 & 9 & 2 & 9 \\ 9 & 7 & 0 & 6 & 3 & 9 & 2 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

3) $$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}\right)$$

d) Verwenden Sie die in CoCoA eingebaute Funktion `LinKer(...)` sowie die Beschreibung von $J \cap P$ als $I_{\mathcal{L}} : (x_1 \cdots x_n)^\infty$, um eine CoCoA-Funktion `Toric(...)` zu schreiben, die das Ideal $J \cap P$ effizient berechnet. Wenden Sie Ihre Funktion in den Fällen von c) an und vergleichen Sie die Timings.
Hinweis: Die Funktion `LinKer(...)` ist nicht deterministisch. Wenden Sie sie mindestens achtmal an, um verschiedene $\mathbb{Z}$-Basen von $\mathcal{L}$ zu erzeugen.

e) Seien $f_1, \ldots, f_s \in P$. Zeigen Sie, dass für jedes Ideal $I \subseteq P$ gilt

$$I : (f_1 \cdots f_s)^\infty = (\cdots((I : (f_1)^\infty) : (f_2)^\infty) \cdots) : (f_s)^\infty$$

f) Seien $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t \in P$. Ferner sei $I \subseteq P$ ein Ideal, das das Polynom $f_1 \cdots f_s - g_1 \cdots g_t$ enthalte. Beweisen Sie die Formel

$$I : (f_1 \cdots f_s \cdot g_1 \cdots g_t)^\infty = I : (f_1 \cdots f_s)^\infty$$

g) Optimieren Sie ihre Funktion `Toric(...)`, indem Sie die Resultate der beiden vorhergehenden Aufgaben anwenden. Vergleichen Sie die Timings der neuen Funktion `ToricOpt(...)` wieder in den Fällen von c).