Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: 29.11.2002, 9.00 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (P): (Automorphismus = die Verwandlung eines Käfers in einen Jaguar)

Beweisen Sie $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p) = \{\mathrm{id}\}$ für eine Primzahl p.

Aufgabe 2 (P): (Der Student muss es wissen. Der Assistent muss wissen, wo es steht. Der Professor muss wissen, wo der Assistent ist.)

Sei R ein kommutativer Integritätsring mit Einselement. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Rechenregeln für Polynome $f, g \in R[x] \setminus \{0\}$.

a) $\deg(f + g) = \max\{\deg(f), \deg(g)\}$

b) $\mathrm{LT}(f \cdot g) = \mathrm{LT}(f) \cdot \mathrm{LT}(g)$

c) $\mathrm{LT}(f + g) = \mathrm{LT}(f) + \mathrm{LT}(g)$

d) $\mathrm{LC}(f \cdot g) = \mathrm{LC}(f) \cdot \mathrm{LC}(g)$

Aufgabe 3 (D+L): (Teile und herrsche!)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimmen sie das Ergebnis der Polynomdivision von $x^n + 1$ durch $x + 1$. (Tipp: Unterscheiden Sie, ob n gerade oder ungerade ist.)

Aufgabe 4 (D+L): (Man kann alles einführen... es ist nur fraglich, ob es sinnvoll ist.)

Auf der Menge $\mathbb{R}^2$ führen wir die folgenden beiden Abbildungen ein:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad ((a,b),(c,d)) \mapsto (a+c, b+d) \qquad \text{sowie} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (a,(b,c)) \mapsto (ab, ac)$$

a) Untersuchen Sie, ob die Mengen $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 6y = 0\}$ und $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 4\}$ bzgl. der Operation + Gruppen sind.

b) Prüfen Sie, ob A und B bzgl. der Operation $\cdot$ abgeschlossen sind, d.h. ob für $a \in \mathbb{R}$ und $(c,d) \in A$ (bzw. B) gilt, dass auch $a \cdot (c,d) \in A$ (bzw. B) gilt.

c) Identifizieren Sie $\mathbb{R}^2$ mit der Zeichenebene und beschreiben Sie die den Mengen A und B entsprechenden Punktmengen.

Aufgabe 5 ($*$): (Computer sind nicht intelligent. Sie denken nur, sie seien es.)

Gegeben seien Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\deg(f) \geq 1$ und $\deg(g) \geq 1$.

a) Mit welchen Maple-Befehlen kann man die Polynome g und r in der Darstellung $f = q \cdot g + r$ gemäß Satz (6.10) finden? Schreiben Sie eine kurze Maple-Funktion `PolyDivision` (f, g), die das Paar (q, r) berechnet.

b) Schreiben Sie ein Maple-Programm `PolyEuklid` (f, g), das den größten gemeinsamen Teiler von f und g mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus berechnet.
Wenden Sie Ihr Programm an selbstgewählten Beispielen an, um seine Korrektheit in verschiedenen Situationen zu beweisen.