Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: 6.12.2002, 9.00 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (P): ($\lim\limits_{\omega\to\infty} 3 = 8$)

a) Zeigen Sie, dass die Menge der Folgen $K^{\mathbb{N}}$ einen K-Vektorraum darstellt.

b) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sind $\mathbb{R}$-Untervektorräume?

1) $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, die Menge der endlichen Folgen reeller Zahlen,
2) A, die Menge der alternierenden Folgen reeller Zahlen,
3) B, die Menge der beschränkten Folgen reeller Zahlen,
4) C, die Menge der konvergenten Folgen reeller Zahlen.

Aufgabe 2 (P): (Wenn alles Andere fehlschlägt, lesen Sie die Bedienungsanleitung ...)

a) Beschreiben Sie den kleinsten $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $\mathbb{Q}[x]$, der die Polynome $f = 3x^2 + 1$, $g = -5x^2 - 5$ und $h = x^2 - 2$ enthält.

b) Zeigen Sie, dass $\varphi : \{ax^2 + bx^3 \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \to \mathbb{Q}[x]$, $ax^2 + bx^3 \mapsto (a + 2b)(x + 1)$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung darstellt. Beschreiben Sie $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

c) Finden Sie eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $\psi : \mathbb{Q}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{Q}^3$ mit $\psi(1) = (4, 0, 0)$ und $\psi(x) = (0, 2, 0)$ und $\psi(x^2) = (0, 6, 1)$. Zeigen Sie, dass ψ eindeutig bestimmt ist und einen Isomorphismus von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen darstellt.

Aufgabe 3 (P): („Ich habe einen eindimensionalen Strich. Wie wird er zweidimensional?“„Noch'n Strich!“)

a) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge L des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

über dem Körper $\mathbb{R}$ einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ darstellt. Beschreiben Sie L als die Menge der Vielfachen eines Vektors.

b) Finden Sie zwei verschiedene $\mathbb{R}$-Untervektorräume $U \subsetneq \mathbb{R}^3$ und $V \subsetneq \mathbb{R}^3$ mit $U \cap V = L$.

c) Lösen Sie obiges Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_2$.
Gibt es Unterräume U, V in $(\mathbb{F}_2)^3$ wie in b)?

Aufgabe 4 (D+L): (Ein Mathematiker ist ein Gerät, das Kaffee in Beweise umwandelt.)

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum, und sei U ein K-Untervektorraum von V. Beweisen Sie, dass $V \setminus U$ kein K-Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 5 (D): (2 ist the oddest prime ...)

a) Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X bzgl. den in Beispiel 7.10 definierten Abbildungen einen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum darstellt.

b) Nun sei X eine endliche Menge mit n Elementen. Finden Sie einen Isomorphismus von $\mathbb{F}_2$-Vektorräumen $\varphi : \mathcal{P}(X) \to (\mathbb{F}_2)^n$.

Aufgabe 6 ($*$): (Was ist höhere Mathematik? Wenn man morgens mit einer Unbekannten aufwacht!)

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ paarweise verschiedene Zahlen. Gibt es ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ mit $f(a) = b$ und $f(b) = c$ und $f(c) = a$?
(Tipp: Betrachte die Differenzen $a - b$, $b - c$ und $c - a$ und verwende Satz 6.7.b).)