Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: 6.12.2002, 9.00 Uhr

# Lineare Algebra I
## Übungsblatt 7

**Aufgabe 1 (P): ($\lim_{\omega\to\infty} 3 = 8$)**

a) Zeigen Sie, dass die Menge der Folgen $K^{\mathbb{N}}$ einen $K$-Vektorraum darstellt.

b) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sind $\mathbb{R}$-Untervektorräume?

1) $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, die Menge der endlichen Folgen reeller Zahlen,
2) $A$, die Menge der alternierenden Folgen reeller Zahlen,
3) $B$, die Menge der beschränkten Folgen reeller Zahlen,
4) $C$, die Menge der konvergenten Folgen reeller Zahlen.

**Aufgabe 2 (P): (Wenn alles Andere fehlschlägt, lesen Sie die Bedienungsanleitung ...)**

a) Beschreiben Sie den kleinsten $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $\mathbb{Q}[x]$, der die Polynome $f = 3x^2 + 1$, $g = -5x^2 - 5$ und $h = x^2 - 2$ enthält.

b) Zeigen Sie, dass $\varphi : \{ax^2 + bx^3 \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \to \mathbb{Q}[x]$, $ax^2 + bx^3 \mapsto (a+2b)(x+1)$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung darstellt. Beschreiben Sie Kern($\varphi$) und Bild($\varphi$).

c) Finden Sie eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $\psi : \mathbb{Q}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{Q}^3$ mit $\psi(1) = (4,0,0)$ und $\psi(x) = (0,2,0)$ und $\psi(x^2) = (0,6,1)$. Zeigen Sie, dass $\psi$ eindeutig bestimmt ist und einen Isomorphismus von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen darstellt.

**Aufgabe 3 (P): („Ich habe einen eindimensionalen Strich. Wie wird er zweidimensional?“„Noch'n Strich!“)**

a) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge $L$ des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

über dem Körper $\mathbb{R}$ einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ darstellt. Beschreiben Sie $L$ als die Menge der Vielfachen eines Vektors.

b) Finden Sie zwei verschiedene $\mathbb{R}$-Untervektorräume $U \subsetneq \mathbb{R}^3$ und $V \subsetneq \mathbb{R}^3$ mit $U \cap V = L$.

c) Lösen Sie obiges Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_2$.
Gibt es Unterräume $U, V$ in $(\mathbb{F}_2)^3$ wie in b)?

**Aufgabe 4 (D+L): (Ein Mathematiker ist ein Gerät, das Kaffee in Beweise umwandelt.)**

Sei $K$ ein Körper, sei $V$ ein $K$-Vektorraum, und sei $U$ ein $K$-Untervektorraum von $V$. Beweisen Sie, dass $V \setminus U$ kein $K$-Untervektorraum von $V$ ist.

**Aufgabe 5 (D): (2 ist the oddest prime ...)**

a) Sei $X$ eine Menge. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von $X$ bzgl. den in Beispiel 7.10 definierten Abbildungen einen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum darstellt.

b) Nun sei $X$ eine endliche Menge mit $n$ Elementen. Finden Sie einen Isomorphismus von $\mathbb{F}_2$-Vektorräumen $\varphi : \mathcal{P}(X) \to (\mathbb{F}_2)^n$.

**Aufgabe 6 ($*$): (Was ist höhere Mathematik? Wenn man morgens mit einer Unbekannten aufwacht!)**

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ paarweise verschiedene Zahlen. Gibt es ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ mit $f(a) = b$ und $f(b) = c$ und $f(c) = a$?
(Tipp: Betrachte die Differenzen $a - b$, $b - c$ und $c - a$ und verwende Satz 6.7.b).)