Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: 20.12.2002, 9.00 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (P): (Nur Druck macht aus Kohle Diamanten ...)
Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_2$.

$$(\star)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Berechnen Sie eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge $L \subseteq (\mathbb{F}_2)^5$ von $(\star)$.

b) Was bedeutet Ihre Rechnung für den von den Vektoren $(1,1,1,0,0)$, $(1,1,1,1,0)$, $(1,0,1,1,1)$ und $(1,1,0,1,0)$ erzeugten Untervektorraum von $(\mathbb{F}_2)^5$?

Aufgabe 2 (P):
(Kommt ein Vektor zum Drogenberater: "Hilfe, ich bin linear abhängig!")
Drei Polynome $f, g, h \in \mathbb{F}_5[x]\backslash\{0\}$ haben paarweise verschiedene Grade. Sind dann die Polynome $3f + g$, $2g + 3h$ und $f + 2h$ $\mathbb{F}_5$–linear unabhängig?

Aufgabe 3 (D+L):
(Was haben Äpfel, Birnen und Homomorphismen gemeinsam? Sie haben Kerne!)
Sei K ein Körper, V ein endlich erzeugter K–Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_m \in V$. Wir würden gerne K–lineare Abbildungen $f : V \to K^n$ mit $f(v_i) = e_i$ für $i = 1, \ldots, m$ und $g : K^n \to V$ mit $g(e_j) = v_j$ für $j = 1, \ldots, n$ definieren.

a) Unter welchen Voraussetzungen sind f und g wohldefiniert?

b) Unter welchen Voraussetzungen sind f und g für alle Elemente eindeutig festgelegt?

Aufgabe 4 (D+L): (EDV = Ende der Vernunft)

a) Schreiben Sie ein Maple–Programm `Gauss Elim` ($\mathcal{M}$), das das Gauß-sche Eliminationsverfahren gemäß Satz 8.10 implementiert.

b) Wenden Sie Ihr Programm `Gauss Elim` ($\mathcal{M}$) in den folgenden Fällen an. Vergleichen Sie das Ergebnis jeweils mit dem Resultat einer Rechnung "per Hand" oder per eingebauter Maple–Funktion `gausselim`.

1) $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

2) $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 19 & 21 & 45 \\ 1 & 8 & 4 & 2 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 ($\star$):
("Wie oft kann man 7 von 83 substrahieren und was ist der Rest?" "Man kann es so oft substrahieren wie man will, und der Rest ist immer 76")

Sei K ein Körper und seien $f, g \in K[x]$ mit
$\mathrm{Supp}(f) = \{1, x, x^2, x^{10}, x^{11}, x^{12}, x^{13}\}$ sowie mit
$\mathrm{Supp}(g) = \{1, x, x^2, x^3, x^{11}, x^{12}, x^{13}\}$. Beweisen Sie, dass $\deg(\mathrm{ggT}(f, g)) \leq 6$ gilt.