Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: Freitag, 10.01.2003, 9.00 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (P):
(Das Leben ist komplex. Es hat reelle und imaginäre Komponenten.)
Eine Teilmenge G von $\mathbb{R}^3$ heißt eine **Gerade**, wenn es $v, w \in \mathbb{R}^3$ gibt mit $w \neq 0$, so dass $G = v + \mathbb{R}w$ gilt. Zeigen Sie, dass $G \subseteq \mathbb{R}^3$ genau dann eine Gerade ist, wenn es eine 2×3–Matrix $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ mit linear unabhängigen Zeilen und einen Vektor $v = \binom{b_1}{b_2} \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass G die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems ist:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}$$

Aufgabe 2 (P):
(Es gibt drei Arten von Menschen: die, die zählen können und die, die nicht zählen können.)

a) Bestimmen Sie eine Basis des von den Vektoren $v_1 = (2, -3, 2, 3)$, $v_2 = (3, -5, 0, 1)$, $v_3 = (1, -2, 2, 2)$ und $v_4 = (1, -1, -4, -3)$ erzeugten $\mathbb{R}$–Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$.

b) Finden Sie alle Teilmengen von $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, die Basen von $\mathbb{R}^4$ sind.

Aufgabe 3 (D+L): (Distributivgesetz: $\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)$)
Sei K ein Körper und sei $\{v_1, v_2\}$ eine K–Basis eines 2–dimensionalen K–Vektorraums V. Für welche $(a, b) \in K^2$ ist die Menge $\{av_1 + v_2, v_1 + bv_2\}$ ebenfalls eine K–Basis von V?

Aufgabe 4 (D+L): (Kürzungsregel: $\frac{\cancel{6}4}{1\cancel{6}} = 4$, $\frac{\cancel{9}5}{1\cancel{9}} = 5$, etc.)
Sei K ein Körper und sei $f : K^n \to K^m$ die durch die Matrix M gegebene K–lineare Abbildung. Bestimmen Sie jeweils K–Basen von $\mathrm{Kern}(f)$ und von $\mathrm{Bild}(f)$.

$$\text{a)} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 ($\star$):
(Ist das eine körperliche oder eine psychische Abhängigkeit?)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{F}_{11}$, welche Dimension der von den Vektoren $v_1 = (1, 2, t+2)$, $v_2 = (-1, t+1, t)$ und $v_3 = (0, t, 1)$ erzeugte $\mathbb{F}_{11}$–Untervektorraum von $(\mathbb{F}_{11})^3$ besitzt.

Aufgabe 6 ($\star$):
("Geh weg, sonst differenziere ich Dich!" "Ist mir egal, ich bin e^x." "Und ich bin $\frac{\partial}{\partial y}$!")
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei B_n die $\mathbb{Q}$–Basis $B_n = \{1, x, \ldots, x^n\}$ von $\mathbb{Q}[x]_{\leq n}$.

a) Zeigen Sie, dass der Ableitungshomomorphismus $\partial_n : \mathbb{Q}[x]_{\leq n} \to \mathbb{Q}[x]_{\leq n-1}$ für $n \geq 1$ eine $\mathbb{Q}$–lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie die Matrix von ∂_n bzgl. der Basen B_n und B_{n-1}.

c) Finden Sie eine $\mathbb{Q}$–lineare Abbildung $\imath_{n-1} : \mathbb{Q}[x]_{\leq n-1} \to \mathbb{Q}[x]_{\leq n}$ mit $\partial_n \circ \imath_{n-1} = id$.

d) Berechnen Sie die Matrix von $\imath_{n-1}$ bzgl. der Basen B_{n-1} und B_n.

Aufgabe 7 ($\star$):
("Glauben Sie an Gott?" "Ja, bis auf einen Isomorphismus.")
Sei K ein Körper und seien V, W zwei endlich–dimensionale K–Vektorräume mit Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bzw. $\{w_1, \ldots, w_m\}$. Finden Sie eine Basis des K–Vektorraums $\mathrm{Hom}_K(V, W)$.

Hinweis: Betrachten Sie die K–linearen Abbildungen $f_{ij} : V \to W$ mit:
$$f_{ij}(x_k) = \begin{cases} w_j & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 8 ($\star$): (So ein Endomor*fies*mus!)
Sei K ein Körper, V ein K–Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Für $n \geq 1$ setzen wir $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{–mal}}$. Es gebe ein $n \geq 1$ und einen Vektor $v \in V$ mit $f^n(v) \neq 0$ und $f^{n+1}(v) = 0$. Zeigen Sie, dass $\{v, f(v), \ldots, f^n(v)\}$ dann eine Menge von K–linear unabhängigen Vektoren ist.

Aufgabe 9 ($\star$): (Hinweis = der schwerste von mehreren Lösungswegen)
Bestimmen Sie alle Untervektorräume eines Vektorraums, die ein eindeutiges Komplement haben.

Hinweis: Beachten Sie auch, dass der Grundkörper endlich sein kann!

Aufgabe 10 ($\star$):
(F i bb ooo nnnnn aaaaaaaa cccccccccccc iiiiiiiiiiiiiiiiiii)
Eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heiße eine **Fibonacci–Folge**, wenn für alle $n \geq 2$ gilt $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Sei V die Menge aller Fibonacci–Folgen.

a) Zeigen Sie, dass V ein $\mathbb{R}$–Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

b) Können Sie eine $\mathbb{R}$–Basis von V angeben? Welche Dimension hat V?

Aufgabe 11 ($\star$): (Betrachten Sie die Menge aller Mengen, die noch nie betrachtet wurden!)
Sei M eine endliche Menge und sei $V = \mathcal{P}(M)$ der $\mathbb{F}_2$–Vektorraum aller Teilmengen von M.

a) Geben Sie eine $\mathbb{F}_2$–Basis von V an. Welche Dimension hat V?

b) Gibt es eine $\mathbb{F}_2$–Basis von V, deren Elemente Teilmengen von M sind, die mindestens zwei Elemente besitzen?