Lineare Algebra II - Übungsblatt 8

Aufgabe 1: Sei $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit $\mathcal{G}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ und $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die zugehörige quadratische Form. Zeichnen Sie die Menge

$$\{w \in \mathbb{R}^2 \mid q(w) = 1\}$$

und beschreiben Sie die Hauptachsen.

Aufgabe 2: Sei V ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ eine orthonormale Familie in V. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) $\mathcal{V}$ ist eine Basis von V.

(2) Ist $x \in V$ mit $\langle x, v_i\rangle = 0$ für alle $1 \le i \le n$, so gilt $x = 0$.

(3) $\sum_{i=1}^{n} K \cdot v_i = V$.

(4) Für alle $x \in V$ gilt $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle\, v_i$.

(5) Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle \langle v_i, y\rangle$.

(6) Für alle $x \in V$ gilt $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, v_i\rangle|^2$.

Hinweis: Ringschluss (1) $\Rightarrow \cdots \Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (1).

Aufgabe 3: (Die Gesellschaft muss sich mehr um Integration bemühen.) Betrachten Sie den reellen Vektorraum $V := C([a,b], \mathbb{R})$ der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(t) g(t)\, dt\ .$$

Die Funktionen

$$f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad t \to t^n, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

sind linear unabhängig in V. Wenden Sie auf (f_0, f_1, f_2) das Orthonormalisierungsverfahren an für die beiden Fälle

$$[a,b] = [0,1] \qquad \text{und} \qquad [a,b] = [-1,1]\ .$$

Aufgabe 4: (The certificate of your theorem has expired - please update.) Beweisen Sie den Satz über die Hauptachsentransformation im Komplexen: Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermitescher Form $\langle\ ,\ \rangle$ und $f\colon V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

Aufgabe 5: (*) Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reelle Vektorraum aller Folgen reeller Zahlen und

$$U := \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty\}\ .$$

Zeigen Sie:
(1) Für beliebige $(a_n), (b_n) \in U$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut. (Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in $\mathbb{R}^n$.)
(2) U ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, und

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

definiert ein Skalarprodukt auf U.
(3) $e^{(k)} := (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ definiert eine orthonormale Familie $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in U.
(4) $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist keine Basis von U.