Prof. Dr. M. Kreuzer   Abgabe: Briefkasten 63, 20. Januar 2004, 12:00 Uhr

Algebra I
Übungsblatt 12

Galois' ideas, which for several decades remained a book with seven seals but later exerted a more and more profound influence upon the whole development of mathematics, are contained in a farewell letter written to a friend on the eve of his death, which he met in a silly duel at the age of twenty-one. This letter, if judged by the novelty and profundity of ideas it contains, is perhaps the most substantial piece of writing in the whole literature of mankind.

(Hermann Weyl: *Symmetry*)

Aufgabe 1: Sei $L = \mathbb{Q}(z)$ der Körper der rationalen Funktionen mit rationalen Koeffizienten und der Unbestimmten z. Weiter sei $K = \mathbb{Q}(\frac{z^3}{z+1})$. Zeigen Sie, dass L eine einfache, algebraische Erweiterung von K ist. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von z über K.

Aufgabe 2: Sei $K = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ der Körper mit zwei Elementen. Es wurde bereits gezeigt, dass das Polynom $x^2 + x + 1$ irreduzibel ist. Konstruieren Sie einen Körper mit vier Elementen als algebraische Erweiterung $K(\xi)$ von K. Geben Sie die Additions- und Multiplikationstafel an. Beschreiben Sie die Wirkung des Frobenius-Endomorphismus $K(\xi) \to K(\xi)$, $\alpha \mapsto \alpha^2$.

Aufgabe 3: Welche der folgenden Polynome sind separabel über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ bzw. $\mathbb{Z}_7$? ($\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

$$t^3 + 1 \quad , \quad t^2 + 2t - 1 \quad , \quad t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 \quad , \quad 7t^5 + t - 1$$

Aufgabe 4: (Diese Aufgabe ist einfach! Lediglich Anwendung der Definitionen und Bruchrechnung.) Sei $L = K(t)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten t mit Koeffizienten im Körper K. Weiter seien $g_1 = id, g_2, \ldots, g_6$ die K-Homomorphismen mit

$$g_2(t) = \frac{1}{t}\ ,\ g_3(t) = 1 - t\ ,\ g_4(t) = \frac{1}{1-t}\ ,\ g_5(t) = \frac{t-1}{t}\ ,\ g_6(t) = \frac{t}{t-1}\ .$$

(Anmerkung: Die Abbildungen sind wohldefiniert aufgrund der universellen Eigenschaften des Polynomrings und des Quotientenkörpers.) Zeigen Sie:

(a) Die sechs K-Homomorphismen bilden eine Gruppe G mit Komposition der Abbildungen; stellen Sie die Gruppentafel auf.

(b) Die Gruppe G operiert auf L vermöge $G \times L \to L$, $(g, f) \mapsto g(f)$.

(c) Die Fixpunktmenge $F = \{f \in L \mid f = g_i(f), i = 1, \ldots, 6\}$ ist ein Zwischenkörper der Erweiterung $L|K$.

(d) Die rationale Funktion

$$h = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}$$

liegt in F; berechnen Sie $g_i(h)$ für $1 \le i \le 6$. (Tipp: Die Gruppe G wird erzeugt von den zwei Elementen g_2, g_3.)